Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 4, 1984

УДК 531.31

К ДИНАМИКЕ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕОНОМНЫХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Румянцев В. В.

Рассматриваются общие лагранжевы реономные системы с неинтегрируемыми связями, уравнения движения которых в форме уравнений Лагранжа со множителями эквивалентны вариационному уравнению, выражающему принцип Гамильтона в форме Гёльдера, при определении синхронных вариаций по Четаеву. Проводится параметрическое рассмотрение движений таких систем в расширенном конфигурационном пространстве R_{n+1} при произвольном выборе параметра. При этом виртуальные перемещения Δq_i в пространстве R_{n+1} представляют собою для конфигурационного пространства R_n полные (асинхронные) вариации. Из принципа Гамильтона с однородным лагранжианом выведены $n+1$ параметрических уравнений движения с множителями, одно из которых является следствием n остальных. Эти уравнения при выборе в качестве параметра времени t принимают вид обычных лагранжевых уравнений с множителями.

В случае независимости лагранжиана от t и однородности связей по скоростям уравнения движения имеют интеграл энергии, отвечающий циклической координате t. Исключение t' из принципа Гамильтона приводит к принципу наименьшего действия в формах Якоби или Лагранжа. При помощи интеграла энергии проводится понижение порядка исходных уравнений, в результате получено обобщение уравнений Якоби — Уиттекера. В заключение для обычных динамических реономных систем со связями обсуждается вопрос о двух формах теоремы об энергии.

1. Рассмотрим общую лагранжеву реономную систему с неинтегрируемыми связями, характеризуемую функцией Лагранжа $L(q, t, q^{\cdot})$ и идеальными независимыми связями вида

$$f_l(q, t, q^{\cdot}) = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \tag{1.1}$$

в общем случае нелинейными относительно $q_i^{\cdot} \equiv dq_i/dt$. Здесь, если использовать механическую терминологию [1], q_i $(i = 1, \ldots, n)$ — лагранжевы независимые координаты, t — время, $q_i^{\cdot}$ — обобщенные скорости. Предположим, что функции $L(q, t, q^{\cdot}) \in C^2$, $f_l(q, t, q^{\cdot}) \in C^2$ определены во всех точках некоторой фиксированной односвязной области $\bar{G}$ пространства R_{2n+1} переменных q_i, t, $q_i^{\cdot}$, где

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^{\cdot}\partial q_j^{\cdot}}\right) \neq 0, \quad \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}\right) = r$$

Уравнения движения общей лагранжевой реономной системы со связями имеет вид уравнений Лагранжа с неопределенными множителями μ_l

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

к которым следует присоединить уравнения связей (1.1). Общее решение системы уравнений (1.1), (1.2) зависит от $2n - r$ произвольных постоянных, определяемых заданием начальных данных. Уравнения (1.2) могут быть получены из принципа Гамильтона в форме Гёльдера

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0, \quad \delta q_i = 0: \ t = t_0, t_1 \tag{1.3}$$

Символ δ означает изохронную вариацию (при $\delta t = 0$), т. е. изменение на виртуальном перемещении, причем виртуальные перемещения $\delta q_i(t) \in C^2$ при связях (1.1) удовлетворяют условиям Четаева [2]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

Действительная траектория, записанная в параметрической форме $q_i = q_i(t)$, удовлетворяющая уравнениям (1.1) и проходящая через две фиксированные точки $P_0(q_i^{\circ})$ и $P_1(q_i^1)$ конфигурационного пространства R_n в фиксированные моменты времени $t_0 < t_1$, соответственно, сравнивается в (1.3) с близкими к ней кривыми $q_i = q_i(t) + \delta q_i$. Эти кривые сравнения также соединяют точки P_0 и P_1, время движения системы между ними по всем кривым сравнения одно и то же и равно $t_1 - t_0$, однако кривые сравнения в случае неинтегрируемых связей уравнениям (1.1), вообще говоря, не удовлетворяют. Вследствие последнего обстоятельства принцип Гамильтона (1.3) не представляет собою для неголономных систем вариационного принципа в смысле вариационного исчисления, а является лишь вариационным уравнением. При этом, как было ранее показано [3], уравнения движения (1.2) не эквивалентны в общем случае уравнениям Эйлера—Лагранжа для вариационной задачи Лагранжа.

В связи с этим отметим ошибочность утверждения [4, 5] об эквивалентности указанных уравнений для случая однородных по $q_i^{\cdot}$ связей (1.1). Из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \right) q_i^{\cdot} = 0$$

в общем случае не следуют, вопреки [4], уравнения

$$\frac{\partial f_l}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}}$$

Обратно, из уравнений (1.2) с учетом (1.4) можно получить принцип (1.3). Для этого уравнения (1.2) надо умножить на δq_i, просуммировать по всем i, учесть (1.4) и проинтегрировать по t в пределах от t_0 до t_1. Следовательно, для общих лагранжевых систем со связями имеется полная эквивалентность [1] между уравнениями (1.2), (1.1) и вариационным уравнением (1.3) при определении виртуальных перемещений равенствами (1.4).

В качестве независимой переменной в уравнениях (1.2), (1.3) принято время t, играющее особую роль в процессах, происходящих в конфигурационном пространстве R_n с течением времени t. Уравнения (1.2) и (1.3) в общем случае инвариантны при точечных преобразованиях лагранжевых координат q_i, однако не инвариантны по отношению к преобразованиям переменной t.

Задачу (1.3) можно рассматривать, очевидно, также в расширенном конфигурационном пространстве R_{n+1}, координатами точек которого являются q_i, t и где движение изображается некоторой кривой $q_i(t)$, заданной теперь в явной, не параметрической форме. При этом интеграл в (1.3) берется по всевозможным близким кривым сравнения, соединяющим две фиксированные точки (q_i°, t_0) и (q_i^1, t_1) пространства R_{n+1}. Как в пространстве R_n, так и в пространстве R_{n+1} число уравнений (1.2), когда за независимую переменную принимается время t, равно числу n лагранжевых координат q_i, и они вместе с уравнениями (1.1) полностью описывают динамику лагранжевых систем как склерономных, так и реономных. При этом определяются также реакции связей (1.1).

В вариационном исчислении часто удобнее задавать кривые сравнения не в явной, а в параметрической форме при произвольном выборе параметра [6]. В динамике голономных систем параметризация позволяет выявить тесную связь между различными вариационными принципами [7]. Эта же задача представляет интерес также для неголономных систем [8].

Итак, будем рассматривать время t наравне с лагранжевыми координатами q_i как равноправные и независимые переменные, представляющие координаты точек пространства R_{n+1}. Эти переменные обозначим x_α $(\alpha = 1, \ldots, n+1)$, причем $x_i = q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x_{n+1} = t$. Все эти переменные могут быть заданы как непрерывные дифференцируемые функции некоторого параметра τ, выбранного в виде произвольной функции $\tau(t) \in C^1$ с $d\tau/dt > 0$ для всех рассматриваемых значений t. Выбор параметра не имеет существенного значения: от параметра τ можно перейти к любому другому параметру σ при условии, что $d\sigma/d\tau > 0$.

Пусть $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$ — некоторые кривые класса $C^2 \in R_{n+1}$, такие, что $x_\alpha' \equiv dx_\alpha/d\tau$ не равны нулю одновременно ни при каких рассматриваемых значениях τ. Эти кривые с некоторыми определенными направлениями на них соответствуют возможным движениям голономной системы без связей (1.1). Однако при наличии таких связей, которые в переменных x_α принимают вид

(1.5) $$F_l(x_\alpha, x_\alpha') = 0 \quad (l = 1, \ldots, r)$$

не всякие кривые $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$ будут описывать возможные движения системы, а лишь те из них, для которых переменные x_α, x_α' удовлетворяют условиям (1.5). Здесь $F_l(x_\alpha, x_\alpha')$ — функции, определенные равенствами

(1.6) $$F_l(x_\alpha, x_\alpha') = f_l\left(x_1, \ldots, x_{n+1}, \frac{x_1'}{x_{n+1}'}, \ldots, \frac{x_n'}{x_{n+1}'}\right) \quad (l = 1, \ldots, r)$$

Эти функции не зависят явно от τ и являются однородными нулевой степени функциями относительно x_α', так что

(1.7) $$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial F_l}{\partial x_\alpha'} x_\alpha' = 0 \quad (l = 1, \ldots, r)$$

Варьируя равенства (1.6), получаем следующие соотношения:

(1.8) $$\frac{\partial F_l}{\partial x_i} = \frac{\partial f_l}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial F_l}{\partial x_i'} = \frac{1}{t'} \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial f_l}{\partial t}, \quad \frac{\partial F_l}{\partial x_{n+1}'} = -\frac{1}{t'} \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}.$$

Примем, что при связях (1.5) виртуальные перемещения Δx_α удовлетворяют условиям типа Четаева

(1.9) $$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial F_l}{\partial x_\alpha'} \Delta x_\alpha = 0 \quad (l = 1, \ldots, r)$$

С учетом (1.8) условия (1.9) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} (\Delta q_i - q_i^{\cdot} \Delta t) = 0 \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.10) с (1.4), получаем соотношения

$$\Delta q_i = \delta q_i + q_i^{\cdot} \Delta t \tag{1.11}$$

означающие, что виртуальные перемещения Δq_i в R_{n+1} представляют собою для пространства R_n полные (асинхронные) вариации.

При условиях (1.10) принцип Гамильтона (1.3) можно, как известно [9], обобщить на асинхронные вариации и представить в виде принципа Фосса

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0, \quad \Delta q_i = \Delta t = 0: \ t = t_0, t_1 \tag{1.12}$$

т. е. принцип Гамильтона справедлив для общих лагранжевых систем со связями и по отношению к асинхронно-варьированным движениям, если они происходят между одними и теми же конфигурациями за один и тот же промежуток времени [1].

Для случая однородных по $q_i^{\cdot}$ связей (1.1), удовлетворяющих согласно теореме Эйлера об однородных функциях условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} = k_l f_l (q, t, q^{\cdot}) = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \tag{1.13}$$

в силу (1.1), соотношения (1.10) принимают вид условий

$$\sum_{i} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} \Delta q_i = 0$$

совпадающих с (1.4); k_l — степень однородности по $q_i^{\cdot}$ функции $f_l (q, t, q^{\cdot})$. Таким образом, для случая однородных по $q_i^{\cdot}$ связей (1.1) класс синхронных вариаций (виртуальных перемещений) δq_i эквивалентен классу асинхронных вариаций.

По заданной функции Лагранжа $L (q, t, q^{\cdot})$ определим однородный лагранжиан в параметрической форме для пространства R_{n+1} равенством [7]

$$\Lambda (x_\alpha, x_\alpha') = L \left(x_1, \ldots, x_{n+1}, \frac{x_1'}{x_{n+1}'}, \ldots, \frac{x_n'}{x_{n+1}'} \right) x_{n+1}' \tag{1.14}$$

Функция $\Lambda (x_\alpha, x_\alpha')$ не зависит явно от τ и является, очевидно, положительно-однородной первой степени относительно x_α', так что

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} x_\alpha' = \Lambda (x_\alpha, x_\alpha') \tag{1.15}$$

Обратно, по заданному однородному лагранжиану $\Lambda (x_\alpha, x_\alpha')$ определяется не стесненная подобным условием функция Лагранжа

$$L (q, t, q^{\cdot}) = \Lambda (q_1, \ldots, q_n, t, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, 1)$$

Таким образом, функции $\Lambda (x_\alpha, x_\alpha')$ и $L (q, t, q^{\cdot})$ эквивалентны одна другой в том смысле, что одна определяет другую. Отсюда вытекает инвариантность элемента лагранжева действия [7]

$$L (q, t, q^{\cdot})\, dt = \Lambda (x_\alpha, x_\alpha')\, d\tau$$

вследствие чего принцип Гамильтона (1.3) принимает при параметризации вид

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Delta\Lambda (x_\alpha, x_\alpha') \, d\tau = 0, \quad \Delta x_\alpha = 0: \ \tau = \tau_0, \tau_1 \tag{1.16}$$

при условиях (1.9). Значение функционала в левой части равенства (1.16 зависит, как известно [6], лишь от кривой $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$ в пространстве R_{n+1}, а не от самих функций $x_\alpha(\tau)$.

Из принципа (1.16) с учетом (1.9) получаем уравнения движения неголономной системы в параметрической форме в пространстве R_{n+1}

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial x_\alpha'} \quad (\alpha = 1, \ldots, n+1) \tag{1.17}$$

где μ_l — неопределенные множители. К уравнениям (1.17) надлежит присоединить уравнения связей (1.5), в результате получим систему $n + 1 + r$ уравнений с таким же числом неизвестных x_α, μ_l. Однако уравнения (1.17), число которых равно числу переменных x_α, не являются независимыми, а связаны, как и в случае голономных систем [7], тождеством

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha' \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - \sum_{l=1}^{r} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial x_\alpha'} \right) \equiv 0$$

очевидным в силу однородности по x_α' функций $\Lambda(x_\alpha, x_\alpha')$, $F_l(x_\alpha, x_\alpha')$ и независимости их от τ.

Последнее из уравнений (1.17) — следствие первых n уравнений (1.17). В самом деле, если умножить первые n этих уравнений на x_i' и просуммировать по $i = 1, \ldots, n$, то с учетом (1.7) и (1.15) получим равенство

$$- x_{n+1}' \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{n+1}'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{n+1}} - \sum_{l} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial x_{n+1}'} \right) = 0$$

откуда при $x_{n+1}' \neq 0$ следует последнее ($\alpha = n + 1$) из уравнений (1.17). Следовательно, число независимых уравнений движения в параметрической форме (1.17) равно числу независимых лагранжевых координат q_i. Общее решение уравнений (1.17), (1.5) зависит от $2n - r$ произвольных постоянных.

Сравним уравнения движения (1.2) и параметрические уравнения (1.17). Варьированием равенства (1.14) легко устанавливаются соотношения

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = t' \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad p_i \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i'} = \frac{\partial L}{\partial q_i^\cdot} \ (i = 1, \ldots, n), \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{n+1}} = t' \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.18}$$

$$p_{n+1} \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{n+1}'} = L - \sum_{i=1}^{n} q_i^\cdot \frac{\partial L}{\partial q_i^\cdot} = -H(q_i, t, q_i^\cdot)$$

Видно, что вектор импульса системы в переменных x_α равен вектору импульса — энергии в переменных q_i.

Если за параметр τ принять время t и учесть соотношения (1.8), (1.18), то уравнения (1.17) примут для $\alpha = 1, \ldots, n$ вид уравнений движения (1.2), а для $\alpha = n + 1$ — вид уравнения энергии

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{l, i} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^\cdot} q_i^\cdot \tag{1.19}$$

являющегося, как известно, следствием уравнений движения (1.2).

Таким образом, и для неголономных систем со связями вида (1.1) динамика, основанная на функции $L(q, t, q^\cdot)$, или, короче, L-динамика, представляет собою форму Λ-динамики, в которой переменная $x_{n+1} = t$ играет и роль координаты пространства R_{n+1} и роль параметра на кривых $x_i = x_i(t)$ [7].

2. Предположим теперь, что для рассматриваемой неголономной системы выполняются условия

$$(2.1)\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F_l}{\partial x'_{n+1}} = -\frac{1}{t'}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial q_i^\cdot} q_i^\cdot = 0$$

означающие, что функции $\Lambda(x_\alpha, x_\alpha')$ и $L(q, t, q^\cdot)$ не зависят явно от переменной $x_{n+1} = t$, а функции $\partial F_l/\partial x'_{n+1}$ уничтожаются в силу уравнений связей (1.5), или, иначе говоря, функции $f_l(q, q^\cdot)$ — однородные по $q_i^\cdot$ функции. Для простоты связи (1.1) предполагаем здесь не зависящими явно от t.

При условиях (2.1) из последнего уравнения (1.17), или из уравнения (1.19), следует интеграл энергии

$$(2.2)\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{n+1}} = -H(q, q^\cdot) = -h = \text{const}$$

Координата $x_{n+1} = t$ является при этом циклической [10], и ей отвечает первый интеграл (2.2). Однако функция $\Lambda(x_i, x_\alpha')$ зависит явно от x'_{n+1}. Эту переменную можно исключить из принципа Гамильтона (1.16) при помощи интеграла энергии (2.2), или используя вытекающее из последнего явное выражение

$$(2.3)\qquad x'_{n+1} = t' = \varphi(q_i, q_i', h)$$

и заменяя им в (1.16) переменную x'_{n+1}, или рассматривая интеграл (2.2) как дополнительное соотношение [10].

Отметим, что разрешение (2.2) в виде (2.3) невозможно лишь в исключительном случае, когда функция $L(q, q^\cdot)$ — сумма однородных функций нулевой и первой степени относительно $q_i^\cdot$ [1].

При первом подходе введем в рассмотрение функцию Рауса

$$(2.4)\qquad R(q_i, q_i', h) = \Lambda - \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{n+1}} x'_{n+1} = \Lambda + h x'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i^\cdot} q_i' t'$$

В правых частях этих эквивалентных равенств следует заменить $x'_{n+1} = t'$ выражением (2.3). Подставляя в (1.16) вместо $\Lambda(x_\alpha, x_\alpha')$ величину $R(q_i, q_i', h) - ht'$, получаем новое вариационное уравнение

$$(2.5)\qquad \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Delta R(q_i, q_i', h)\, d\tau = 0, \quad \Delta q_i = 0: \ \tau = \tau_0, \tau_1$$

выражающее принцип наименьшего действия в форме Якоби, где постоянная h имеет одно и то же фиксированное значение для всех кривых сравнения.

Так, например, в случае обыкновенной неголономной динамической системы, для которой функция Лагранжа

$$(2.6)\qquad L(q, q^\cdot) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, q_i^\cdot q_j^\cdot + \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\, q_i^\cdot + L_0(q)$$

уравнение (2.5) принимает известный вид

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \Delta\left(\sqrt{2(h+L_0)}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}q_i'q_j'} + \sum_{i=1}^{n} a_i q_i'\right) d\tau = 0,$$
$$\Delta q_i = 0: \ \tau = \tau_0, \tau_1$$

Из принципа (2.5) при учете (1.9) и (2.1) следуют дифференциальные уравнения действительной траектории системы

$$(2.7) \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial R}{\partial q_i'} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \sum_l \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial q_i'} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

к которым следует присоединить уравнения связей (1.5). В результате интегрирования уравнений (2.7), (1.5) можно получить параметрические уравнения траектории действительного движения системы в конфигурационном пространстве R_n, не содержащие времени. Зависимость от времени найдется интегрированием уравнения (2.3), которое дополняет таким образом вариационное уравнение (2.5). При учете равенства $R = (L + h)\, t'$ и последующей замене параметра τ на t согласно уравнению (2.3) уравнения (2.7) принимают вид уравнений движения (1.2).

С помощью интеграла энергии (2.2) исходная лагранжева система со связями может быть приведена к лагранжевой системе с меньшим числом степеней свободы, как и в случае голономной системы [11]. В самом деле, примем за параметр τ одну из лагранжевых координат, пусть q_1, и выразим из интеграла энергии (2.2) величину $q_1^{\bullet}$ в виде функции

$$(2.8) \qquad q_1^{\bullet} = \frac{1}{t'} = \psi(q_i, q_s', h)$$

где $q_s' = dq_s/dq_1$, $t' = dt/dq_1$, причем $q_s^{\bullet} = q_1^{\bullet} q_s'$ $(s = 2, \ldots, n)$. Подставляя (2.8) в (2.4) и (1.1), получаем выражение функции Рауса

$$(2.9) \qquad R(q_i, q_s', h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\bullet}} \frac{q_i^{\bullet}}{q_1^{\bullet}}$$

и уравнений связей $f_l(q_i, q_i') = 0$ $(l = 1, \ldots, r)$ в переменных q_i, q_i'. При этом принцип наименьшего действия в форме Якоби (2.5) принимает вид

$$(2.10) \qquad \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} \delta R(q_i, q_s', h)\, dq_1 = 0, \qquad \delta q_s = 0: \ q_1 = q_1^0, q_1^1$$

где q_1^0, q_1^1 — значения переменной q_1 для начального и конечного положений системы, а вариации δq_s удовлетворяют условиям

$$\sum_{s=2}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_s'} \delta q_s = 0 \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

в которые переходят условия (1.4), если учесть, что в рассматриваемом случае следует положить [12] $\delta q_1 = 0$, и иметь в виду условия (1.13) и (1.10).

Из принципа (2.10) получаем уравнения движения системы

$$(2.11) \qquad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial R}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_s} = \sum_l \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_s'} \qquad (s = 2, \ldots, n)$$

представляющие собой обобщение на неголономные системы уравнений Якоби [12] — Уиттекера [11].

В случае обыкновенной неголономной динамической системы с функцией Лагранжа (2.6) функция Рауса (2.9)

$$(2.12)\qquad R(q_i, q_s', h) = 2\sqrt{(h + L_0)G} + \Phi$$

Здесь

$$G(q_i, q_i') = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, q_i' q_j'$$

$$\Phi(q_i, q_i') = \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\, q_i', \ \psi(q_i, q_s', h) = \sqrt{\frac{h+L_0}{G}}$$

Отметим, что уравнение (2.10) имеет вид принципа Гамильтона. Следовательно, принцип наименьшего действия в форме Якоби (2.5) для неголономной системы со связями (1.1) и функцией Лагранжа $L(q, q^{\cdot})$, для которой существует интеграл энергии (2.2), тождествен с принципом Гамильтона (2.10) для приведенной системы со связями $f_l(q_i, q_i') = 0$ и функцией Лагранжа $R(q_i, q_s', h)$ [11].

При втором подходе, когда интеграл (2.2) рассматривается как дополнительное к вариационному уравнению соотношение, заменим в (1.16) функцию $\Lambda(x_\alpha, x_\alpha')$ ее выражением

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} q_i' - ht'$$

следующим из (2.4). В результате получаем новое вариационное уравнение

$$(2.13)\qquad \Delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i'} q_i'\, d\tau = 0, \quad \Delta q_i = 0:\ \tau = \tau_0, \tau_1$$

при дополнительном соотношении (2.2), где постоянная h имеет одно и то же фиксированное значение для всех кривых сравнения. Уравнение (2.13) выражает принцип наименьшего действия в форме Лагранжа, записанный в параметрической форме. Если за параметр τ принять время t, то уравнение (2.13) примет известный вид принципа Лагранжа в пространстве R_n

$$(2.14)\qquad \Delta\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot}\, dt = 0, \quad \Delta q_i = 0:\ t = t_0, t_1$$

при условиях (2.2) и (1.10) с учетом (1.13). Верхний предел t_1 в (2.14) не фиксирован, а зависит от кривой сравнения.

3. Рассмотрим систему материальных точек, находящихся под действием потенциальных сил с силовой функцией $U(r_\nu)$ и стесненных идеальными конечными нестационарными связями

$$(3.1)\qquad \varphi_s(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (s = 1, \ldots, k)$$

и неинтегрируемыми связями, однородными относительно $r_\nu^{\cdot} = dr_\nu/dt$. Здесь $\mathbf{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) — радиусы-векторы точек системы относительно начала инерциальной системы координат, которые введением лагранжевых координат q_i ($i = 1, \ldots, n = 3N - k$) выражаются в виде функций

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t) \ (\nu = 1, \ldots, N)$$

При этом связи (3.1) тождественно удовлетворяются, а неинтегрируемые связи принимают вид (1.1). Функция Лагранжа $L(q, t, q^{\cdot}) = T + U$, где $T(q, t, q^{\cdot})$ — кинетическая энергия, $U(q, t)$ — силовая функция, имеет в данном случае вид (2.6), т. е. $L = L_2 + L_1 + L_0$, причем

$$L_2 = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}, \quad L_1 = T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i^{\cdot}, \quad L_0 = T_0 + U$$

Уравнения движения (1.2), (1.1) приводят к уравнению вида (1.19), выражающему теорему об обобщенной энергии

$$d(T_2 - T_0 - U) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{l,i} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q^{\cdot}} dq_i \tag{3.2}$$

так как в рассматриваемом случае

$$H(q, t, q^{\cdot}) = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 - U$$

С другой стороны, согласно общей теореме о кинетической энергии в дифференциальной форме

$$dT = dU + \sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} \tag{3.3}$$

где R_{ν} — реакции связей (3.1). Очевидно, в случае нестационарных связей (3.1) уравнение (3.2) отличается от (3.3), т. е. одни только уравнения (1.2), (1.1) не позволяют получить общую теорему о кинетической энергии. И это понятно, так как уравнения (1.2) не содержат реакций связей (3.1), которые вносят вклад в изменение энергии согласно (3.3).

Если перейти к координатам q_i и проинтегрировать по времени обе части уравнения (3.3), то получим известную теорему об энергии в конечной форме

$$T(q, t, q^{\cdot}) - U(q, t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot \mathbf{d}r_{\nu} + \text{const} \tag{3.4}$$

Интеграл в правой части (3.4) вообще может быть найден только после интегрирования системы дифференциальных уравнений движения, поэтому равенство (3.4) вообще не имеет другого значения, кроме представляемой им зависимости между энергией и работой реакций связей [13]. Однако в случае, когда идеальные связи (3.1) не зависят явно от времени, $\sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} = 0$ и уравнение (3.4) становится первым интегралом

$$T(q, q^{\cdot}) - U(q) = \text{const} \tag{3.5}$$

который следует также из (3.2), так как при этом $T = T_2$, $\partial L / \partial t = 0$, $\sum_{i} \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} = 0$.

При нестационарных связях (3.1) возможны случаи, когда функция L не зависит явно от времени; в этих случаях, если $\sum \frac{\partial f_l}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot} = 0$, уравнение (3.2) дает первый интеграл вида (2.2)

$$T_2(q, q^{\cdot}) - T_0(q) - U(q) = h$$

который не следует, однако, непосредственно из уравнения (3.3).

Сопоставляя (3.2) и (3.3), находим выражение для работы реакций связей (3.1) на действительном перемещении системы

(3.6) $$\sum \mathbf{R}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = d(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{l,i} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^\cdot} dq_i$$

ранее полученное [14] для случая линейных однородных связей (1.1). Так как связи (3.1) предполагаются идеальными, то

$$\sum_\nu \mathbf{R}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_\nu \mathbf{R}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} dt = R_0\, dt$$

где R_0 — обобщенная реакция нестационарных связей (3.1), отвечающая координате $t = q_0$ и представляющая собою мощность нестационарных связей (3.1). Если учесть, что $q_0^\cdot = 1$, то кинетическую энергию можно представить в виде квадратичной формы [15]

$$2T = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} a_{\alpha\beta}(q)\, q_\alpha^\cdot q_\beta^\cdot$$

где $a_{i0} = a_i(q)$, $a_{00} = 2T_0$, и получить равенство

$$\frac{\partial T}{\partial q_0^\cdot} = \sum_{i=1}^{n} a_{i0} q_i^\cdot + a_{00} q_0^\cdot = T_1 + 2T_0$$

Деля на dt обе части равенства (3.6), получаем уравнение типа уравнения Лагранжа для координаты $t = q_0$ неголономной системы

(3.7) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_0^\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = R_0 - \sum_{l,i} \mu_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i^\cdot} q_i^\cdot$$

Это уравнение можно вывести независимо от (3.2), (3.3), проектируя уравнение Ньютона на направление $\partial r_\nu/\partial t$ и суммируя по ν. Именно так уравнение вида (3.7) получено для голономной системы в работе [15].

Уравнение (3.7) может служить для определения мощности R_0 реакций нестационарных связей (3.1) и, когда такая связь одна, позволяет определить ее реакцию после интегрирования уравнений (1.2), (1.1). Отметим, что в работе [16] также предложено определение реакций нестационарных связей путем проектирования на направление вектора $\partial r_\nu/\partial t$.

Из уравнений Лагранжа для q_i и t автор [15] получил уравнение вида (3.4), которые называет интегралом энергии. Однако оно содержит неизвестную априори величину R_0 и не может, как отмечено выше, служить первым интегралом.

Добавление уравнения (3.7), выведенного независимо от (3.2) и (3.3), к уравнениям (1.2), (1.1) полезно, однако, не только для определения R_0, но и для получения из этих уравнений теоремы о кинетической энергии (3.3), для чего достаточно сложить уравнения (3.2) и (3.6), или для получения из (3.3) равенства (3.2) вычитанием из (3.3) уравнения (3.6), эквивалентного уравнению (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
2. *Четаев Н. Г.* О принципе Гаусса. Казань: Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те, 1932—1933, т. 6, сер. 3, с. 68—71.
3. *Румянцев В. В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 387—399.

4. *Weber R. W.* Kanonische Theorie nichtholonomer systeme. Peter Lang — Bern, 1981, 95 p.
5. *Weber R. W.* On hamiltonian systems with nonholonomic constraints. Proceedings of the IUTAM—ISIMM symposium. Modern developments in analytical mechanics. Acad. Sci. of Turin. 1983, v. 1, p. 457—461.
6. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
7. *Синг Д. Л.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963. 448 с.
8. *Rumjantsev V. V.* On some problems of analytical dynamics of nonholonomic systems. Proceedings of the IUTAM—ISIMM symposium. Modern developments in analytical mechanics. Acad. Sci. of Turin. 1983, v. 2, p. 697—716.
9. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
10. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М. Мир, 1965. 408 с.
11. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
12. *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.— М.: Гостехиздат, 1936. 270 с.
13. *Ляпунов А. М.* Лекции по теоретической механике. Киев: Наук. думка, 1982. 632 с.
14. *Румянцев В. В.* К теореме о кинетической энергии.— Вестн. МГУ. Матем. механ., 1967, № 3, с. 104—105.
15. *Вуйичич В. А.* Об интеграле энергии систем, стесненных нестационарными связями. Теоретич. и прикл. механика, т. 6, Београд: 1980, с. 133—143.
16. *Сильде О., Рельвик Х.* Уравнение возможной мощности в аналитической механике.— Изв. АН ЭССР, Физика. Математика, 1983, т. 32, № 4, с. 398—409.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1984