3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
4. *Traugott S. C.* Non-diffusive effects in the radiative propagation of a thermal pulse.— Phys. Fluids, 1970, v. 13, No. 9, p. 2242—2252.
5. *Коробейников В. П.* О подобии процессов переноса энергии в нестационарных задачах высокотемпературных течений газа.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 188—193.

Москва

Поступила в редакцию 1.IV.1983

УДК 621.372 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.

Рассматривается устойчивость по первому приближению стационарных бегущих волн для уравнения Клейна — Гордона. Соответствующие уравнения в вариациях приводятся к виду уравнений с особыми точками. Выделены случаи, когда уравнения в вариациях представляют собой уравнения Ламе. В этих случаях удается довести до конца анализ устойчивости по первому приближению.

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = p\,(\varphi)$$

где $p\,(\varphi)$ — аналитическая функция. Стационарные волны — это частные решения вида $\varphi = \Phi\,(\xi)$, $\xi = x - ut$ (предполагаем, что функция $\Phi\,(\xi)$ ограничена на бесконечности), которые описываются уравнением

$$(1.1)\qquad (1 - u^2)\,\Phi_{\xi\xi} = p\,(\varphi)\ (u \neq 1)$$

с первым аналитическим интегралом

$$(1.2)\qquad {}^1/_2\,(1 - u^2)\,\Phi_\xi{}^2 = F + P\,(\Phi);\quad F = \mathrm{const},\quad P\,(\Phi) = \int\limits_0^\Phi p\,(z)\,dz$$

Уравнение в вариациях (в переменных ξ, t) для стационарной волны имеет вид

$$y_{\xi\xi}\,(1 - u^2) + 2y_{\xi t}u - y_{tt} = p_\Phi\,(\Phi)\,y$$

После преобразования Лапласа по t получим уравнение для изображений $V\,(\xi, s)$, s — параметр преобразования. Вводя замену $V = e^{A\xi}W$, где $A = -su/(1 - u^2)$, запишем уравнение для определения функции W с переменными по ξ коэффициентами

$$(1.3)\qquad 2W_{\xi\xi}\,(1 - u^2) + W\,(B - p_\Phi\,(\Phi)) = 0,\ B = s^2/(u^2 - 1)$$

Рассмотрим линейную устойчивость по t стационарной волны в классе возмущений, ограниченных по ξ [1]. Тогда существование таких возмущений при $s^2 > 0$ указывает на неустойчивость волны.

В дальнейшем целесообразно использовать новые переменные, связанные с рассматриваемым решением. Если в качестве независимого переменного вместо ξ выбрано Φ, то вместо уравнения (1.3) получим, используя соотношения (1.1) и (1.2), уравнение

$$(1.4)\qquad 2W_{\Phi\Phi}\,(F + P\,(\Phi)) + W_\Phi p\,(\Phi) + W\,(B - p_\Phi\,(\Phi)) = 0$$

Выбирая в качестве независимого переменного $z = \Phi^2$, получим уравнение

$$(1.5)\qquad 8W_{zz}z\,(F + P\,(\sqrt{z})) + W_z\,[4\,(F + P\,(\sqrt{z})) + 2\sqrt{z}p\,(\sqrt{z})] + W\,(B - p_\Phi\,(\sqrt{z})) = 0$$

(это уравнение целесообразно использовать только для четных функций $P\,(\Phi)$).

Наконец, если в качестве независимого переменного выбрана кинетическая энергия стационарной волны $K = F + P\,(\Phi)$, то уравнение в вариациях приводится к виду

$$(1.6)\qquad 2W_{kk}Kp^2\,(\Phi\,(K)) + W_k\,[2Kp_\Phi\,(\Phi\,(K)) + p^2\,(\Phi\,(K))] + W\,[B - p_\Phi\,(\Phi\,(K))] = 0$$

Выделим некоторые классы функций $P(\Phi)$, для которых полученные уравнения оказываются уравнениями Ламе. В этом случае удается определить области ограниченности и неограниченности решений уравнений в вариациях

а) $$P = D_1 \sin \Phi - D_2 \cos \Phi, \; p = D_1 \cos \Phi + D_2 \sin \Phi$$

(синус-уравнение Гордона).

Здесь следует использовать уравнение (1.6), которое приводится к уравнению Ламе в стандартной форме [2]

$$W_{kk} + \frac{1}{2} W_k \left(\frac{1}{K - \gamma_1} + \frac{1}{K - \gamma_2} + \frac{1}{K - \gamma_3} \right) + \tag{1.7}$$
$$+ W \frac{H - n(n+1) K}{4 (K - \gamma_1)(K - \gamma_2)(K - \gamma_3)} = 0$$
$$\gamma_1 = 0, \; \gamma_{2,3} = F \pm 1, \; H = 2(F - B), \; n = 1$$

Последнее равенство говорит о том, что на плоскости параметров (F, B) существует одна конечная и одна бесконечная область неограниченности решений [2].

б) $$P = D_1 \operatorname{sh} \Phi + D_2 \operatorname{ch} \Phi$$

Вновь используя уравнение (1.6), приходим к уравнению (1.7), где $\gamma_1 = 0, \gamma_{2,3} = F \pm 1, H = 2(F + B), n = 1$.

в) $$P = \alpha_2 \Phi^2/2 + \alpha_4 \Phi^4/4$$

Здесь целесообразно использовать уравнение в вариациях в форме (1.5). В данном случае оно также приводится к уравнению Ламе вида (1.7), где

$$z \equiv K, \; \gamma_1 = 0, \; \gamma_{2,3} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_4} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\right)^2 - 4 \frac{F}{\alpha_4}}, \quad H = 2 \frac{B - \alpha_2}{\alpha_4}, \quad n = 2$$

Последнее равенство указывает на то, что в пространстве параметров существуют две конечные и одна бесконечная область неограниченности решений.

г) $$P = (\Phi - \gamma_1)(\Phi - \gamma_2)(\Phi - \gamma_3) - F$$

В этом случае следует использовать уравнение (1.4), которое приводится к стандартной форме (1.7) при

$$\Phi \equiv K, \; H = B + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \; n = 2$$

Заметим, что здесь указаны все случаи, когда уравнение в вариациях для стационарных волн уравнения Клейна — Гордона приводятся к форме уравнение Ламе.

2. Области ограниченности и неограниченности решений уравнений Ламе при $n = 1, 2$ известны [3], что позволяет исследовать устойчивость стационарных волн по времени. Границы соответствующих областей изображены для $n = 1$ на фиг. 1 и для $n = 2$ на фиг. 2. Здесь $\lambda = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$, $\mu = (H - n(n+1) e_3)/(e_1 - e_3)$ (e_1, e_2, e_3 соответствуют введенным ранее $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$), которые упорядочены таким образом, чтобы выполнялись неравенства $e_1 > e_2 > e_3$). Области ограниченности заштрихованы. Кривые *1—5* на фиг. 2 описываются уравнениями

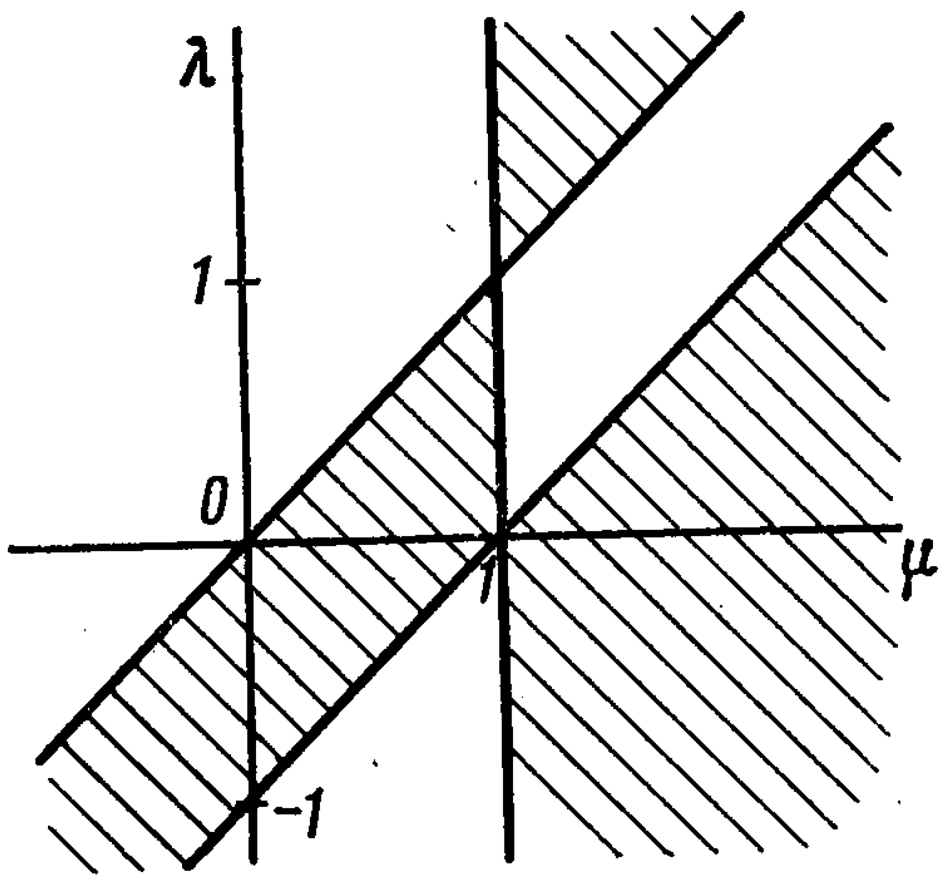
1) $\mu = \mu^+(\lambda)$, 2) $\mu = 4 + \lambda$, 3) $\mu = 1 + 4\lambda$, 4) $\mu = 1 + \lambda$, 5) $\mu = \mu^-(\lambda)$
$(\mu^\pm(\lambda) = 2(1 + \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1}))$

Устойчивость по времени анализируется следующим образом. Для каждого решения в форме стационарной волны выясняется, существуют ли ограниченные решения уравнения в вариациях для $s^2 > 0$, что указывает на неустойчивость. Если же таких решений при $s^2 > 0$ нет, то получаем устойчивость по первому приближению.

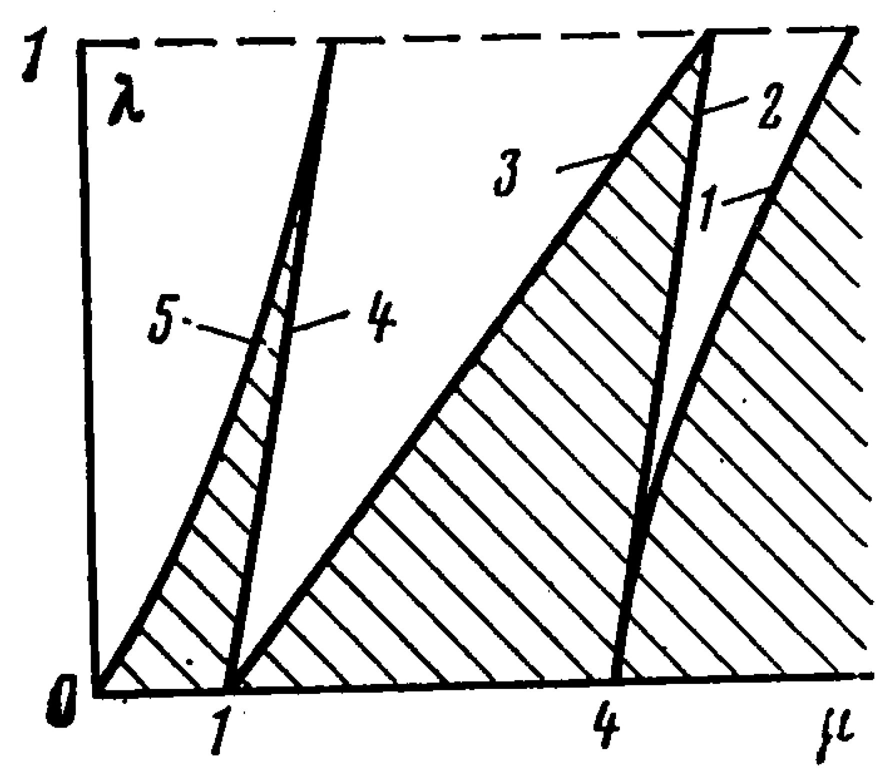
В качестве примера проведем соответствующий анализ для синус-уравнения Гордона — случай а), где для простоты положено $D_1 = 0$, $D_2 = 1$. Области ограниченности и неограниченности, изображенные на фиг. 1, представлены на фиг. 3 в параметрах B, F; $B^\pm = {}^1/_2 (F \pm 1)$.

Выделим следующие классы решений исходного уравнения [4]:
периодические волны при $|F| < 1$, $u^2 - 1 > 0$ или $u^2 - 1 < 0$;
спиральные волны при $F < -1$, $u^2 - 1 > 0$;
спиральные волны при $F > 1$, $u^2 - 1 < 0$.

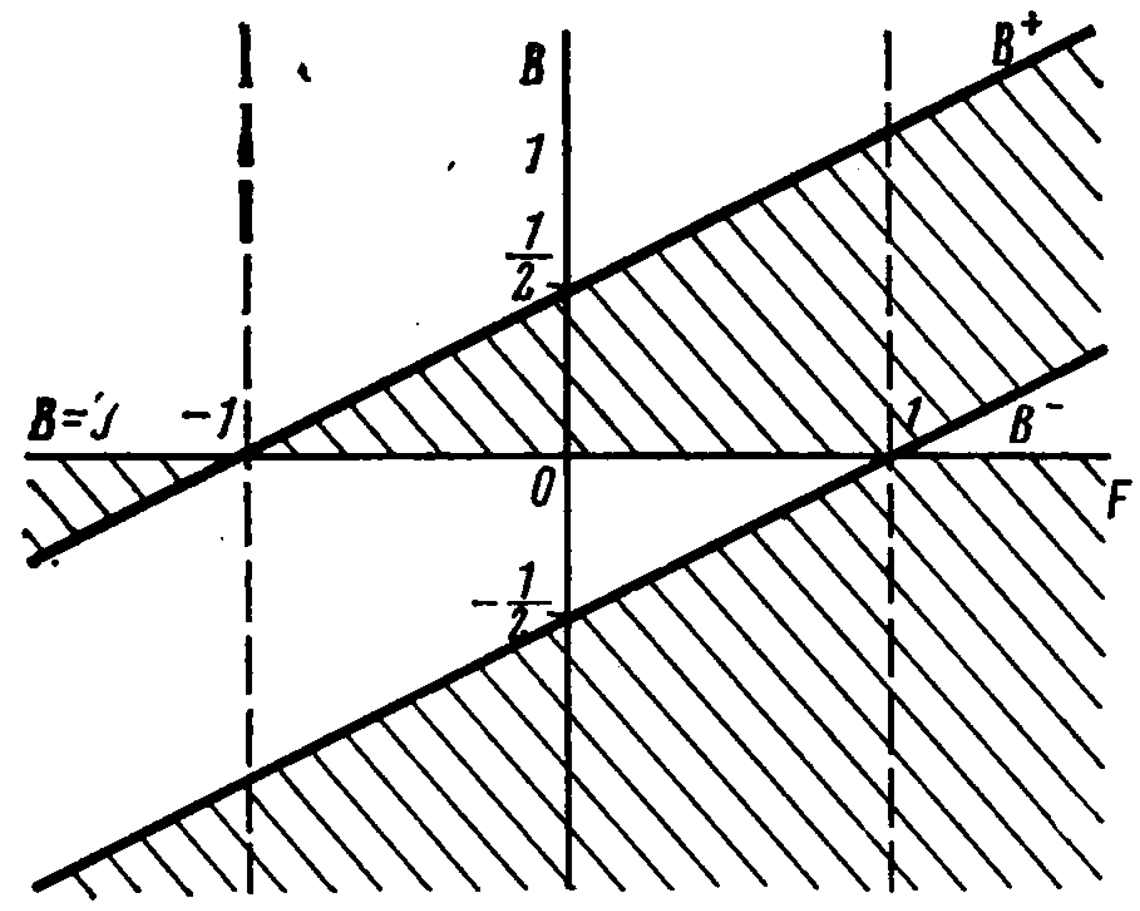
Очевидно (фиг. 3), что при $F > -1$ существуют ограниченные решения как при $B > 0$, так и при $B < 0$ (при этом $s^2 \leqslant 0$ и $s^2 > 0$), что указывает на неустойчивость периодических волн ($|F| < 1$) и спиральных волн ($F > 1$, $u^2 - 1 < 0$) в классе возмущений, ограниченных на бесконечности.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для спиральных волн ($F < -1$, $u^2 - 1 > 0$) ограниченные решения имеются только при $B < 0$ ($s^2 \leqslant 0$, поскольку $u^2 - 1 > 0$), что указывает на устойчивость по первому приближению.

В качестве другого примера рассмотрим случай в). Условия ограниченности решений уравнений в вариациях (фиг. 2) записываются таким образом:

$$\mu^-(\lambda) < \mu < 1 + \lambda,\ 1 + 4\lambda < \mu < 4 + \lambda,\ \mu^+(\lambda) < \mu \tag{2.1}$$

Пусть $F = 0$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 1$. Тогда

$$e_1 = e_2 = 0,\ e_3 = -2,\ \lambda = 1,\ \mu = B + 5$$

Условия ограниченности (2.1) приводят к неравенству $B > 1$, или $s^2 > u^2 - 1$ при $u^2 - 1 > 0$ и $s^2 < u^2 - 1$ при $u^2 - 1 < 0$. Очевидно, что при $u^2 - 1 > 0$ может быть выполнено условие $s^2 > 0$ (неустойчивость), устойчиво же решение при $u^2 - 1 < 0$.

Пусть $F = -{}^3/_{16}$, $\alpha_2 = -\alpha_4 = 1$. Тогда

$$e_1 = {}^3/_2,\ e_2 = {}^1/_2,\ e_3 = 0,\ \lambda = {}^1/_3,\ \mu = -{}^4/_3 B + {}^1/_3$$

Условия ограниченности (2.1) приводят к системе неравенств $0{,}9 < -{}^4/_3 B < 1$; $2 < -{}^4/_3 B < 4$; $4{,}1 < -{}^4/_3 B$, откуда следует, что $B < 0$. Теперь ясно, что $s^2 > 0$ при $u^2 - 1 < 0$ (неустойчивость) и $s^2 < 0$ при $u^2 - 1 > 0$ (устойчивость).

Пусть, наконец $\alpha_2 = -\alpha_4 = 4$, $F = 3$. Тогда $e_1 = 3$, $e_2 = 0$, $e_3 = -1$, $\lambda = {}^1/_4$, $\mu = -B/8 + 2$.

Из условий (2.1) получим систему неравенств

$$6 < B < 10{,}4;\ -20 < B < 0;\ -18{,}4 < B$$

Поскольку B может принимать и положительные, и отрицательные значения, очевидно, что может быть $s^2 > 0$ и при $u^2 - 1 < 0$, и при $u^2 - 1 > 0$, что говорит о неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 300 с.
3. *Magnus W., Winkler S.* Hill's equations. N. Y.: Interscience Publ., 1966. 127 p.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
18.X.1982