УДК 533.6.011 : 533.9

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Путятин Б. В.

Приводится точное решение одномерной плоской задачи о точечном взрыве в излучающей неподвижной среде. Зависимости коэффициента поглощения и функции источника излучения от внутренней энергии и частоты имеют специальный вид, допускающий автомодельное решение.

Задача о точечном взрыве в излучающем газе при учете движения рассмотрена в [1, 2].

Уравнения, описывающие перенос тепла излучением в неподвижной среде в одномерном плоском случае, имеют вид

$$\mu\frac{\partial I}{\partial x}+k(I-B)=0,\quad B=B(e,\nu),\quad k=k(e,\nu) \tag{1}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad q=2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1 I\mu\,d\mu\,d\nu$$

Здесь e — внутренняя энергия единицы объема, ν — частота излучения, I — интенсивность излучения, k — коэффициент поглощения, B — функция источника излучения, q — поток излучения, μ — косинус угла между направлением светового луча и осью x, t — время.

Рассмотрим задачу о точечном взрыве, т. е. будем искать решение системы (1), удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям:

$$t=0:\ x>0,\ e=0;\quad 2\int\limits_0^\infty e\,dx=E_0 \tag{2}$$

$$t>0:\ x=0,\ \infty;\ q=0$$

Граничные условия обеспечивают постоянство суммарной энергии E_0, которая считается заданной величиной.

Пусть зависимости k и B от e и ν имеют вид

$$k=k_0\varphi(\nu)\,e;\quad B=B_0\psi(\nu)\,e;\quad k_0,\ B_0=\mathrm{const} \tag{3}$$

В этом случае сформулированная задача автомодельна [2—5]. Аналогичная задача в диффузионном приближении для серой среды была рассмотрена в [4], однако получающаяся в этом случае система автомодельных уравнений до конца не интегрируется. В случае зависимостей (3) удается получить точное решение как для диффузионного приближения, так и для точного уравнения переноса излучения (1).

Заметим, что зависимости (3) имеют физический смысл. Согласно закону Кирхгофа, B — функция излучения абсолютно черного тела

$$B=\frac{2h\nu^3}{c^2\left[\exp\left(h\nu/KT\right)\right)-1]}$$

где h — постоянная Планка, K — постоянная Больцмана, c — скорость света, T — температура. Если температура достаточно высока, так что $h\nu/(KT)\ll 1$, то $B\approx\approx 2\nu^2KT/c^2$ (закон Релея — Джинса), что согласуется с (3).

Введем автомодельные переменные

$$\lambda=x/(B_0t),\ E(\lambda)=ek_0B_0t,\ J(\lambda,\mu,\nu)=Ik_0t$$

Исходная система примет вид

$$Q'=E+E'\lambda,\quad Q=2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1 J\mu\,d\mu\,d\nu,\ \mu\frac{\partial J}{\partial\lambda}+\varphi E(J-\psi E)=0 \tag{4}$$

Ее решение должно удовлетворять условиям, вытекающим из (2),

$$E(\infty)=0,\quad Q(0)=Q(\infty)=0,\quad \int\limits_0^\infty E\,d\lambda=\frac{k_0E_0}{2}=\tau_1$$

Интегрирование первого уравнения в (4) с учетом условия в центре $Q(0)=0$ приводит к соотношению $Q=E\lambda$. Введем новую переменную

$$\tau=\int\limits_0^\lambda E\,d\lambda,\quad 0\leqslant\tau\leqslant\tau_1$$

Окончательно из (4) имеем

$$E=\frac{dQ}{d\tau}E-Q\frac{dE}{d\tau},\quad \mu\frac{\partial J}{\partial\tau}+\varphi(J-\psi E)=0 \tag{5}$$

$$E(\tau_1)=0,\quad Q(0)=Q(\tau_1)=0,\quad Q=2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1 J\mu\,d\mu\,d\nu$$

Если не прибегать к угловому усреднению уравнения переноса, то интегральных краевых условий $Q(0)=Q(\tau_1)=0$, обеспечивающих сохранение энергии взрыва, вообще говоря, недостаточно для выделения единственного решения. Пусть на границах $\tau=0$ и $\tau=\tau_1$ выполнено условие зеркального отражения $J(\mu)=J(-\mu)$. Тогда искомое решение имеет вид

$$E=A(1+\cos\alpha),\quad Q=4\pi AC\sin\alpha,\quad \lambda=\frac{Q}{E} \tag{6}$$

$$J=A\psi\left(1+\frac{\tau_2{}^2\cos\alpha+\tau_2\mu\sin\alpha}{\tau_2{}^2+\mu^2}\right),\quad \tau_2=\frac{\tau_1\varphi}{\pi} \tag{7}$$

$$\alpha=\frac{\tau\pi}{\tau_1},\quad A=\frac{\tau_1}{4\pi^2C},\quad C=\int\limits_0^\infty \psi\tau_2(1-\tau_2\operatorname{Arcctg}\tau_2)\,d\nu$$

Исключая α, имеем окончательно

$$E=2A\left[1+\left(\frac{\lambda}{4\pi C}\right)^2\right]^{-1} \tag{8}$$

В диффузионном приближении вместо (5) имеем

$$E=Q'E-QE',\quad Q=\int\limits_0^\infty V\,d\nu,\quad U=2\pi\int\limits_{-1}^1 J\,d\mu$$

$$V'+\varphi(U-4\pi\psi E)=0,\quad U'+3\varphi V=0$$

$$E(\tau_1)=Q(0)=Q(\tau_1)=0$$

Решение получаем в том же функциональном виде (6), где величины A, C заменены на A_1, C_1 и

$$U=4\pi A_1\psi\left(1+\frac{3\tau_2{}^2\cos\alpha}{3\tau_2{}^2+1}\right),\quad V=4\pi A_1\psi\,\frac{\tau_2\sin\alpha}{3\tau_2{}^2+1}$$

$$A_1=\frac{\tau_1}{4\pi^2C_1},\quad C_1=\int\limits_0^\infty\psi\,\frac{\tau_2}{3\tau_2{}^2+1}\,d\nu$$

Опять исключая α, приходим к выражению (8) при замене A, C на A_1, C_1. Можно показать, что диффузионное приближение дает решение, близкое к точному, так как $C\approx C_1$.

Заметим, что характер автомодельности и вид полученного решения (8) аналогичны решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial e}{\partial x}\right),\quad \varkappa=\frac{\varkappa_0}{e},\quad \varkappa_0=\mathrm{const}$$

Анализ показывает, что можно добиться полного совпадения решений, положив $\varkappa_0=2B_0E_0C$.

Автор благодарит В. П. Коробейникова за ценные советы и обсуждение заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Путятин Б. В.* О начальной стадии точечного взрыва в излучающем газе.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 3, с. 75—82.
2. *Брушлинский Д. Н., Коробейников В. П.* Автомодельная задача о сильном взрыве с учетом переноса тепла излучением.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 5, с. 1060—1063.

3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
4. *Traugott S. C.* Non-diffusive effects in the radiative propagation of a thermal pulse.— Phys. Fluids, 1970, v. 13, No. 9, p. 2242—2252.
5. *Коробейников В. П.* О подобии процессов переноса энергии в нестационарных задачах высокотемпературных течений газа.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 188—193.

Москва

Поступила в редакцию
1.IV.1983

УДК 621.372 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.

Рассматривается устойчивость по первому приближению стационарных бегущих волн для уравнения Клейна — Гордона. Соответствующие уравнения в вариациях приводятся к виду уравнений с особыми точками. Выделены случаи, когда уравнения в вариациях представляют собой уравнения Ламе. В этих случаях удается довести до конца анализ устойчивости по первому приближению.

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = p(\varphi)$$

где $p(\varphi)$ — аналитическая функция. Стационарные волны — это частные решения вида $\varphi = \Phi(\xi)$, $\xi = x - ut$ (предполагаем, что функция $\Phi(\xi)$ ограничена на бесконечности), которые описываются уравнением

$$(1 - u^2)\Phi_{\xi\xi} = p(\varphi)\ (u \neq 1) \tag{1.1}$$

с первым аналитическим интегралом

$${}^1/_2(1-u^2)\Phi_\xi^2 = F + P(\Phi);\quad F = \mathrm{const},\quad P(\Phi) = \int\limits_0^\Phi p(z)dz \tag{1.2}$$

Уравнение в вариациях (в переменных ξ, t) для стационарной волны имеет вид

$$y_{\xi\xi}(1-u^2) + 2y_{\xi t}u - y_{tt} = p_\Phi(\Phi)y$$

После преобразования Лапласа по t получим уравнение для изображений $V(\xi, s)$, s — параметр преобразования. Вводя замену $V = e^{A\xi}W$, где $A = -su/(1-u^2)$, запишем уравнение для определения функции W с переменными по ξ коэффициентами

$$2W_{\xi\xi}(1-u^2) + W(B - p_\Phi(\Phi)) = 0,\ B = s^2/(u^2-1) \tag{1.3}$$

Рассмотрим линейную устойчивость по t стационарной волны в классе возмущений, ограниченных по ξ [1]. Тогда существование таких возмущений при $s^2 > 0$ указывает на неустойчивость волны.

В дальнейшем целесообразно использовать новые переменные, связанные с рассматриваемым решением. Если в качестве независимого переменного вместо ξ выбрано Φ, то вместо уравнения (1.3) получим, используя соотношения (1.1) и (1.2), уравнение

$$2W_{\Phi\Phi}(F + P(\Phi)) + W_\Phi p(\Phi) + W(B - p_\Phi(\Phi)) = 0 \tag{1.4}$$

Выбирая в качестве независимого переменного $z = \Phi^2$, получим уравнение

$$8W_{zz}z(F + P(\sqrt{z})) + W_z[4(F + P(\sqrt{z})) + 2\sqrt{z}p(\sqrt{z})] + W(B - p_\Phi(\sqrt{z})) = 0 \tag{1.5}$$

(это уравнение целесообразно использовать только для четных функций $P(\Phi)$).

Наконец, если в качестве независимого переменного выбрана кинетическая энергия стационарной волны $K = F + P(\Phi)$, то уравнение в вариациях приводится к виду

$$2W_{kk}Kp^2(\Phi(K)) + W_k[2Kp_\Phi(\Phi(K)) + p^2(\Phi(K))] + W[B - p_\Phi(\Phi(K))] = 0 \tag{1.6}$$