ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.* Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 944—948.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. *Еругин Н. П.* Качественные методы в теории устойчивости.— ПММ, 1955, т. 19, вып. 5, с. 599—616.
5. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
6. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.

Киев

Поступила в редакцию
10.III.1983

УДК 532.527

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Брутян М. А., Крапивский П. Л.

Развивается гамильтонов формализм в задаче о движении системы соосных вихревых колец в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Определяется дополнительный инвариант движения, являющийся импульсом окружающей жидкости. Для случая двух вихревых колец уравнения движения оказываются вполне интегрируемыми, что объясняет чехарду вихревых колец, качественно описанную Гельмгольцем. Оценивается влияние вязкости на начальную стадию движения.

1. Гамильтонова формулировка. Задача о движении вихревых колец, изучавшаяся еще в прошлом веке,— простейший классический пример пространственного вихревого течения. Теоретический анализ даже этого простейшего случая возможен лишь, когда радиус вихревого кольца значительно больше радиуса вихревого ядра. Рассмотрим систему соосных вихревых колец, движущихся в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Введем цилиндрическую систему координат r, z, θ, где ось z направлена вдоль общей оси вихревых колец. Пусть Γ_α — циркуляция вихревого кольца с номером α, $\alpha = 1, \ldots, N$, R_α — радиус кольца, a_α — радиус вихревого ядра, z_α — продольная координата вихря. Поле скоростей вне вихревых колец ищем в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{1.1}$$

Из соображений симметрии $\mathbf{A} = A(r, z)\,\mathbf{e}_\theta$. Тогда из (1.1) получаем

$$v_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA)}{\partial r} \tag{1.2}$$

После подстановки (1.2) в уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha \delta(r - R_\alpha)\,\delta(z - z_\alpha)$$

приходим к следующему уравнению для векторного потенциала A:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha \delta(r - R_\alpha)\,\delta(z - z_\alpha) \tag{1.3}$$

Правая часть (1.3) получается в предположении $a/R \ll 1$ и выражает тот факт, что циркуляция по произвольному замкнутому контуру, охватывающему ядро вихря с номером α, равна Γ_α. Поскольку уравнение (1.3) линейно, его решение дается суммой решений для изолированных вихревых колец и имеет вид

$$A(r, z) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha R_\alpha \int_0^\infty J_1(kR_\alpha)\,J_1(kr)\,e^{-k|z-z_\alpha|}\,dk \tag{1.4}$$

где J_1 — функция Бесселя. Подставляя (1.4) в (1.2), получаем выражения для компонент скоростей движения вихрей

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \Gamma_\beta R_\beta B_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}(z_\alpha - z_\beta) \tag{1.5}$$

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = \frac{dz_\alpha{}^\circ}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \Gamma_\beta R_\beta C_{\alpha\beta} + \frac{1}{2R_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \Gamma_\beta R_\beta D_{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

Здесь

$$B_{\alpha\beta} = \int_0^\infty k J_1(kR_\alpha)\, J_1(kR_\beta)\, e^{-k|z_\alpha - z_\beta|}\, dk$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_0^\infty k J_1(kR_\beta)\, J_1'(kR_\alpha)\, e^{-k|z_\alpha - z_\beta|}\, dk$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_0^\infty J_1(kR_\alpha)\, J_1(kR_\beta)\, e^{-k|z_\alpha - z_\beta|}\, /dR$$

Штрих в знаке суммы означает, что член с номером α пропущен. Выражения для $B_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$ могут быть записаны через эллиптические интегралы. Все слагаемые в формулах (1.5) и (1.6), кроме $dz_\alpha{}^\circ/dt$, связаны с действием на вихревое кольцо с номером α всех остальных вихрей.

При формальном дифференцировании в (1.2) появляются особенности, связанные с действием вихревого кольца самого на себя. Для их устранения, как известно, требуется ввести некоторую модель вихревого ядра. В результате, с точностью до членов $O\,[(a/R^2)\ln(R/a)]$, которыми пренебрегаем вследствие исходного предположения $a/R \ll 1$, получаем следующее выражение для самоиндуцированной скорости вихревого кольца:

$$\frac{dz_\alpha{}^\circ}{dt} = \frac{\Gamma_\alpha}{4\pi R_\alpha} \left[\ln\left(\frac{8R_\alpha}{a_\alpha}\right) - E\right]$$

Постоянная E зависит от характера распределения завихренности внутри вихревого ядра (подробности можно найти в [1]).

Например, в случае однородной завихренности (модель Кельвина) $E = 0{,}25$, а в случае полого вихря (модель Хикса) $E = 0{,}5$. Вследствие теоремы Кельвина о циркуляции величины R и a оказываются связанными: в первом случае $Ra^2 = \text{const}$, а во втором $Ra = \text{const}$. Поэтому движение рассматриваемой системы из N вихревых колец зависит только от $2N$ переменных z_α и R_α и не зависит от a_α.

Перейдем к гамильтоновой формулировке уравнений (1.5), (1.6). Из (1.5) находим первый интеграл

$$P = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha R_\alpha{}^2 = \text{const} \tag{1.7}$$

Известно, что $P = \Gamma R^2$ с точностью до постоянного множителя является импульсом жидкости, окружающей вихревое кольцо. Равенство (1.7) является законом сохранения импульса рассматриваемой системы.

Уравнение (1.5) естественно представить в виде

$$\Gamma_\alpha \frac{dR_\alpha{}^2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_\alpha} \tag{1.8}$$

Действительно, исходная система вихревых колец инвариантна относительно сдвига вдоль оси z, и если гамильтониан H также будет обладать таким свойством, то из (1.8) автоматически будет следовать инвариант (1.7). Сравнивая уравнения (1.5) и (1.8), находим

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{N}{}' \Gamma_\alpha \Gamma_\beta R_\alpha R_\beta D_{\alpha\beta} + h(R_1, \ldots, R_N) \tag{1.9}$$

По аналогии с уравнениями Кирхгофа [2] движения плоских дискретных вихрей представим уравнение (1.6) в виде

$$\Gamma_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial R_\alpha^2} \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.6) и (1.10), находим

$$h = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha(R_\alpha), \quad \frac{dh_\alpha}{dR_\alpha} = \frac{\Gamma_\alpha^2}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{8R_\alpha}{a_\alpha}\right) - E\right] \tag{1.11}$$

Таким образом, движение системы вихревых колец может быть представлено в гамильтоновом виде (1.8), (1.10) с гамильтонианом (1.9), (1.11). Как и ожидалось, гамильтониан H инвариантен по отношению к сдвигу вдоль оси z и рассматриваемая система вихревых колец обладает, помимо обычного для гамильтоновых систем инварианта $I_1 = H$, инвариантом $I_2 = P$. Отметим также, что уравнения (1.8), (1.10), как и классические уравнения Кирхгофа, записаны не в канонической форме. Для приведения (1.8), (1.10) к каноническому виду достаточно ввести обобщенные координаты $q_\alpha = z_\alpha$ и обобщенные импульсы $p_\alpha = \Gamma_\alpha R_\alpha^2$. Гамильтоновость уравнений (1.8), (1.10) в физических координатах можно также показать введением скобок Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\Gamma_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}\frac{\partial g}{\partial R_\alpha^2} - \frac{\partial f}{\partial R_\alpha^2}\frac{\partial g}{\partial z_\alpha}\right)$$

2. Примеры движения вихревых колец. Рассмотрим детальнее систему двухвихревых колец. Эта система с двумя степенями свободы имеет два первых интеграла и вследствие теоремы Лиувилля вполне интегрируема. Поверхность уровня интегралов движения $H = \text{const}$, $P = \text{const}$ с топологической точки зрения эквивалентна либо плоскости, либо цилиндру, либо тору [3]. Первому случаю соответствует, например, такое движение вихревых колец, когда расстояние между ними стремится к бесконечности при $t \to \infty$. Второму случаю соответствует чехарда вихревых колец, качественно описанная еще Гельмгольцем. Движения, соответствующие третьему случаю, по-видимому, невозможны.

Хотя теорема Лиувилля гарантирует полную интегрируемость уравнений движения системы двух вихревых колец, авторам не удалось выразить решение в квадратурах. Изучим поэтому чехарду двух одинаковых вихревых колец одной и той же интенсивности в предположении, что

$$l = [(R_1 - R_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \ll (R_1 + R_2)/2$$

Для применимости модели вихревых колец необходимо также предполагать, что $l \gg a$. Качественно ясно, что при этих предположениях взаимное влияние вихревых колец аналогично взаимодействию прямолинейных вихревых нитей. Это следует из формального разложения гамильтониана (1.9), (1.11) с точностью до членов $O(l/R)$, которыми пренебрегаем

$$H = -\frac{\Gamma^2\sqrt{R_1R_2}}{\pi}\ln\frac{l}{a} + \frac{\Gamma^2\sqrt{R_1R_2}}{\pi}\left[\ln\frac{4(R_1+R_2)}{a} - 2\right] + h_1(R_1) + h_2(R_2) \tag{2.1}$$

Действительно, первое слагаемое в (2.1) — гамильтониан взаимодействия двух вихревых нитей. Оно и определяет динамику движения вихрей, поскольку в рассматриваемом приближении влияние остальных слагаемых сводится к смещению вихрей с постоянной скоростью вдоль оси z.

Из (2.1) можно найти период чехарды $T = 4\pi^2 l^2/\Gamma$. При этом за один период система сместится вдоль оси z на расстояние

$$L = \frac{\pi l^2}{R}\left(\ln\frac{8R}{a} + \ln\frac{8R}{l} - E\right)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая N вихревых колец одинаковой интенсивности, расположенных вблизи одно от другого ($a \ll l \ll R$). В этом случае движение вихревых колец по-прежнему определяется взаимодействием соответствующих вихревых нитей, которые сносятся вдоль оси z с постоянной скоростью. Поэтому из известных решений для прямолинейных вихревых нитей можно получить решения для вихревых колец. В частности, известно, что система из N одинаковых вихревых нитей, расположенных на одной прямой с постоянным шагом, вращается вокруг центра завихренности с постоянной угловой скоростью. Для случая вихревых колец это решение соответствует чехарде N вихревых колец. Отметим экспериментальное подтверждение чехарды двух вихревых колец [4, 5].

3. Влияние малой вязкости. В вязкой несжимаемой жидкости движение даже одного вихревого кольца нестационарно. Подробно эта задача исследована [6] в предположении, что характерное расстояние, на которое продиффундировала завихренность, намного меньше радиуса кольца, т. е. $\nu t \ll R^2$, где ν — коэффициент кинематической вязкости. При этом считалось, что в начальный момент времени вся завихренность сосредоточена на окружности радиуса R. С точностью до членов

$$O\left[\left(\frac{\nu t}{R^2}\right)^{1/2}\ln\frac{\nu t}{R^2}\right]$$

которыми пренебрегаем, скорость движения одиночного вихревого кольца дается формулой [6]

$$\frac{dz^\circ}{dt}=\frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\left(\frac{8R}{\sqrt{4\nu t}}\right)-E\right]$$

где $E \approx 0{,}558$, а Γ в рассматриваемом приближении — постоянная величина (в действительности величину Γ можно считать постоянной с точностью до экспоненциально малых членов $O(\exp(-R^2/4\nu t))$).

Рассмотрим в этих же предположениях задачу о движении системы N соосных вихревых колец в безграничном вязкой несжимаемой жидкости. Объединяя результаты [6] с результатами п. 1, приходим к следующим выводам:

уравнения движения по-прежнему приводятся к гамильтонову виду (1.8); (1.10);

гамильтониан системы вновь представляется в виде (1.9), где

$$h=\sum_{\alpha=1}^{N}h_\alpha(R_\alpha,t),\qquad \frac{dh_\alpha}{dR_\alpha}=\frac{\Gamma_\alpha^2}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{8R_\alpha}{\sqrt{4\nu t}}\right)-0{,}558\right] \tag{3.1}$$

отметим, что в случае вязкой жидкости гамильтониан явно зависит от времени и не является инвариантом движения;

импульс P системы вихрей (1.7) по-прежнему является инвариантом движения.

Выражение для гамильтониана (1.9), (3.1) можно представить в виде

$$H=H_0-\frac{1}{4\pi}\ln(4\nu t)\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_\alpha^2R_\alpha$$

$$H_0=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}{}'\,\Gamma_\alpha\Gamma_\beta R_\alpha R_\beta D_{\alpha\beta}+\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\Gamma_\alpha^2}{2\pi}R_\alpha[\ln(8R_\alpha)-1{,}558]$$

При этом H_0 не зависит от времени явно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Widnall S. E.* The structure and dynamics of vortex filaments.— In: Ann. Rev. Fluid. Mech., Palo Alto, Calif., 1975, v. 7, p. 141—166.
2. *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
4. *Oshima G.* The game of passing-through of a pair of vortex rings.— J. Phys. Soc. Japan, 1978, v. 45, No. 2, p. 660—664.
5. *Yamada H., Matsui T.* Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices.— Phys. Fluids, 1978, v. 21, No. 2, p. 292—294.
6. *Saffman P. G.* The velocity of viscous vortex rings.— Stud. Appl. Math., 1970, v. 49, No. 4, p. 371—380.

Москва

Поступила в редакцию 18.I.1983