

Вычисляя $dF/d\tau$ на Ω , получим

$$dF/d\tau = |A_1| R [1 - \beta\varepsilon + O(\sqrt{R})] > 0$$

Тем самым, Ω , F — четаяевская пара первого рода, и теорема доказана.

4. Теорема об устойчивости систем, близких к изучаемым критическим. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$(4.1) \quad H(x, y) = H_0(x, y) + \alpha H_1(x, y), \quad H(0, 0) = 0$$

Здесь $H(x, y)$ — гладкая функция и разложение в ряд Тейлора начинается с квадратичных членов. Пусть $H_0(x, y)$ — гамильтониан одного из критических случаев, рассмотренных выше.

Теорема. Пусть при $\alpha = 0$ система, отвечающая гамильтониану H_0 , неустойчива. Тогда для всякого α ($|\alpha| < \varepsilon$) существует решение $u_\alpha(t)$ системы (4.1), для которого $|u_\alpha(0)| < c|\alpha|^\kappa$, $\sup_{t>0} |u_\alpha(t)| > b$ (b не зависит от α), $\kappa = 1$.

Доказательство существования $x = 1$ стандартно [3] и здесь не приводится. Доказательство неумлучшаемости этого показателя состоит в следующем. Выберем возмущение $\alpha H_1(x, y)$ так, что резонансные соотношения выполнены с точностью до ε : $(k\omega) = (l\omega) = \varepsilon$. Тогда существует положительный интеграл (безрезонансной задачи), действующий в полной ε -окрестности нуля. Следовательно, существует «пятно» Ω ($d\Omega \sim \varepsilon$). Это гарантирует неумлучшаемость показателя $x = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев А. И. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонансов. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 738—744.
2. Хазин Л. Г. Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 3, с. 423—431.
3. Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Об устойчивости положения равновесия в критических случаях и в случаях, близких к критическим. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 595—604.
4. Куницын А. Л., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях. — В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1979, с. 58—139.
5. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Математические заметки. 1967, т. 1, вып. 3, с. 325—330.

Москва

Поступила в редакцию
9.III.1983

УДК 531.011

ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.

Рассматривается класс механических систем с качением типа гиростата, состоящих из основного тела (тела-носителя, платформы или корпуса экипажа) и тел, катящихся по неподвижной горизонтальной плоскости и сообщающих основному телу продольную скорость $v = \text{const}$. Принят нелинейный механизм упругого взаимодействия контактирующих тел в рамках аксиоматики Рокара [1], причем боковые реакции — монотонные функции углов увода. На основании качественного анализа фазовых траекторий показано, что область притяжения нулевого решения уравнений возмущенного движения неограниченная. Найдены условия, при которых область притяжения — фазовая плоскость. Приводится необходимое условие ограниченности области притяжения невозмущенного решения грубой динамической системы в терминах индекса Пуанкаре для особых точек, лежащих на границе области притяжения. Построен характерный фазовый портрет для конкретных значений параметров системы.

Формулировка задачи о плоскопараллельном движении несвободного гиростата с качением дана в [2]. Ограничимся поэтому краткой информацией об объекте исследования. Вокруг каждой из двух параллельных осей, неизменно связанных с основным телом, вращаются два геометрически и динамически симметричных тела, контакти-

рующих с неподвижной горизонтальной плоскостью. Обозначим через x, y абсциссу и ординату центра масс D гиростата в инерциальной системе координат, ϑ — курсовой угол, $\omega = \dot{\vartheta}$, $v = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$, $u = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta$ — продольная и поперечная скорости точки D (величины v и u — квазискорости), m, I — масса и центральный вертикальный момент инерции гиростата, l_1, l_2 — расстояния от точки D до середины передней и соответственно задней осей, $l = l_1 + l_2$, N_1, N_2 — статические составляющие вертикальных реакций. Если носимые тела безынерционные и упругодеформируемые, то они служат источником специфических силовых воздействий на основное тело. По Рокару [1] боковые реакции Y_i — функции так называемых углов увода

$$\delta_1 = -\operatorname{arctg} [(u + l_1\omega)/v], \quad \delta_2 = \operatorname{arctg} [(-u + l_2\omega)/v]$$

Ограничимся случаем монотонной зависимости $Y_i = Y_i(\delta_i)$, приняв

$$(1) \quad k_i(\delta_i) \equiv d(Y_i/N_i)/d\delta_i > 0, \quad \lim_{\delta_i \rightarrow +\infty} Y_i/N_i = c_i = \text{const}$$

$$Y_i(0) = 0, \quad Y_i'(0) = a_i$$

Уравнения движения (1) работы [2] запишем в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} \omega \dot{} &= P(\omega, u), \quad u \dot{} = Q(\omega, u) \\ P(\omega, u) &= (Y_1 l_1 - Y_2 l_2)/I, \quad Q(\omega, u) = (Y_1 + Y_2)/m - v\omega \end{aligned}$$

Система (2) описывает движение изображающей точки (ω, u) в двумерном фазовом пространстве $F(\omega, u)$. Состояние равновесия в пространстве F соответствует стационарному движению гиростата. Количество таких состояний зависит от вида функций $Y_i(\delta_i)$ [2]. В качестве невозмущенного примем прямолинейное движение вдоль оси Ox . Невозмущенному решению системы (2) на плоскости ωu соответствует точка $(0, 0)$. Для нее уравнения (2) будут и уравнениями в вариациях. В трехмерном фазовом пространстве $\Phi(U, \vartheta, \dot{\vartheta})$, где $U = y \dot{}'$, нулевое решение системы (2) соответствует одномерному многообразию $U = v\dot{\vartheta}$, $\dot{\vartheta} = 0$ состояний равновесия [3]. Физический смысл последнего состоит в произвольности прямой, вдоль которой возможно стационарное движение гиростата.

Известно [1], что при $a_1 l_1 - a_2 l_2 < 0$ (недостаточная поворачиваемость), т. е. при $k_1(0) < k_2(0)$ [2], начало координат плоскости ωu асимптотически устойчиво для $\forall v > 0$; при $a_1 l_1 - a_2 l_2 > 0$ (избыточная поворачиваемость) — лишь для $v < v_+ = l [a_1 a_2 m^{-1} (a_1 l_1 - a_2 l_2)^{-1}]^{1/2}$. В [2] развит тезис о том, что потеря устойчивости начала координат как особой точки уравнений возмущенного движения катящегося гиростата с избыточной поворачиваемостью при сверхкритических скоростях связана с поведением особых точек, отличных от начала координат. В данной работе на основании анализа фазовых траекторий системы (2) при условиях (1) решается вопрос о структуре областей притяжения нулевого решения. Аналогично тому, как условия асимптотической устойчивости по Ляпунову зависят от соотношения между величинами k_1 и k_2 , определяющими поведение функций $Y_i(\delta_i)$ в нуле, вид областей притяжения зависит от соотношения между c_1 и c_2 , определяющими поведение функций $Y_i(\delta_i)$ на бесконечности. Построение последних основывается на следующем утверждении.

Теорема. Если начало координат асимптотически устойчиво и выполнены условия (1), то область притяжения невозмущенного решения неограниченная. Вся фазовая плоскость будет областью притяжения тогда и только тогда, когда $c_1 < c_2$.

Доказательство. Найдем выражение дивергенции векторного поля скоростей, задаваемого системой (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P, Q) &= -\frac{1}{v} \left\{ \left(\frac{l_1^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{1 + [(u + l_1\omega)/v]^2} \frac{dY_1}{d\delta_1} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{l_2^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{1 + [(-u + l_2\omega)/v]^2} \frac{dY_2}{d\delta_2} \right\} \end{aligned}$$

В силу первого условия (1) во всей фазовой плоскости $\operatorname{div}(P, Q) < 0$. Согласно критерию Бендиксона отсюда следует, что в любой односвязной области фазовой плоскости не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (2). В [4] показано, что граница всей области притяжения невозмущенного решения автономной системы состоит из целых траекторий или из кусков траекторий. Следовательно, область притяжения нулевого решения системы (2) неограниченная.

Для доказательства второй части теоремы проанализируем поведение фазовых траекторий на плоскости ωu . Определим сначала множества точек, в которых или $\omega \dot{} = 0$, или $u \dot{} = 0$.

Условие $\dot{\omega} = 0$ сводится к равенству $Y_1/N_1 = Y_2/N_2$, где $N_1 = mgl_2/l$, $N_2 = mgl_1/l$. Так как геометрическое место точек на плоскости ωu , отвечающее условию $\text{sign } \delta_1 = \text{sign } \delta_2$, лежит между прямыми $u = -l_1\omega$, $u = l_2\omega$ и в каждой точке оси u выполнено равенство $\delta_1 = \delta_2$, то искомое множество $\dot{\omega} = 0$ целиком лежит между прямыми $u = -l_1\omega$, $u = l_2\omega$ и проходит через начало координат. Это множество пересекает ось u при $u_0 = -v \text{tg } \delta_0$, если графики зависимостей $Y_i(\delta_i)/N_i$ имеют точку пересечения при $\delta_1 = \delta_2 = \delta_0 \neq 0$.

Кривая

$$(3) \quad l_1 Y_1 \left(-\text{arctg} \frac{u + l_1 \omega}{v} \right) - l_2 Y_2 \left(\text{arctg} \frac{-u + l_2 \omega}{v} \right) = 0$$

в начале координат имеет угловой коэффициент

$$k_\omega = -(a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2) / (a_1 l_1 - a_2 l_2)$$

При $k_1(0) < k_2(0)$ получаем $k_\omega > 0$, и если графики зависимостей $Y_i(\delta_i)/N_i$ не имеют точек пересечения, то вся кривая $\{(\omega, u) : \dot{\omega} = 0\}$ лежит в первом и третьем квадрантах. При $k_1(0) > k_2(0)$ и отсутствии пересечения кривая (3) лежит во втором и четвертом квадрантах.

Для множества точек фазовой плоскости, в которых $\dot{u} = 0$, получаем соотношение

$$(4) \quad Y_1 \left(-\text{arctg} \frac{u + l_1 \omega}{v} \right) + Y_2 \left(\text{arctg} \frac{-u + l_2 \omega}{v} \right) = mv\omega$$

из которого следует, что кривая $\{(\omega, u) : \dot{u} = 0\}$ стремится к вертикальным асимптотам $\omega = \omega_*$ и $\omega = -\omega_*$ при $u \rightarrow -\infty$ и $u \rightarrow +\infty$ соответственно. Здесь $\omega_* = (c_1 N_1 + c_2 N_2) m^{-1} v^{-1}$. Угловой коэффициент кривой в начале координат определяется выражением

$$k_u = -(mv^2 + a_1 l_1 - a_2 l_2) / (a_1 + a_2)$$

Если $a_1 l_1 - a_2 l_2 < 0$ и $v < v_1$, то кривая (4) пересекает ось ω при $\omega = \pm \omega_1$. Здесь

$$v_1^2 = (a_2 l_2 - a_1 l_1) m^{-1}, \quad mv\omega_1 = Y_1(-\text{arctg} l_1 v^{-1} \omega_1) + Y_2(\text{arctg} l_2 v^{-1} \omega_1)$$

Если же $a_1 l_1 - a_2 l_2 < 0$ и $v > v_1$ или $a_1 l_1 - a_2 l_2 > 0$, то кривая (4) целиком лежит во втором и четвертом квадрантах.

Точки пересечения кривых (3) и (4) — особые точки системы (2). Взаимное расположение этих кривых в окрестности особой точки определяет ее тип. Так, для начала координат имеем следующие результаты. Обозначим через α_ω , α_u угол наклона кривых (3) и, соответственно, (4) к оси абсцисс в начале координат.

Пусть $a_1 l_1 - a_2 l_2 > 0$, тогда $k_u < 0$, $k_\omega < 0$. Если $\pi/2 < \alpha_\omega < \alpha_u < \pi$, то направление фазовых траекторий системы (2) в достаточно малой окрестности начала координат такое, что точка $(0, 0)$ — устойчивый узел. Если же $\pi/2 < \alpha_u < \alpha_\omega < \pi$, то начало координат — седло. Смена узла на седло происходит при $v = v_+$.

В случае $a_1 l_1 - a_2 l_2 < 0$ имеем $k_\omega > 0$, $k_u = k_u(v)$ меняет знак при переходе через $v = v_1$, причем $k_u(0) > k_\omega$. При $v < v_1$ получаем $0 < \alpha_u < \alpha_\omega < \pi/2$, точка $(0, 0)$ — устойчивый узел. При $v \in (v_1, v_*)$, где

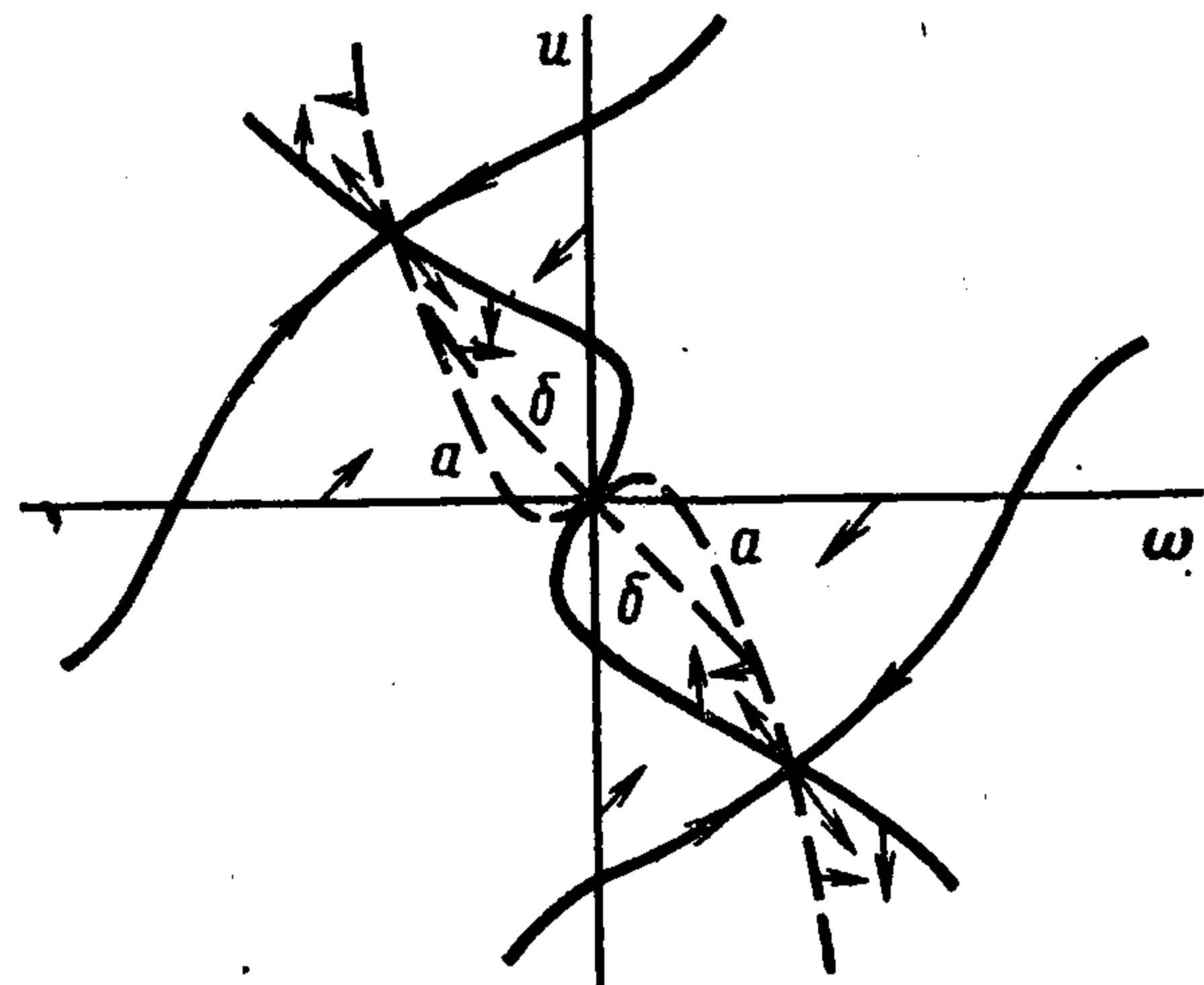
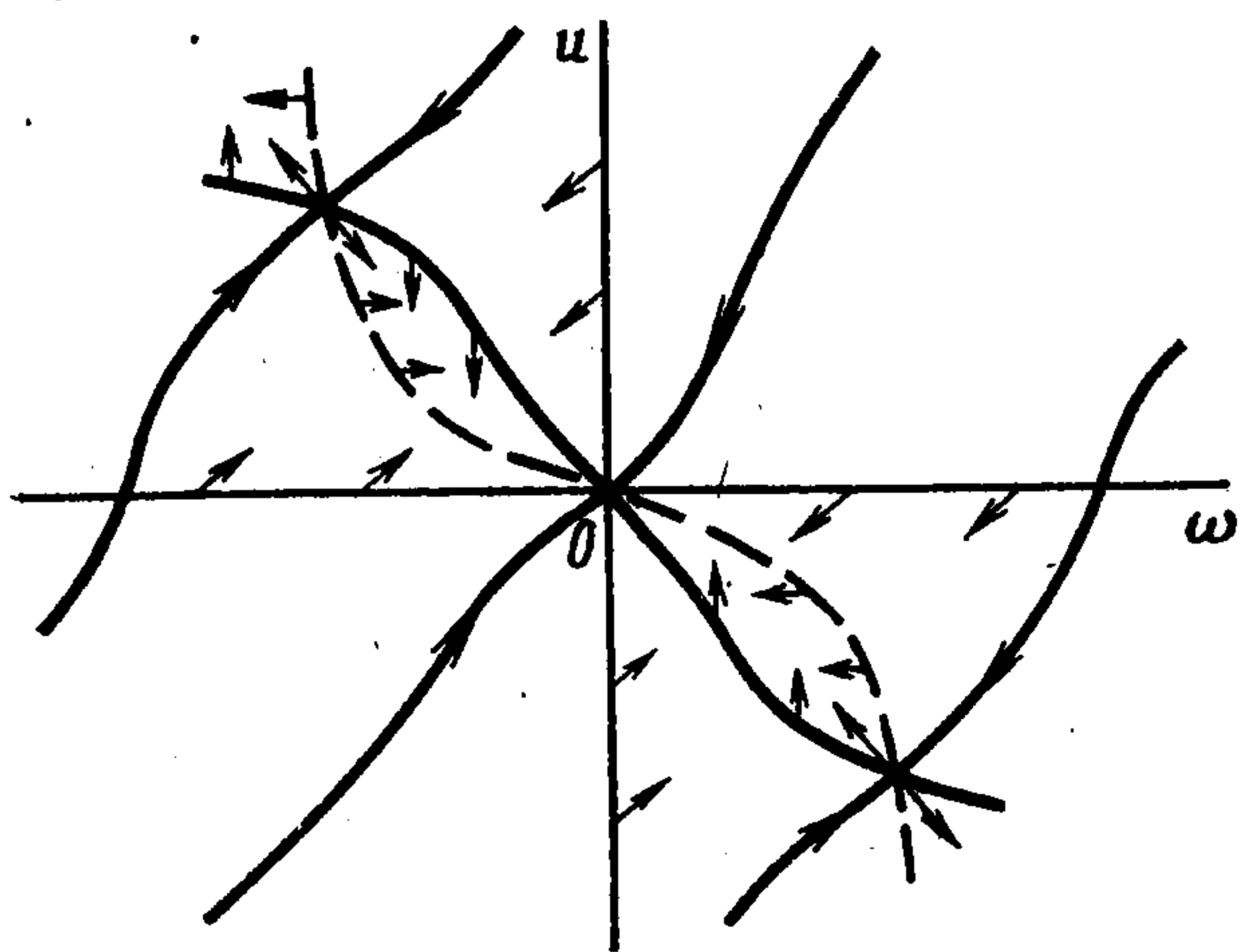
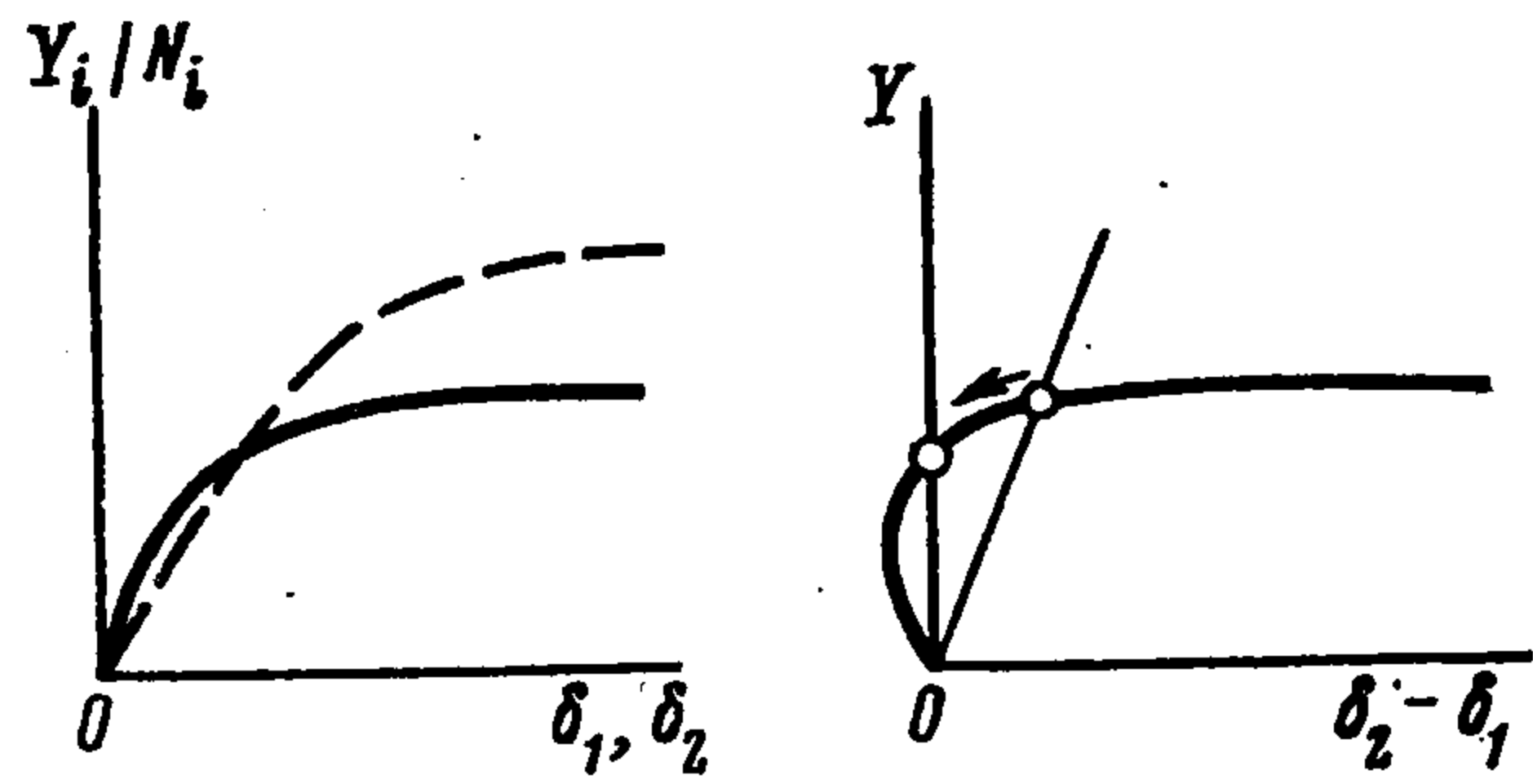
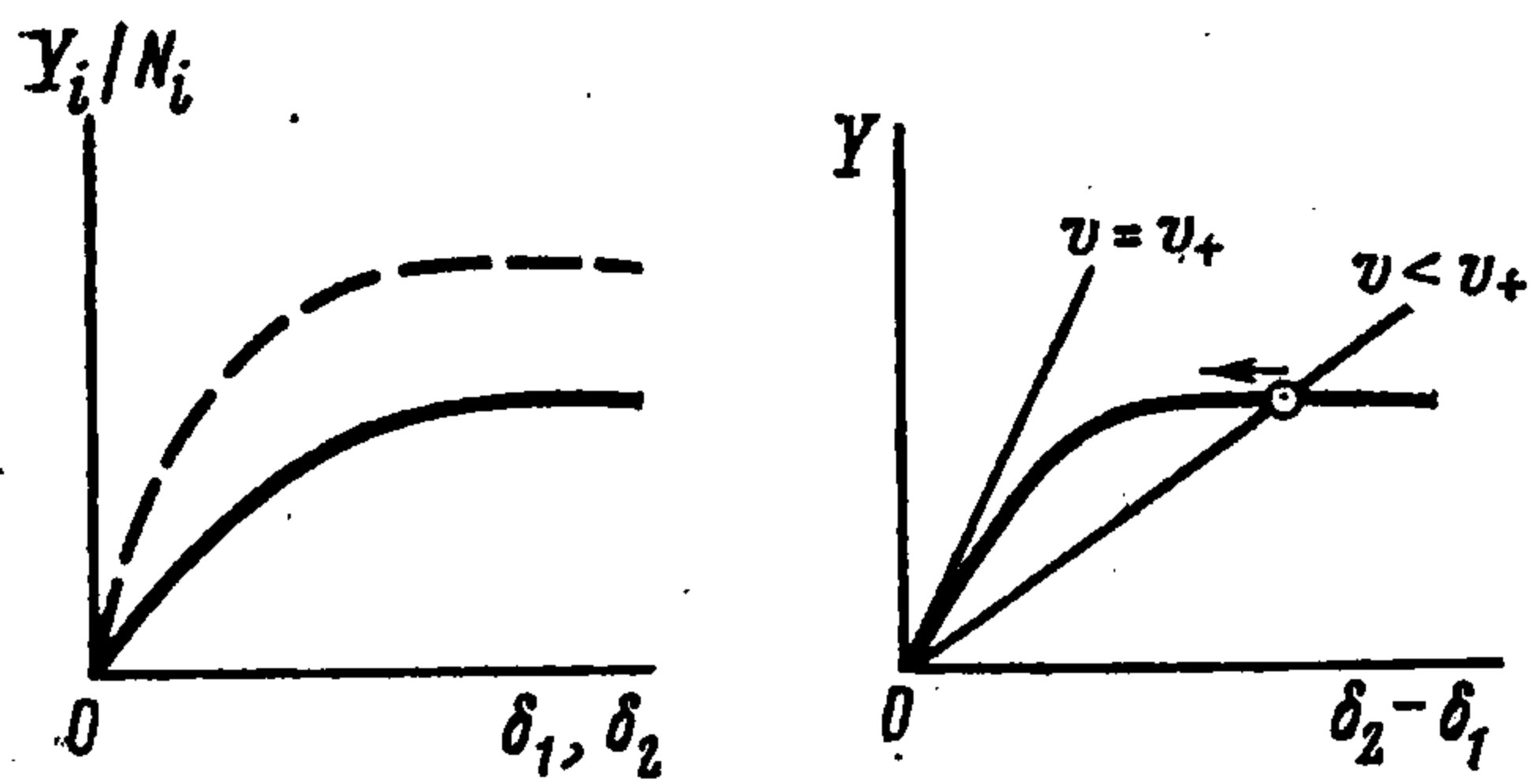
$$v_*^2 = I \{ [(a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2) / I + (a_1 + a_2) / m]^2 / 4 - a_1 a_2 l^2 m^{-1} I^{-1} \} (a_2 l_2 - a_1 l_1)^{-1}$$

имеем $0 < \alpha_\omega < \pi/2$, $\pi/2 < \alpha_u < \pi$. В этом случае существует некоторая изоклина k_i , расположенная ниже изоклины k_ω и «сбивающая» фазовые траектории в начало координат. В противном случае узел в начале координат превратился бы в фокус при $v = v_1$. Последнее невозможно, так как из линейной теории получаем, что точка $(0, 0)$ становится фокусом при $v > v_* > v_1$. Если $v > v_*$, то направления фазовых траекторий системы (2) на кривых (3), (4) такие же, как и при $v_1 < v < v_*$, но начало координат — устойчивый фокус. §

В случае $a_1 l_1 - a_2 l_2 = 0$ всегда $k_u < 0$, $v_1 = 0$, $k_\omega = \infty$; точка $(0, 0)$ — устойчивый узел при $0 < v < v_*$ и устойчивый фокус при $v > v_*$.

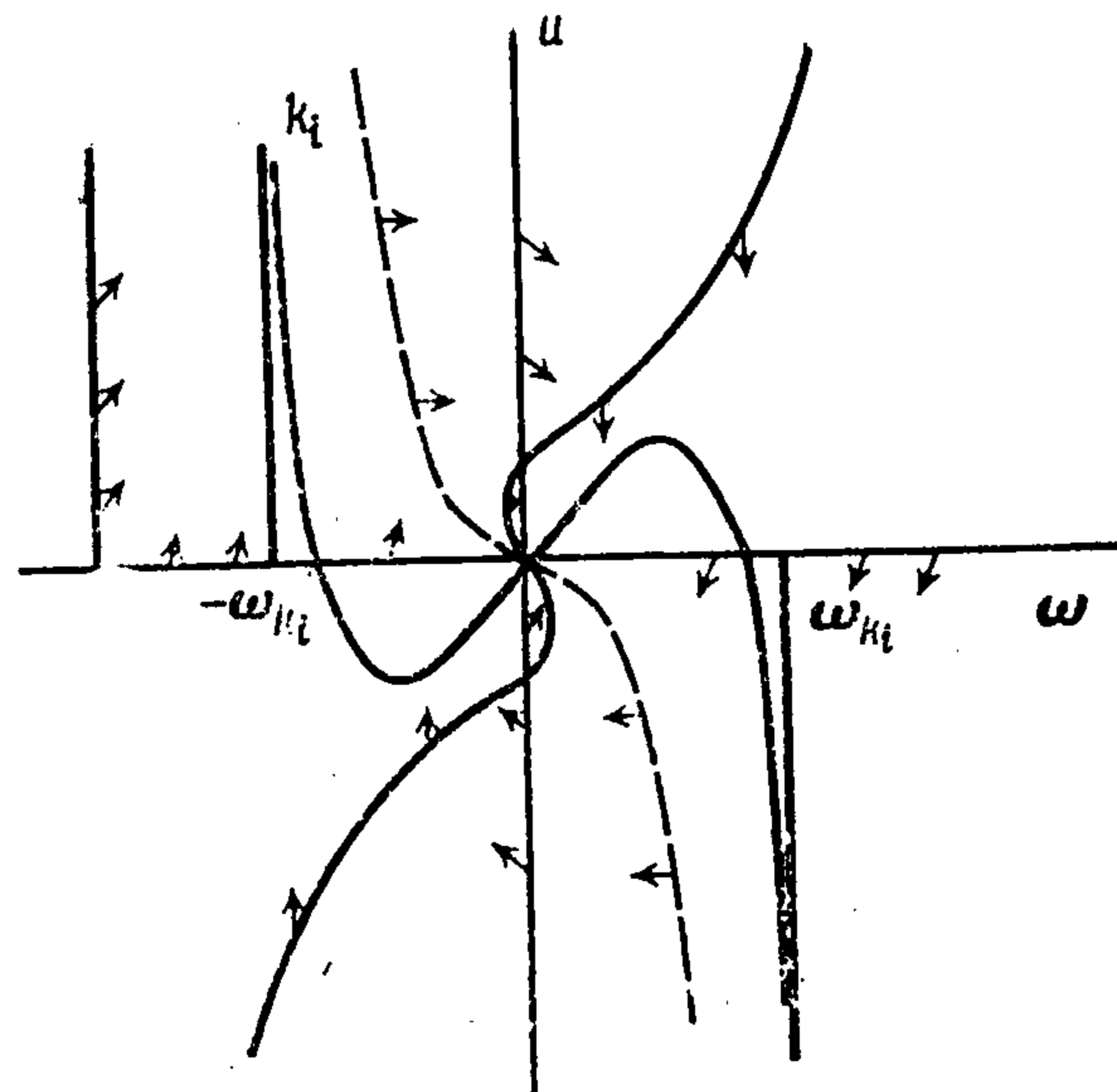
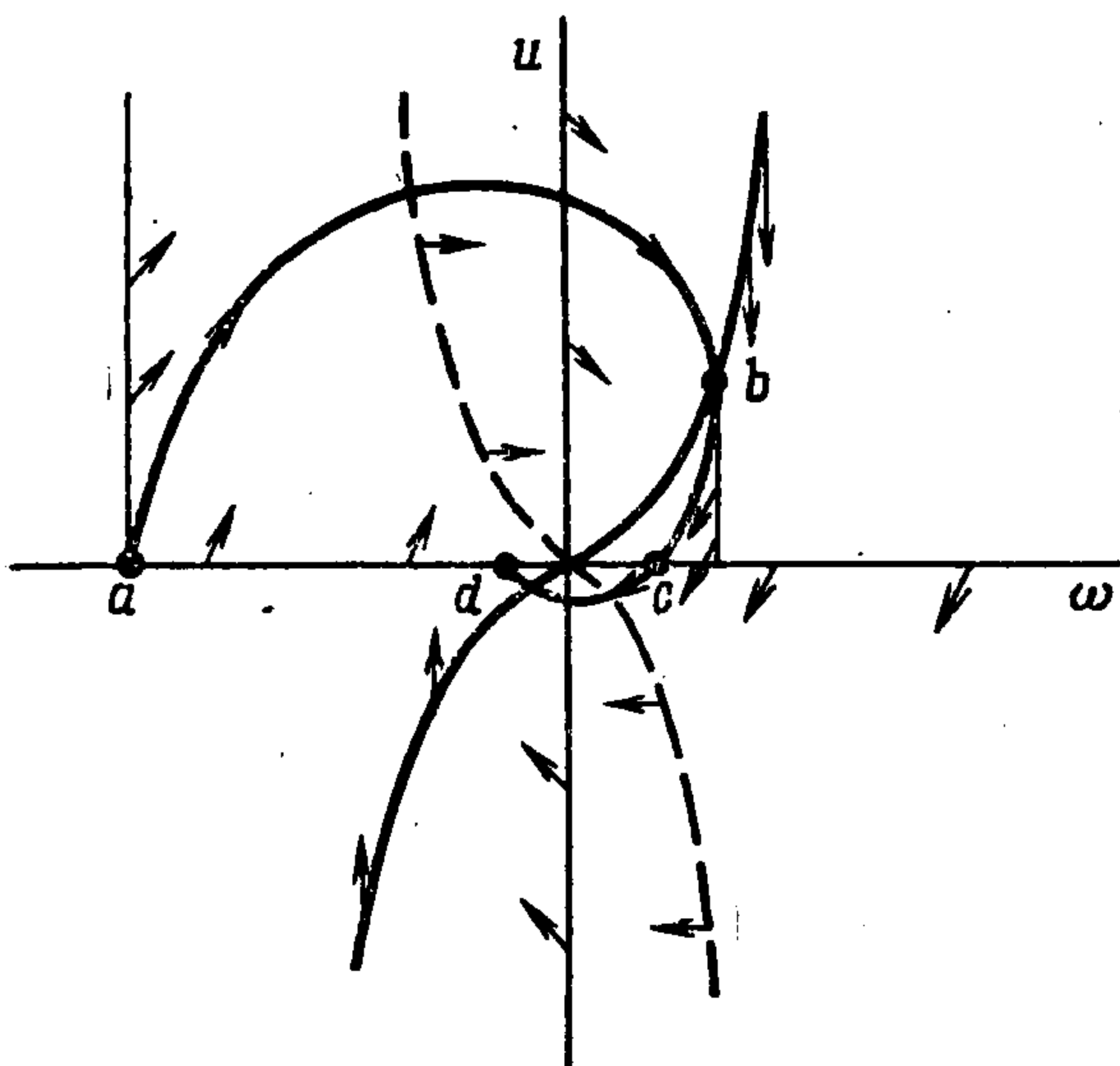
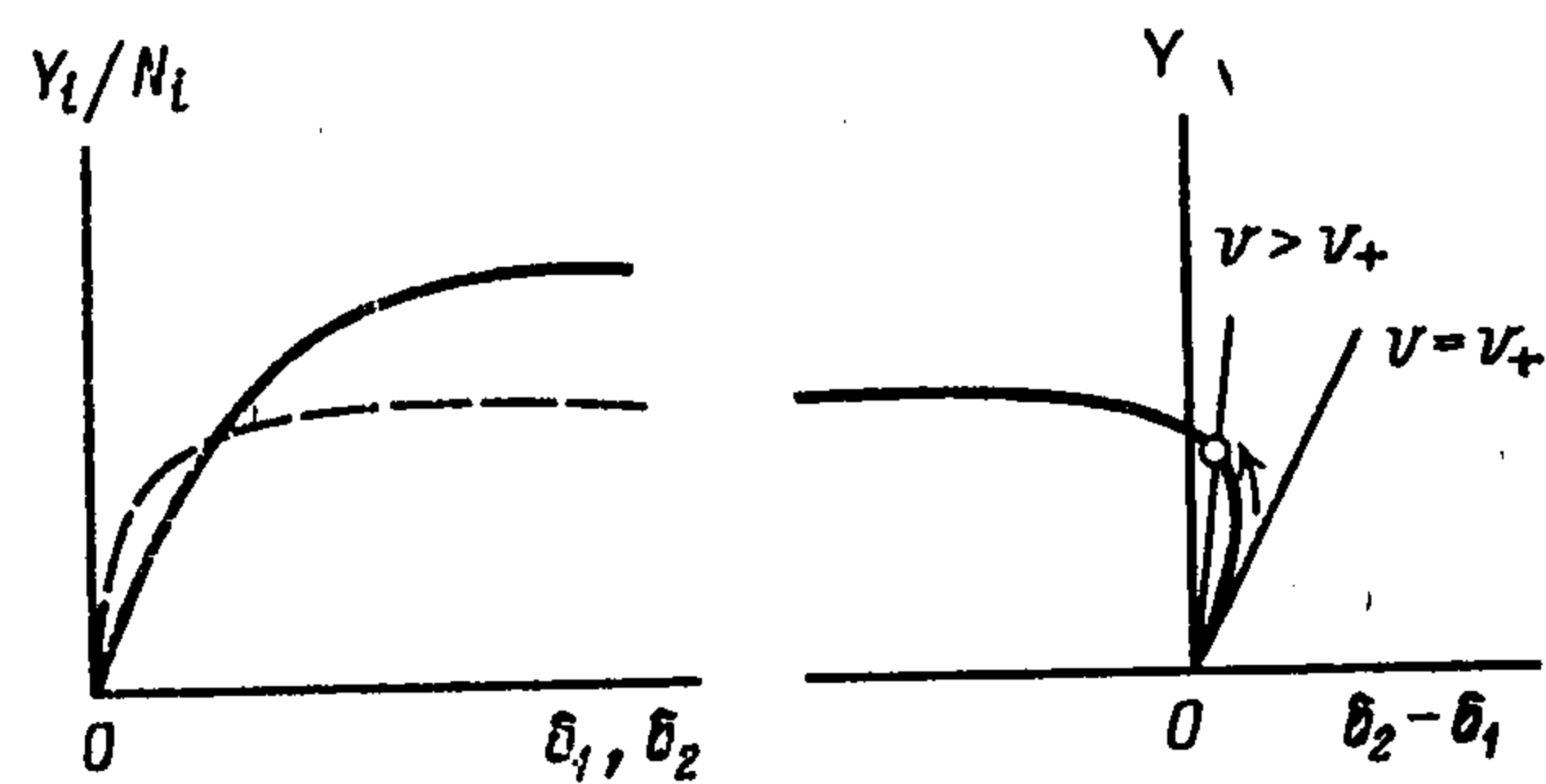
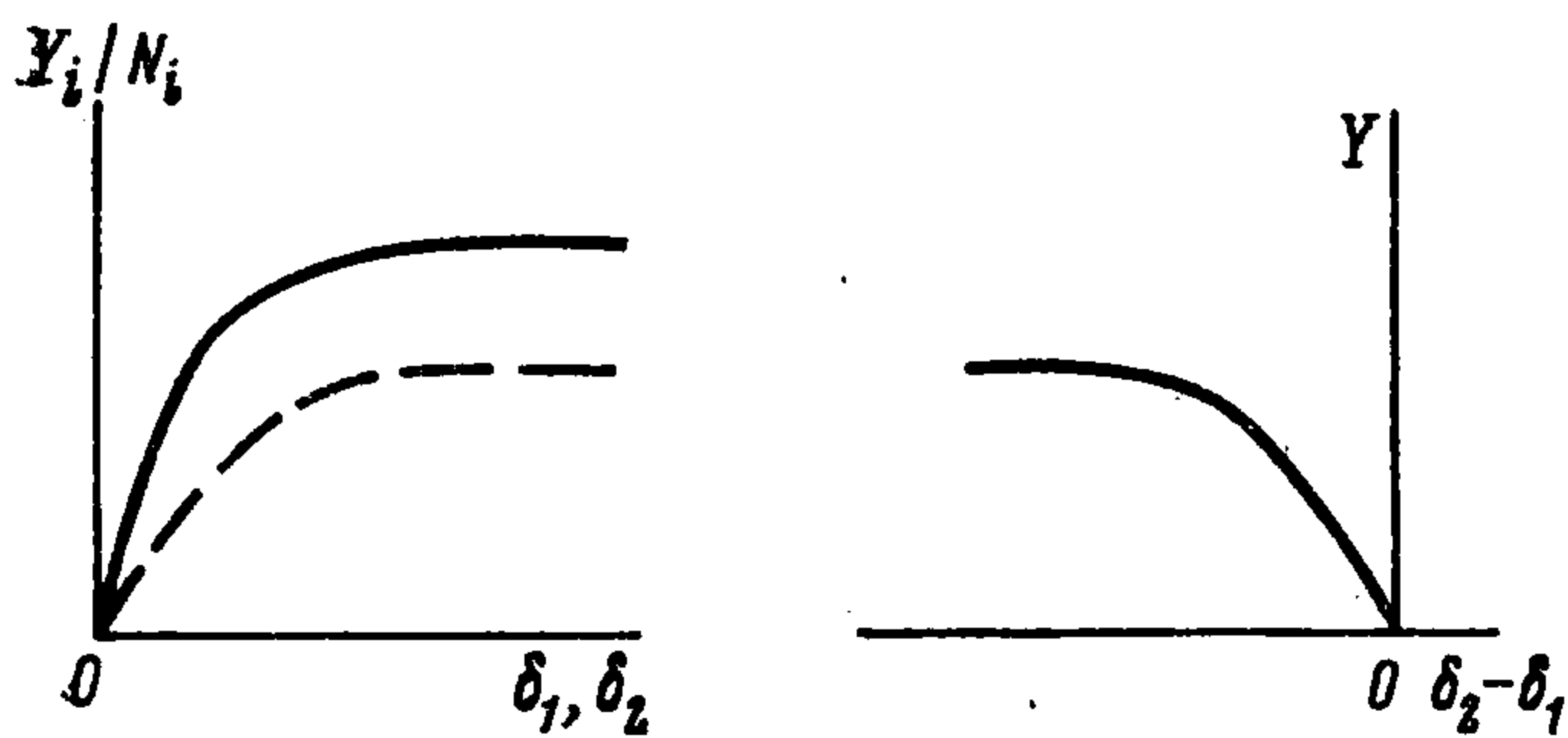
Перейдем к анализу возможных случаев взаимного расположения кривых (3) и (4) во всей плоскости ωu .

1°. Если $k_1(0) > k_2(0)$, $c_1 > c_2$, т. е. зависимость удельных боковых реакций Y_i/N_i от углов увода δ_i имеет вид, показанный на фиг. 1 (здесь и далее штриховой кривой соответствует $i = 1$, сплошной — $i = 2$), то из поведения кривой $Y = Y(\delta_2 | \delta_1)$ следует [2], что при $v < v_+$ на плоскости ωu имеется пара особых точек (во втором и чет-



Фиг. 1

Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 4

вертом квадрантах). Это — точки пересечения кривых (3) (сплошная кривая на нижней части фиг. 1) и (4) (штриховая кривая). Из направления векторного поля следует, что эти особые точки — седловые [5] и, кроме того, существуют фазовые траектории, целиком лежащие в первом и третьем квадрантах и идущие в начало координат. С увеличением скорости v седловые точки движутся к началу координат, сливаясь с ним при $v = v_+$. При $v > v_+$ имеется единственная седловая точка в начале координат. Граница области притяжения нулевого решения системы (2) при $v < v_+$ — сепаратрисы, входящие в седловые точки. Эти сепаратрисы отсекают во втором и четвертом квадрантах ограниченные области, такие, что фазовые траектории, лежащие внутри этих областей, не могут их покинуть. Сепаратрисы, выходящие из седловых точек и лежащие внутри указанных областей, имеют ω -предельной точкой [6] начало координат.

2°. При $k_1(0) < k_2(0)$, $c_1 > c_2$ зависимость величин Y_i/N_i от δ_i показана фиг. 2. В этом случае также имеется пара седловых точек, но при увеличении скорости v они не могут попасть в начало координат и разрушить его устойчивость. Их предельное

положение при $v \rightarrow +\infty$ соответствует точке пересечения кривой (3) с осью u . Сепаратрисы, входящие в седловые точки, ограничивают область притяжения начала координат. С ростом скорости v кривая (4) меняет свою форму a на b , теряя экстремумы.

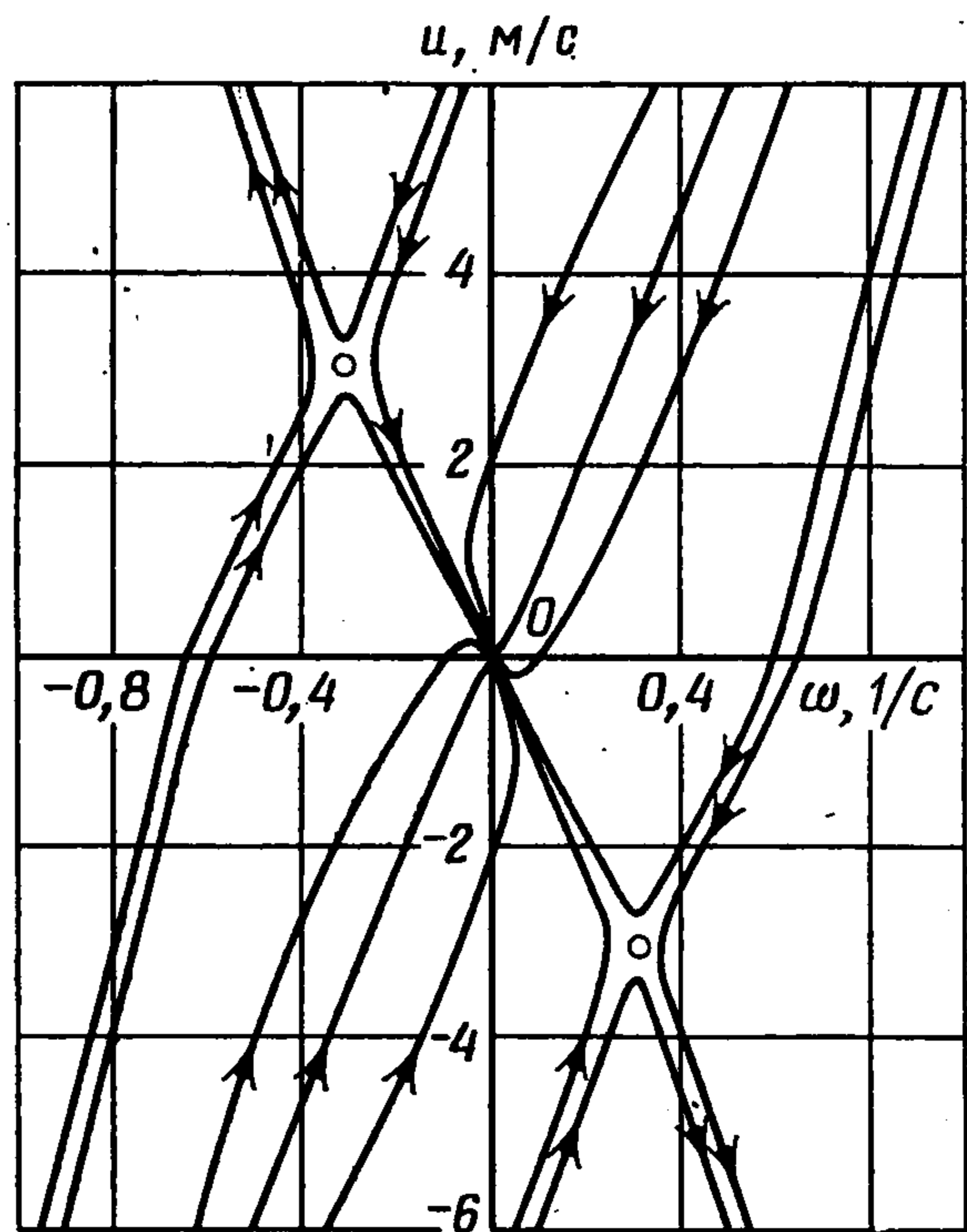
3°. В случае $k_1(0) < k_2(0)$, $c_1 < c_2$ (фиг. 3) существует единственная особая точка в начале координат, асимптотически устойчивая при $0 < v < +\infty$. Точка $(0, 0)$ может быть или узлом, или фокусом. Рассмотрим случай фокуса. Используя свойства векторного поля скоростей, можно показать, что область притяжения начала координат — вся фазовая плоскость. Действительно, фазовая траектория, выйдя из положения a , попадает в некоторую точку b на кривой (3), затем — в точку c на оси ω и в силу симметрии свойств векторного поля — в точку d .

Докажем методом от противного, что эта спираль скручивается. Если бы это было не так, т. е. для некоторых начальных значений спираль ad раскручивается ($d < a <$

< 0), то спираль ad и отрезок $[a, d]$ на оси ω образовали бы замкнутый контур, внутри которого не входит ни одна траектория. Последнее противоречит тому, что область притяжения начала координат неограниченная.

Ситуация, когда начало координат — узел, аналогична описанной ниже для докритических скоростей.

4°. Пусть $k_1(0) > k_2(0)$, $c_1 < c_2$ (фиг. 4). При $v < v_+$ имеется единственная, асимптотически устойчивая особая точка системы (2): узел в начале координат. Фазовые траектории на бесконечности закручиваются в спирали. Это следует из того, что изоклина k_i , т. е. кривая $Q(\omega, u)/P(\omega, u) = \text{const} > 0$, имеет вид, указанный на нижней части фиг. 4. Наличие вертикальных асимптот у изоклин при стремлении ω к некоторому конечному значению ω_{k_i} обусловлено тем, что величины сил и моментов в (2) — ограниченные функции координат. Если допустить, что рассматриваемые



Фиг. 5

спирали раскручиваются, то приходим к упомянутому в п. 3° противоречию. Таким образом, область притяжения — вся фазовая плоскость.

Этим заканчивается доказательство теоремы.

Представление о поведении реальных фазовых траекторий системы (2) дает фиг. 5, построенная для $a_1 = a_2 = 57300\text{Н}$, $m = 2527\text{ кг}$, $I = 6550\text{ кгм}^2$, $l_1 = 1,73\text{ м}$, $l_2 = 1,5\text{ м}$, $l = 3,23\text{ м}$, $c_1 = 0,8$, $c_2 = 0,7$, $v = 19\text{ м/с}$.

В заключение отметим, что требование отрицательности дивергенции векторного поля во всей плоскости не является необходимым для того, чтобы область притяжения невозмущенного решения системы (2) была неограниченной. Для того чтобы граница области притяжения невозмущенного решения грубой системы была замкнутым контуром, необходимо равенство нулю суммы индексов Пуанкаре особых точек, лежащих на границе области притяжения. Это вытекает из того, что на границе области притяжения могут лежать только неустойчивые особые точки и (так как в грубых динамических системах сепаратриса не может идти из седла в седло) в границу области притяжения входят лишь входящие в седла усы. Между особыми точками, имеющими индекс единица, и седлами необходимо однозначное соответствие.

Приведем иллюстрирующий пример. В механических системах с качением возможен случай, когда $k_1(0) > k_2(0)$, $c_1 > c_2$, $v < v_+$, зависимости $Y_i(\delta_i)/N_i$ имеют участки убывания, но $c_1 > \max Y_2/N_2$. Тогда характер векторного поля системы (2) такой же, как и в случае 1° (для монотонно возрастающих функций $Y_i(\delta_i)/N_i$). Теперь дивергенция векторного поля отрицательна лишь в конечной окрестности начала координат. В силу характера векторного поля (имеются фазовые траектории в первом и третьем квадрантах, идущие из бесконечности в начало координат) система (2) не может иметь замкнутых траекторий. Граница области притяжения не может быть замкнутым контуром, на ней, как и в 1°, лежат седловые точки. В этом примере сумма индексов особых точек, лежащих на границе, отлична от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 944—948.
3. Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. Еругин Н. П. Качественные методы в теории устойчивости. — ПММ, 1955, т. 19, вып. 5, с. 599—616.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.

Киев

Поступила в редакцию
10.III.1983

УДК 532.527

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Брутян М. А., Крапивский П. Л.

Развивается гамильтонов формализм в задаче о движении системы соосных вихревых колец в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Определяется дополнительный инвариант движения, являющийся импульсом окружающей жидкости. Для случая двух вихревых колец уравнения движения оказываются вполне интегрируемыми, что объясняет чехарду вихревых колец, качественно описанную Гельмгольцем. Оценивается влияние вязкости на начальную стадию движения.

1. Гамильтонова формулировка. Задача о движении вихревых колец, изучавшаяся еще в прошлом веке, — простейший классический пример пространственного вихревого течения. Теоретический анализ даже этого простейшего случая возможен лишь, когда радиус вихревого кольца значительно больше радиуса вихревого ядра. Рассмотрим систему соосных вихревых колец, движущихся в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Введем цилиндрическую систему координат r, z, θ , где ось z направлена вдоль общей оси вихревых колец. Пусть Γ_α — циркуляция вихревого кольца с номером α , $\alpha = 1, \dots, N$, R_α — радиус кольца, a_α — радиус вихревого ядра, z_α — продольная координата вихря. Поле скоростей вне вихревых колец ищем в виде

$$(1.1) \quad \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Из соображений симметрии $\mathbf{A} = A(r, z) \mathbf{e}_\theta$. Тогда из (1.1) получаем

$$(1.2) \quad v_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r}$$

После подстановки (1.2) в уравнение

$$\text{rot } \mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \delta(r - R_\alpha) \delta(z - z_\alpha)$$

приходим к следующему уравнению для векторного потенциала A :

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = - \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \delta(r - R_\alpha) \delta(z - z_\alpha)$$

Правая часть (1.3) получается в предположении $a/R \ll 1$ и выражает тот факт, что циркуляция по произвольному замкнутому контуру, охватывающему ядро вихря с номером α , равна Γ_α . Поскольку уравнение (1.3) линейно, его решение дается суммой решений для изолированных вихревых колец и имеет вид

$$(1.4) \quad A(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha R_\alpha \int_0^\infty J_1(kR_\alpha) J_1(kr) e^{-k|z-z_\alpha|} dk$$