УДК 531.36 : 534

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЗОНАНСОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Хазин Л. Г.

Рассматривается задача об устойчивости положения равновесия гамильтоновых нейтральных систем (все собственные значения матриц линеаризации чисто мнимы). Для систем с несколькими резонансами третьего порядка получен критерий устойчивости.

1. Постановка задачи. Исследуется устойчивость положения равновесия автономной гамильтоновой системы уравнений

$$x_\alpha^{\cdot} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_\alpha}; \quad y_\alpha^{\cdot} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

$$H(x, y) = H_2(x, y) + H_3(x, y) + \ldots$$

$$x = (x_1, \ldots, x_N); \quad y = (y_1, \ldots, y_N)$$

Здесь $H_k(x, y)$ — однородные полиномы степени k, Γ — матрица линеаризации системы (1.1), $\lambda(\Gamma)$ — собственные значения, $\operatorname{Re}\lambda(\Gamma) = 0$.

Используются следующие определения.

Система

$$x^{\cdot} = F(x), \ F(0) = 0, \ \dim F = \dim x = 2N$$

$$\lambda(\Gamma) = \pm i\omega_j, \ j = 1, \ldots, N$$

обладает резонансом, если существует целочисленный вектор $k = (k_1, \ldots, k_N)$, такой, что $(k, \omega) = \Sigma k_j\omega_j = 0$. Число $|k| = \Sigma |k_j|$ называют порядком резонанса, вектор k — резонансным вектором. Если k_j взаимно просты, то $|k|$ минимален.

Два резонанса называются независимыми, если линейно независимы их резонансные векторы. Два резонанса зацеплены по m частотам, если в их резонансные соотношения входят ровно m общих частот с ненулевыми компонентами резонансных векторов.

Ниже изучается устойчивость положения равновесия системы (1.1) при наличии в ней ровно двух резонансов третьего порядка; при этом предполагается отсутствие кратных корней: $\lambda_\alpha \neq \lambda_j$, если $\alpha \neq j$. Никаких других ограничений на систему не накладывается. Коразмерность рассматриваемых систем среди всех гамильтоновых с $\operatorname{Re}\lambda = 0$ равна двум.

Сформулируем результаты, существенно используемые в работе.

Если в системе (1.1) есть ровно один резонанс третьего порядка, то справедливы два эквивалентных утверждения [1, 2].

Теорема 1а. Положение равновесия модельной системы неустойчиво, если среди компонент ее резонансного вектора нет перемены знака; в противном случае у системы есть положительный квадратичный интеграл, гарантирующий устойчивость.

Под модельной системой здесь и ниже понимается нормализованная до третьего порядка включительно система (1.1) с отброшенными старшими членами.

Теорема 1б. Положение равновесия модельной системы неустойчиво тогда и только тогда, когда среди ее решений есть растущее решение в виде инвариантного луча (определение инвариантного луча см. в [2]).

Для исходной полной системы в рассматриваемых случаях справедливы следующие теоремы.

Теорема S. Из устойчивости модельной системы следует устойчивость исходной системы до порядка k_0 ($k_0 > 3$ — порядок младшего резонанса; резонансы предполагаются взаимно независимыми).

Теорема NS. Из неустойчивости модельной системы следует неустойчивость по Ляпунову исходной системы.

Основной результат данной работы может быть сформулирован в виде теоремы.

Теорема 1. Модельная система неустойчива тогда и только тогда, когда, по крайней мере, у компонент одного из резонансных векторов нет перемены знака; в противном случае устойчивость гарантируется наличием положительного квадратичного интеграла.

Замечания. 1°. Лишь неустойчивость в изучаемых системах носит грубый характер и не зависит от наличия в системе резонансов старших порядков.

2°. Наличие растущего решения в виде инвариантного луча не является необходимым условием неустойчивости изучаемых систем.

В п. 2 приводится доказательство теоремы 1. Теорема NS доказывается в п. 3. Доказательство теоремы S стандартно [3] и в работе не приводится.

Отметим, что без ограничения общности можно рассматривать системы с минимально возможным числом степеней свободы, так, что каждая частота входит, по крайней мере, в одно из резонансных соотношений с ненулевой компонентой резонансного вектора.

2. Исследование модельных систем. Невырожденным каноническим полиномиальным преобразованием приведем гамильтониан (1.1) к нормальной форме до членов третьего порядка включительно и отбросим старшие члены. Получившийся гамильтониан описывает модельную систему.

Доказательство теоремы 1 для случая незацепленных резонансов. В рассматриваемой ситуации гамильтониан модельной системы есть сумма двух независимых гамильтонианов, и система распадается на две независимые подсистемы, каждая из которых обладает одним резонансом третьего порядка. Отсюда следует справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 для случая зацепления резонансов по одной частоте. В рассматриваемой ситуации теорема справедлива для общих систем дифференциальных уравнений [4]. Однако для общих систем двухчастотный резонанс 1 : 2 всегда (без дополнительного вырождения) приводит к неустойчивости, а для гамильтоновой системы это не так. Для полного доказательства теоремы 1 следует разобрать два случая, специфичных лишь для гамильтоновых систем

1°. $$H_M^{1} = -\rho_1 + 2\rho_2 + 4\rho_3 + 2A\sqrt{\rho_1^2\rho_2}\cos(\varphi_2 + 2\varphi_1) + 2B\sqrt{\rho_2^2\rho_3}\cos(\varphi_3 - 2\varphi_2)$$

2°. $$H_M^{2} = \Sigma\omega_j\rho_j + 2A\sqrt{\rho_1^2\rho_2}\cos(\varphi_2 - 2\varphi_1) + 2B\sqrt{\rho_1\rho_3\rho_4}\cos(\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

Здесь ρ_α и φ_α — канонические полярные координаты.

Отметим, что зацепление в обоих случаях происходит по низкой частоте несущественного резонанса.

Неустойчивость системы с гамильтонианом H_M^1 следует из существования растущего решения в виде инвариантного луча

$$\psi_1 = \varphi_2 + 2\varphi_1 = -\frac{\pi|A|}{2A}, \qquad \psi_2 = \varphi_3 - 2\varphi_2 = -\frac{\pi|B|}{2B}, \qquad \rho_3 = b(t)$$
$$\rho_1 = \frac{4(2A^2 + B^2)}{A^2}b(t), \qquad \rho_2 = \frac{4A^2}{B^2}b(t), \qquad b^{\cdot} = \frac{8A^2}{|B|}b^{3/2}$$

Неустойчивость системы с гамильтонианом H_M^2 доказывается аналогично.

Для общих систем (при дополнительном вырождении) ситуация значительно сложнее — растущего решения в виде инвариантного луча, вообще говоря, может не оказаться.

Доказательство теоремы 1 при зацеплении резонансов по двум частотам. Двухчастотный и трехчастотный резонансы. Пусть $|\omega_1| < |\omega_2| < |\omega_3|$. Без ограничения общности можно считать $|\omega_1| = 1$, тогда $|\omega_2| = 2$, $|\omega_3| = 3$. При индефинитности H возможны с точностью до знака три случая:

1) $H_2 = -\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3$, 2) $H_2 = \rho_1 - 2\rho_2 + 3\rho_3$, 3) $H_2 = \rho_1 + 2\rho_2 - 3\rho_3$

Можно проверить, что в случаях 1) и 3) неустойчивость следует из существования растущего решения в виде инвариантного луча. Проведем доказательство для более сложного случая 2). Имеем

$$H = \rho_1 - 2\rho_2 + 3\rho_3 + 2F_1(\rho, \psi_1) + 2F_2(\rho, \psi_2) \tag{2.1}$$
$$\psi_1 = \varphi_2 + 2\varphi_1, \ \psi_2 = \varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1, \ F_1 = \sqrt{\rho_1^2\rho_2}\cos\psi_1$$
$$F_2 = \sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3}\cos\psi_2, \ G_1 = \sqrt{\rho_1^2\rho_2}\sin\psi_1, \quad G_2 = \sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3}\sin\psi_2$$
$$\rho_1^{\cdot} = 2(-G_1 + G_2), \ \rho_2^{\cdot} = -2(G_1 + G_2), \ \rho_3^{\cdot} = -2G_2$$
$$\psi_1^{\cdot} = (-F_1(\rho_1 + 4\rho_2) + 2F_2(2\rho_2 - \rho_1))/(\rho_1\rho_2)$$
$$\psi_2^{\cdot} = F_1(2\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1\rho_2) + 2F_2(1/\rho_1 - 1/\rho_2 - 1/\rho_3)$$

($I = \rho_1 - 2\rho_2 + 3\rho_3$, $K = H - I$ — интегралы системы (2.1)).

Ищем решение системы в виде луча на инвариантной поверхности

$$I = K = 0, \quad \psi_1 = -\frac{\pi|A|}{2A}, \quad \psi_2 = -\frac{\pi|B|}{B}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 + 3\rho_3)$$

Для оставшихся переменных получим

$$\rho_1^{\cdot} = (2\sqrt{2}\,|\,A\,|\,\rho_1 - \sqrt{2}\,|\,B\,|\sqrt{\rho_1\rho_3})\sqrt{\rho_1 + 3\rho_3}$$
$$\rho_3^{\cdot} = \sqrt{2}\,|\,B\,|\sqrt{\rho_1\rho_3(\rho_1 + 3\rho_3)} \tag{2.2}$$

Растущее решение ищем в виде $\rho_3(t) = k\rho_1(t)$, $k > 0$. Такое решение существует, если есть положительное решение уравнения $2\,|\,A\,| = |\,B\,|\,(k + 1/k)$. Итак, при $|\,A\,| \geqslant |\,B\,|$ растущее решение имеет вид

$$\rho_1^{\cdot} = \sqrt{2}\,|B|\frac{\sqrt{1+3k}}{\sqrt{k}}\,\rho_1^{3/2}$$

При $|\,A\,| < |\,B\,|$ растущего решения в виде луча нет. Покажем, что и в этом случае система (3.2) и, тем самым, система (3.1) неустойчивы.

Положим

$$F = \rho_1 + \frac{2A^2 + B^2}{B^2}\rho_3 - \frac{|A|}{|B|}\sqrt{\rho_1\rho_3}$$

Если $dF/dt > 0$, то F — функция Четаева системы (2.2), и неустойчивость доказана.

Заметим, что построенная функция Четаева гарантирует неустойчивость системы (2.1) независимо от знака $|\,A\,| - |\,B\,|$.

Два трехчастотных резонанса. Пусть

$$k = (k_1, k_2, k_3, 0),\ l = (0, l_2, l_3, l_4),\ |\,k_j\,| = |\,l_{j+1}\,| = 1$$

— резонансные векторы системы. Если среди отличных от нуля компонент обоих векторов есть перемена знака, то существует положительный вектор $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, $p_j > 0$, такой, что $(\rho, k) = (p, l) = 0$, и тогда положительный квадратичный интеграл $I = (p, l)$ [5] гарантирует устойчивость модельной системы.

Пусть теперь среди компонент одного из резонансных векторов (например, k) нет перемены знака, тогда $l_2 l_3 < 0$, так как иначе в системе были бы кратные корни ($|\,\omega_1\,| = |\,\omega_4\,|$). Итак, с точностью до знака l может иметь вид $l = (0, 1, -1, 1)$ либо $l = (0, 1, -1, -1)$.

Рассмотрим первый из этих случаев (второй изучается аналогично). Имеем

$$H = \Sigma\omega_\alpha\rho_\alpha + 2A\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3}\cos\psi_1 + 2B\sqrt{\rho_2\rho_3\rho_4}\cos\psi_2$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \psi_1,\ \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 = 0,$$
$$\varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 = \psi_2$$

Интегралы системы

$$I_1 = 2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3,\ I_2 = 2\rho_4 + \rho_3 - \rho_2,\ K = H - \Sigma\omega_\alpha\rho_\alpha$$

Рассмотрим инвариантное многообразие

$$\Omega\colon\ I_1 = I_2 = K = 0$$
$$\psi_1 = -\frac{\pi|A|}{2A},\qquad \psi_2 = -\frac{\pi|B|}{2B},\qquad \rho_1 = \frac{1}{2}(\rho_4 + \rho_3),\qquad \rho_2 = \rho_3 + 2\rho_4$$

Для оставшихся переменных на Ω получим

$$\rho_3^{\cdot} = (\sqrt{2}\,|\,A\,|\sqrt{(\rho_3 + \rho_4)\rho_3} - 2\,|\,B\,|\sqrt{\rho_3\rho_4})\sqrt{\rho_3 + 2\rho_4}$$
$$\rho_4^{\cdot} = 2\,|\,B\,|\sqrt{\rho_3\rho_4(\rho_3 + 2\rho_4)}$$

Если $|\,A\,| > \sqrt{2}\,|\,B\,|$, то система имеет растущее решение в виде луча

$$\rho_3 = k\rho_4(t),\qquad k = \frac{A^2 - 2B^2}{B^2},\qquad \rho_4^{\cdot} = 2\,|B|\sqrt{k(k+2)}\,\rho_4^{3/2}$$

При $|\,A\,| \leqslant \sqrt{2}\,|\,B\,|$ такого решения нет.

Рассмотрим функцию

$$F = (\sqrt{\rho_4} - \sqrt{\rho_3})/\,|\,B\,|$$

Имеем

$$dF/dt = (\sqrt{\rho_3} + \sqrt{\rho_4} - k^2\sqrt{\rho_3 + \rho_4})\sqrt{\rho_3 + 2\rho_4} \geqslant$$
$$\geqslant (1 - k^2)(\sqrt{\rho_3} + \sqrt{\rho_4})\sqrt{\rho_3 + 2\rho_4};\ k_2 = |\,A\,|/(\sqrt{2}\,|\,B\,|) < 1$$

Тем самым, F — функция Четаева.

Здесь использовано неравенство: $a + b - k^2\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \frac{1}{2}(1 - k^2)(a + b)$.

3. О несущественности старших членов. Как следует из результатов п. 2, неустойчивость в исследуемых модельных системах проявляется в результате: а) наличия растущего решения в виде инвариантного луча, либо б) наличия растущих решений, явный вид которых неизвестен и существование которых следует из существования функции Четаева.

Доказательство несущественности старших членов в случае а) подробно исследовано (например, [3]) и здесь не приводится.

В случае б) ситуация менее ясна. При доказательстве несущественности старших членов можно использовать ту же функцию Четаева, что в модельных системах. Случаи 1) и 3) в п. 2 одинаковы, и поэтому проведем доказательство для одного из них, а именно для зацепления двухчастотного и трехчастотного резонансов по двум частотам.

Рассматриваемая система совпадает в главных членах с системой (2.1). Перепишем ее, разложив правые части в ряд Тейлора в окрестности точки

$$\psi_1{}^\circ = -\frac{\pi\,|A|}{2A}, \qquad \psi_2{}^\circ = -\frac{\pi\,|B|}{2B}$$

Получим

$$\begin{aligned}
\rho_1{}^{\cdot} &= 4\,|A_1|\,\sqrt{\rho_1{}^2\rho_2} - 2\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3} + P(\rho, \psi)\\
\rho_2{}^{\cdot} &= 2\,|A_1|\,\sqrt{\rho_1{}^2\rho_2} + 2\sqrt{\rho_1\rho_1\rho_3} + \rho(\rho, \psi)\\
\rho_3{}^{\cdot} &= \phantom{2\,|A_1|\,\sqrt{\rho_1{}^2\rho_2} +{}} 2\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3} + P(\rho, \psi)\\
\psi_1{}^{\cdot} &= -2\,|A_1|\,\sqrt{\rho_2}\psi_1 + O(\sqrt{\rho}\,|\psi|^2) + O(\rho)\\
\psi_2{}^{\cdot} &= -\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1\rho_3}}(\rho_1+\rho_3)\psi_2 + O(\sqrt{\rho}\,|\psi|^2) + O(\rho)
\end{aligned}$$

$$(P(\rho, \psi) = O(\rho^{3/2}\,|\psi|) + O(\rho^2),\ dt_1 = dt/\,|B|,\ A_1 = A/\,|B|)$$

Замены переменных этого параграфа не канонические.

Введем для переменных ρ_j сферические координаты

$\rho_2 = R\sin^2\theta_1,\ \rho_1 = 2R\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2,\ \rho_3 = {}^2/_3R\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2$

Получим

$$\begin{aligned}
&dR/d\tau = \Pi(R,\ \theta_2) + O(R(|\theta_1| + |\psi|)) + O(R^{3/2})\\
&d\theta_2/d\tau = G_1(\theta_2) + O(|\theta| + |\psi|) + o(\sqrt{R})\\
&d\theta_1/d\tau = -(2\sqrt{2}/3)(1 + \sqrt{2}\,|A_1|)\sin\theta_2\cos\theta_2\theta_1 + O(|\theta_1|^2 +\\
&\quad + |\psi|) + O(\sqrt{R})\\
&d\psi_1/d\tau = -\sqrt{2}\,|A_1|\,\psi_1 + O(|\theta_1|^2 + |\psi|^2) + O(\sqrt{R})\\
&\frac{d\psi_2}{d\tau} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{(\cos^2\theta_2 + 3\sin^2\theta_2)}{\sin\theta_2\cos\theta_2} + O(|\theta_1|^2 + |\psi|^2) + O(\sqrt{R})\\
&\Pi = 4\sqrt{2}\,R\sin\theta_2(|A_1|\sin\theta_2 + \cos O_2/\sqrt{3})\\
&G_1 = (3/\sqrt{2})((2\,|A_1|\,/\sqrt{3})\sin\theta_2\cos\theta_2 - {}^1/_3\cos^2\theta_2)
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь использована замена переменных $d\tau = \sqrt{R}\,dt$, справедливая лишь при условии, что $\int\sqrt{R(t)}\,dt$ расходится. В рассматриваемой ситуации этот факт справедлив и следует, например, из следующей леммы.

Лемма. На любом решении $R(t)$, $R(0) > 0$ уравнения

$$dR/dt = R^{3/2}\,\Pi(\theta(t)),\quad |\Pi| < p^2$$

интеграл $\int\limits_0^\infty \sqrt{R(t)}\,dt$ расходится.

Напомним, что при $|A_1| < 1$ у модельной системы нет растущего луча и, тем самым, у угловой системы нет стационарной точки.

Пусть многообразие

$$\Omega = \{R,\ \theta,\ \psi\colon |\theta_1| + |\psi_1| + |\psi_2| < \varepsilon,\ R < R^\circ,\ 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi/2\}$$

Ω — инвариантно относительно системы (3.1); траектории лишь входят в эту область.

Рассмотрим функцию

$$F = R\left[\sin^2\theta_2 + \frac{1 + 3A_1{}^2}{3}\cos^2\theta_2 - \frac{A_1}{\sqrt{3}}\sin\theta_2\cos\theta_2\right]$$

Вычисляя $dF/d\tau$ на Ω, получим

$$dF/d\tau = |A_1| R [1 - \beta\varepsilon + O(\sqrt{R})] > 0$$

Тем самым, Ω, F — четаевская пара первого рода, и теорема доказана.

4. Теорема об устойчивости систем, близких к изучаемым критическим. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H(x, y) = H_0(x, y) + \alpha H_1(x, y), \quad H(0, 0) = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $H(x, y)$ — гладкая функция и разложение в ряд Тейлора начинается с квадратичных членов. Пусть $H_0(x, y)$ — гамильтониан одного из критических случаев, рассмотренных выше.

Теорема. Пусть при $\alpha = 0$ система, отвечающая гамильтониану H_0, неустойчива. Тогда для всякого α ($|\alpha| < \varepsilon$) существует решение $u_\alpha(t)$ системы (4.1), для которого $|u_\alpha(0)| < c|\alpha|^\varkappa$, $\sup_{t>0}|u_\alpha(t)| > b$ (b не зависит от α), $\varkappa = 1$.

Доказательство существования $x = 1$ стандартно [3] и здесь не приводится. Доказательство неулучшаемости этого показателя состоит в следующем. Выберем возмущение $\alpha H_1(x, y)$ так, что резонансные соотношения выполнены с точностью до ε: $(k\omega) = (l\omega) = \varepsilon$. Тогда существует положительный интеграл (безрезонансной задачи), действующий в полной ε-окрестности нуля. Следовательно, существует «пятно» Ω ($d\Omega \sim \varepsilon$). Это гарантирует неулучшаемость показателя $x = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. И.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонансов.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 738—744.
2. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 3, с. 423—431.
3. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Об устойчивости положения равновесия в критических случаях и в случаях, близких к критическим.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 595—604.
4. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1979, с. 58—139.
5. *Брюно А. Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона. Математические заметки. 1967, т. 1, вып. 3, с. 325—330.

Москва

Поступила в редакцию 9.III.1983

УДК 531.011

ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.

Рассматривается класс механических систем с качением типа гиростата, состоящих из основного тела (тела-носителя, платформы или корпуса экипажа) и тел, катящихся по неподвижной горизонтальной плоскости и сообщающих основному телу продольную скорость $v = \text{const}$. Принят нелинейный механизм упругого взаимодействия контактирующих тел в рамках аксиоматики Рокара [1], причем боковые реакции — монотонные функции углов увода. На основании качественного анализа фазовых траекторий показано, что область притяжения нулевого решения уравнений возмущенного движения неограниченная. Найдены условия, при которых область притяжения — фазовая плоскость. Приводится необходимое условие ограниченности области притяжения невозмущенного решения грубой динамической системы в терминах индекса Пуанкаре для особых точек, лежащих на границе области притяжения. Построен характерный фазовый портрет для конкретных значений параметров системы.

Формулировка задачи о плоскопараллельном движении несвободного гиростата с качением дана в [2]. Ограничимся поэтому краткой информацией об объекте исследования. Вокруг каждой из двух параллельных осей, неизменно связанных с основным телом, вращаются два геометрически и динамически симметричных тела, контакти-