Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 531.38

АСИМПТОТИЧЕСКИ МАЯТНИКОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА ГЕССА — АППЕЛЬРОТА

Вархалев Ю. П., Горр Г. В.

Изучаются асимптотически маятниковые движения тяжелого твердого тела, центр тяжести которого лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида (гироскоп Гесса—Аппельрота). На основе теоремы Ляпунова показано, что можно всегда так выбрать начальное положение и начальную угловую скорость этого гироскопа, что движение его при неограниченном возрастании времени будет асимптотически стремиться к вращению вокруг горизонтальной оси. Поскольку при этом начальные условия не удовлетворяют инвариантному соотношению Гесса, то указанный результат не может быть получен непосредственным обобщением работы [1], в которой асимптотически маятниковые движения для частного случая — решения Гесса — обнаружены путем построения фазовых траекторий.

Различные примеры асимптотических движений в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, указаны в [1—5].

Пусть центр тяжести тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида, построенного в неподвижной точке. Связав с этим телом специальную систему координат, запишем уравнения движения его относительно неподвижной точки в безразмерных переменных [6]

$$
\begin{aligned}
&x^{\cdot} = -xz, \quad y^{\cdot} = (a - a_2)xz + yz - \nu_2 \\
&z^{\cdot} = -(a - a_2)xy + x^2 - y^2 + \nu_1 \\
&\nu^{\cdot} = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \quad \nu_1^{\cdot} = \omega\nu_2 - \omega_2\nu, \quad \nu_2^{\cdot} = \omega_1\nu - \omega\nu_1 \\
&\omega = ax + y, \quad \omega_1 = a_2y + x, \quad \omega_2 = a_2z
\end{aligned} \tag{1}
$$

где x, y, z — компоненты вектора момента количества движения, $\omega, \omega_1, \omega_2$ — компоненты вектора угловой скорости, ν, ν_1, ν_2 — компоненты единичного вектора, указывающего направление силы тяжести, a, a_2 — безразмерные параметры, характеризующие отношения компонент гирационного тензора; точка над переменными означает дифференцирование по времени.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + a_2(y^2 + z^2) + 2xy - 2\nu = 2E \\
&\nu^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1, \quad x\nu + y\nu_1 + z\nu_2 = k
\end{aligned} \tag{2}
$$

Частное решение уравнений (1), описывающее движение тела вокруг горизонтальной оси, и значения постоянных интегралов (2) на этом решении обозначим теми же переменными со звездочкой. Тогда это решение имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x^* = y^* = 0, \quad z^* = \varphi^{\cdot}/a_2, \quad \nu^* = \cos\varphi, \quad \nu_1^* = -\sin\varphi, \quad \nu_2^* = 0 \\
&\varphi^{\cdot} = \sqrt{\mu\cos\varphi - \lambda} \quad (\mu = 2a_2, \ \lambda = -2a_2E^*)
\end{aligned} \tag{3}
$$

(Постоянная интеграла момента количества движения, очевидно, равна нулю.)

В работе [6] исследованы уравнения в вариациях для решения (3) лишь с точки зрения их интегрирования, в [7] рассмотрена задача устойчивости по Ляпунову указанного решения в предположении, что максимальное отклонение центра тяжести тела от положения устойчивого равновесия мало. Здесь поставим задачу об изучении условий асимптотических движений тела, которые при $t \to \infty$ стремятся к движению физического маятника, описываемому соотношениями (3), в случае его вращения, т. е. при $E^* > 1$. Тогда из (3) имеем

$$
\begin{aligned}
&\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn}(\rho t, k'), \quad \varphi^{\cdot} = 2\rho\operatorname{dn}(\rho t, k') \\
&k' = \sqrt{\frac{2}{1 + E^*}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{\mu - \lambda}{2}} \\
&(\sin\varphi = 2\operatorname{sn}(\rho t, k')\operatorname{cn}(\rho t, k'), \ \cos\varphi = 1 - 2\operatorname{sn}^2(\rho t, k'))
\end{aligned} \tag{4}
$$

Составим уравнения для возмущений. По аналогии с [7] положим

$$(5) \qquad x = x^* + x_1, \quad y = y^* + x_2, \quad z = z^* + y_1$$
$$\nu = \nu^* + y_2, \quad \nu_1 = \nu_1^* + y_3, \quad \nu_2 = \nu_2^* + x_3$$

В силу соотношений (4) переменная φ монотонно возрастает с течением времени, поэтому примем ее за основную переменную. Подставив соотношения (5) в уравнения (1) и обозначив дифференцирование по φ штрихом, с учетом (3) получим

$$(6) \qquad x_1' = -\varkappa\left(x_1 + \frac{1}{z^*}x_1y_1\right)$$
$$x_2' = \varkappa\left\{(a-a_2)x_1 + x_2 - \frac{x_3}{z^*} + \frac{y_1}{z^*}[(a-a_2)x_1 + x_2]\right\}$$
$$x_3' = \frac{\varkappa}{z^*}[(\cos\varphi + a\sin\varphi)x_1 + (\sin\varphi + a_2\cos\varphi)x_2 +$$
$$+ y_2(x_1 + a_2x_2) - y_3(x_2 + ax_1)]$$
$$y_1' = \frac{\varkappa}{z^*}[y_3 - (a-a_2)x_1x_2 + x_1^2 - x_2^2]$$
$$y_2' = -\frac{\sin\varphi}{z^*}y_1 + y_3 + \frac{1}{z^*}y_1y_3 - \frac{\varkappa x_3}{z^*}(x_1 + a_2x_2)$$
$$y_3' = -\frac{\cos\varphi}{z^*}y_1 - y_2 - \frac{1}{z^*}y_1y_2 + \frac{\varkappa x_3}{z^*}(x_2 + ax_1), \quad \varkappa = \frac{1}{a_2}$$

Рассмотрим систему, соответствующую первому приближению, которое обозначим $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}$. Как отмечено в [7], в результате получим две замкнутые системы дифференциальных уравнений. Из (6) вытекает

$$(7) \qquad x_1^{(1)\prime} = -\varkappa x_1^{(1)}, \quad x_2^{(1)\prime} = \varkappa(a-a_2)x_1^{(1)} + \varkappa x_2^{(1)} - \frac{\varkappa}{z^*}x_3^{(1)}$$
$$x_3^{(1)\prime} = \varkappa\frac{\cos\varphi + a\sin\varphi}{z^*}x_1^{(1)} + \varkappa\frac{\sin\varphi + a_2\cos\varphi}{z^*}x_2^{(1)}$$
$$(8) \qquad y_1^{(1)\prime} = \frac{\varkappa}{z^*}y_3^{(1)}, \quad y_2^{(1)\prime} = -\frac{\sin\varphi}{z^*}y_1^{(1)} + y_3^{(1)}, \quad y_3^{(1)\prime} = -\frac{\cos\varphi}{z^*}y_1^{(1)} - y_2^{(1)}$$

Интегралы (2) порождают и интегралы систем (7) и (8)

$$x_1^{(1)}\cos\varphi - x_2^{(1)}\sin\varphi + z^*x_3^{(1)} = c^{(1)}$$
$$\frac{z^*}{\varkappa}y_1^{(1)} - y_2^{(1)} = c^{(2)}, \quad y_2^{(1)}\cos\varphi - y_3^{(1)}\sin\varphi = c^{(3)}$$

В силу соотношения $\nu^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$ из (2) постоянная $c^{(3)}$ в реальном движении должна быть принята равной нулю.

Обозначим через $\mathbf{X}(\varphi) = \|x_{sj}\|$, $\mathbf{Y}(\varphi) = \|y_{sj}\|$ фундаментальные матрицы, $\mathbf{x}$ — вектор с координатами x_1, x_2, x_3, $\mathbf{y}$ — вектор с координатами y_1, y_2, y_3. Тогда общие решения уравнений (7), (8) таковы:

$$(9) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{X}(\varphi)\mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y}(\varphi)\mathbf{c}$$

где $\mathbf{b}$ — вектор с координатами b_1, b_2, b_3, $\mathbf{c}$ — вектор с координатами c_1, c_2, c_3 и

$$(10) \qquad x_{11} = e^{-\varkappa\varphi}, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 0, \quad x_{21} = \varkappa z^* e^{\varkappa\varphi}I_1, \quad x_{22} = \frac{z^*}{2\varkappa\rho}e^{\varkappa\varphi}$$
$$x_{23} = -2\varkappa\rho^2 z^* e^{\varkappa\varphi}I_2, \quad x_{31} = -\frac{\cos\varphi}{z^*}e^{-\varkappa\varphi} + \varkappa\sin\varphi e^{\varkappa\varphi}I_1$$
$$x_{32} = \frac{\sin\varphi}{2\varkappa\rho}e^{\varkappa\varphi}, \quad x_{33} = 2\varkappa\rho\left(\frac{1}{z^*} - \rho e^{\varkappa\varphi}\sin\varphi I_2\right)$$
$$y_{11} = \sin\varphi, \quad y_{12} = -\frac{\varkappa}{z^*} + \varkappa^2\sin\varphi I_3, \quad y_{13} = -\frac{\varkappa}{z^*}\cos\varphi + \varkappa^2\sin\varphi I_4$$
$$y_{21} = \frac{z^*}{\varkappa}\sin\varphi, \quad y_{22} = \varkappa z^*\sin\varphi I_3, \quad y_{23} = -\cos\varphi + \varkappa z^*\sin\varphi I_4$$
$$y_{31} = \frac{z^*}{\varkappa}\cos\varphi, \quad y_{32} = \varkappa z^*\cos\varphi I_3, \quad y_{33} = \sin\varphi + \varkappa z^*\cos\varphi I_4$$
$$I_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(\frac{a-a_2}{z^*} + \frac{\cos\varphi}{z^{*3}}\right)e^{-2\varkappa\varphi}d\varphi, \quad I_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{e^{-\varkappa\varphi}}{z^{*3}}d\varphi$$

$$I_3 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{z^{*3}}, \qquad I_4 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos\varphi}{z^{*3}} d\varphi$$

Как уже отмечалось, в силу связи $y_2^{(1)}\cos\varphi - y_3^{(1)}\sin\varphi = 0$ постоянная интегрирования c_3 должна быть принята равной нулю. Сохранение этой постоянной в формулах (9) не сказывается на дальнейших исследованиях и удобно для применения формального аппарата Ляпунова.

Поскольку система уравнений (7), (8) правильная (ее коэффициенты — функции периода 2π), то для использования теоремы Ляпунова о существовании у системы (6) решений в виде рядов по восходящим степеням переменных $q_s = \alpha_s e^{-\lambda_s\varphi}$ рассмотрим характеристические числа системы первого приближения (7), (8).

Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор с координатами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. Тогда общее решение системы уравнений (7), (8) таково:

$$\mathbf{u}^{(1)} = b_1\mathbf{u}_1^{(1)} + b_2\mathbf{u}_2^{(1)} + b_3\mathbf{u}_3^{(1)} + c_1\mathbf{u}_4^{(1)} + c_2\mathbf{u}_5^{(1)} + c_3\mathbf{u}_6^{(1)} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_1^{(1)} = (x_{11}, x_{21}, x_{31}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2^{(1)} = (x_{12}, x_{22}, x_{32}, 0, 0, 0) \\ &\mathbf{u}_3^{(1)} = (x_{13}, x_{23}, x_{33}, 0, 0, 0), \quad \mathbf{u}_4^{(1)} = (0, 0, 0, y_{11}, y_{21}, y_{31}) \\ &\mathbf{u}_5^{(1)} = (0, 0, 0, y_{12}, y_{22}, y_{32}), \quad \mathbf{u}_6^{(1)} = (0, 0, 0, y_{13}, y_{23}, y_{33}) \end{aligned} \tag{12}$$

Система решений (12) представляет собой нормальную систему решений. Используя определение и свойства характеристических чисел Ляпунова, при помощи (10) найдем характеристические числа решений (12): характеристическое число решения $\mathbf{u}_1^{(1)}$ равно $\varkappa > 0$, решения $\mathbf{u}_2^{(1)}$ равно $-\varkappa$, а характеристические числа остальных решений равны нулю. Согласно теореме Ляпунова, система уравнений для возмущений (6) имеет решение следующего вида:

$$x_s = \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(s)} (b_1 e^{-\varkappa\varphi})^k, \qquad y_s = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(s)} (b_1 e^{-\varkappa\varphi})^k \qquad (s = 1, 2, 3) \tag{13}$$

где $L_k^{(s)}$, $M_k^{(s)}$ — не зависящие от постоянной b_1 непрерывные функции φ, характеристические числа которых не менее нуля.

Для нахождения соотношений (13) может быть применен метод Ляпунова—Пуанкаре. В силу того что в нормальной системе решений только решение $u_1^{(1)}$ имеет положительное характеристическое число, необходимо положить в (9), (11) $b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Пусть

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} + \ldots + \mathbf{x}^{(m)} + \ldots, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{y}^{(2)} + \ldots + \mathbf{y}^{(m)} + \ldots \tag{14}$$

где $\mathbf{x}^{(m)}$, $\mathbf{y}^{(m)}$ — члены m-го измерения. Тогда $\mathbf{y}^{(1)} = 0$, $\mathbf{x}^{(1)} = b_1(x_{11}, x_{21}, x_{31})$. Обозначим через $\mathbf{X}^{-1}(\varphi)$, $\mathbf{Y}^{-1}(\varphi)$ матрицы, обратные фундаментальным $\mathbf{X}(\varphi)$, $\mathbf{Y}(\varphi)$. Здесь

$$\begin{aligned} &x_{11}^* = e^{\varkappa\varphi}, \quad x_{12}^* = 0, \quad x_{13}^* = 0, \quad x_{21}^* = -2\rho\varkappa^2 e^{\varkappa\varphi} I_1 + \\ &+ 2\rho^2\varkappa\cos\varphi I_2, \quad x_{22}^* = \frac{2\rho\varkappa e^{-\varkappa\varphi}}{z^*} - 2\rho^2\varkappa\sin\varphi I_2, \\ &x_{23}^* = 2\rho^2\varkappa z^* I_2, \quad x_{31}^* = \frac{\cos\varphi}{2\rho\varkappa}, \quad x_{32}^* = -\frac{\sin\varphi}{2\rho\varkappa}, \quad x_{33}^* = \frac{z^*}{2\rho\varkappa} \\ &y_{11}^* = \varkappa z^* I_3, \quad y_{12}^* = \frac{\varkappa}{z^*}\sin\varphi - \varkappa^2 I_3 + \varkappa^2\cos\varphi I_4 \\ &y_{13}^* = \frac{\varkappa}{z^*}\cos\varphi - \varkappa^2\sin\varphi I_4, \quad y_{21}^* = -\frac{z^*}{\varkappa}, \quad y_{22}^* = 1, \quad y_{23}^* = 0 \\ &y_{31}^* = 0, \quad y_{32}^* = -\cos\varphi, \quad y_{33}^* = \sin\varphi, \quad z^* = \varkappa\sqrt{\mu\cos\varphi - \lambda} \end{aligned} \tag{15}$$

Члены разложений (14) при $m > 1$ находим из рекуррентных соотношений

$$\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{X}(\varphi)\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{X}^{-1}(\varphi)\,\mathbf{f}^{(m-1)}(\varphi)\,d\varphi, \qquad \mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{Y}(\varphi)\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{Y}^{-1}(\varphi)\,\mathbf{g}^{(m-1)}(\varphi)\,d\varphi$$

$$(\mathbf{f}^{(m-1)} = (f_1^{(m-1)}, f_2^{(m-1)}, f_3^{(m-1)}), \qquad \mathbf{g}^{(m-1)} = (g_1^{(m-1)}, g_2^{(m-1)}, g_3^{(m-1)}))$$

Элементы матриц $\mathbf{X}^{-1}$, $\mathbf{Y}^{-1}$ определены соотношениями (15).

В силу исходной системы (6) имеем равенства

$$f_1^{(m-1)} = -\frac{\varkappa}{z^*}\sum_{q=1}^{m-1} x_1^{(q)} y_1^{(m-q)}, \quad f_2^{(m-1)} = \frac{\varkappa}{z^*}\sum_{q=1}^{m-1} y_1^{(q)} \left[x_2^{(m-q)} + (a-a_2)\, x_1^{(m-q)}\right]$$

$$f_3^{(m-1)} = \frac{\varkappa}{z^*}\sum_{q=1}^{m-1} \left[y_2^{(q)} \left(x_1^{(m-q)} + a_2 x_2^{(m-q)}\right) - y_3^{(q)} \left(x_2^{(m-q)} + a x_1^{(m-q)}\right)\right]$$

$$g_1^{(m-1)} = \frac{\varkappa}{z^*}\sum_{q=1}^{m-1} \left[x_1^{(q)} x_1^{(m-q)} - x_2^{(q)} x_2^{(m-q)} + (a_2 - a)\, x_1^{(q)} x_2^{(m-q)}\right]$$

$$g_2^{(m-1)} = \frac{1}{z^*}\sum_{q=1}^{m-1} \left[y_1^{(q)} y_3^{(m-q)} - \varkappa x_3^{(q)} \left(x_1^{(m-q)} + a_2 x_2^{(m-q)}\right)\right]$$

$$g_3^{(m-1)} = \frac{1}{z^*}\sum_{q=1}^{m-1} \left[- y_1^{(q)} y_2^{(m-q)} + \varkappa x_3^{(q)} \left(x_2^{(m-q)} + a x_1^{(m-q)}\right)\right]$$

Так как ряды (13) абсолютно сходящиеся для всех $\varphi \geqslant \varphi_0$ и $b_1 < b^*$, то при $\varphi \to \infty$ имеем $x_s \to 0$, $y_s \to 0$ $(s = 1, 2, 3)$. Это означает, что можно всегда так выбрать начальное положение и начальную угловую скорость гироскопа Гесса—Аппельрота, что движение его при неограниченном возрастании времени будет асимптотически стремиться к вращению вокруг горизонтальной оси. Такие движения называют асимптотически маятниковыми.

Заметим, что класс асимптотически маятниковых движений гироскопа Гесса—Аппельрота, описываемый соотношениями (13), не содержит в себе как частный случай решение Гесса. Действительно, это решение для системы дифференциальных уравнений (6) характеризуется инвариантным соотношением $x_1 = 0$. В силу первого уравнения этой системы, если в начальный момент выполняется равенство $x_1 = 0$, то оно выполняется и в любой другой момент времени. Для рассматриваемого класса асимптотически маятниковых движений гироскопа Гесса—Аппельрота постоянная b_1 отлична от нуля, и поэтому $x_1 \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев А. М.* О движении тела в случае Гесса.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 1. К.: Наук. думка, 1969, с. 12—27.
2. *Докшевич А. И.* Качественное исследование решения Горячева — Чаплыгина.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 4. К.: Наук. думка, 1972, с. 3—7.
3. *Докшевич А. И.* Об одном частном решении системы Эйлера — Пуассона при условиях Ковалевской.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 12. К.: Наук. думка, 1980, с. 16—19.
4. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики.— Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2, с. 285—289.
5. *Вархалев Ю. П., Горр Г. В.* Новый класс асимптотически равномерных движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 397—400.
6. *Докшевич А. И.* Об уравнениях в вариациях, соответствующих вращению тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, вокруг горизонтальной оси.— В кн.: Математическая физика. Вып. 5. К.: Наук. думка, 1968, с. 68—73.
7. *Архангельский Ю. А.* Об устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в одном частном случае.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 294—302.

Донецк

Поступила в редакцию 21.XII.1982