

УДК 539.375

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ТРЕЩИНЫ С УЧАСТКАМИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И ОТРЫВА ПО ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

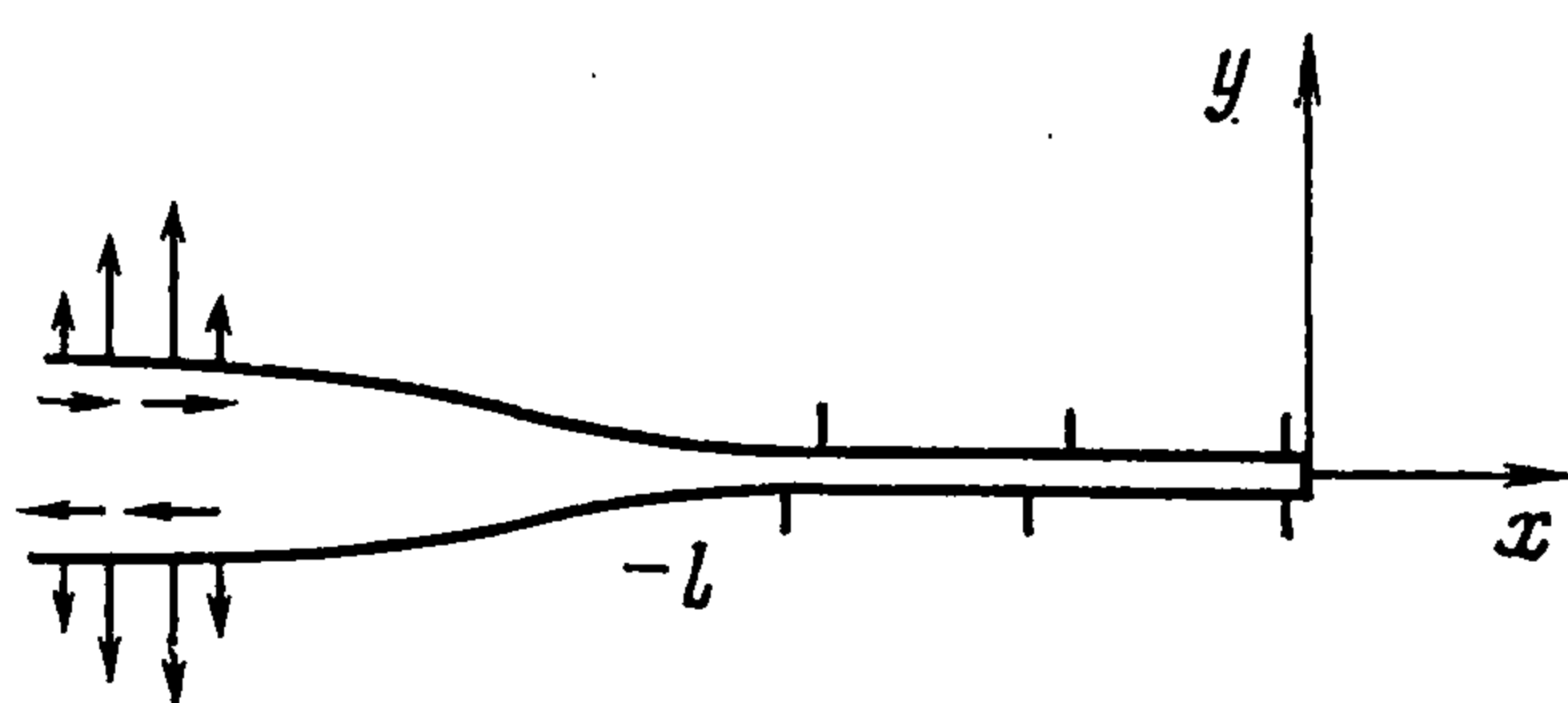
Симонов И. В.

Изучено дорелеевское движение трещины (разреза) с конечным участком проскальзывания, примыкающим к краю трещины, и полубесконечным участком отрыва по линии соединения двух упругих материалов под действием подвижной нагрузки. Задача сначала сводится к краевой задаче Гильберта с тремя различными особыми точками для системы двух аналитических функций комплексного переменного. Затем — при помощи техники конформного отображения, аналитического продолжения и исключения особенностей — к задаче с двумя особыми точками, допускающей расщепление и, вследствие этого, решение в интегралах типа Коши. Из дополнительных физических условий (отсутствие сил притяжения на участке проскальзывания, непересечения берегов разреза в зоне отрыва), формулируемых в виде неравенств, однозначно определяется длина участка проскальзывания l . Для сосредоточенной нагрузки, расположенной на расстоянии L от края разреза, решение получено в явной форме.

Показано, что $l/L \rightarrow 0$, если сближать упругие материалы по свойствам; $l/L \rightarrow 1$, если скорость движения края трещины приближается к первой из релеевских скоростей. В случае $l \ll r \ll L$ (r — расстояние от края) существует промежуточная асимптотика, совпадающая с асимптотикой решения аналогичной задачи без учета зоны проскальзывания [1].

На границе раздела упругих материалов при смене краевых условий типа отрыв — сцепление возникает осциллирующая особенность [2]. Впервые это обнаружено, по-видимому, в [3], затем ряд авторов рассматривал задачи о трещинах на границе раздела (см., например, [4]).

Анализ локальных решений показывает, что можно ликвидировать эту нежелательную с физической точки зрения особенность (она указывает на взаимопроникновение берегов) введением впереди точки отрыва участка проскальзывания, поскольку разрывы краевых условий типа отрыв — скольжение и скольжение — сцепление порождают неосциллирующие особенности и, кроме того, за краем трещины поперечного сдвига на границе раздела появляются неограниченные при приближении к этому краю сжимающие напряжения. Впервые такая схема (без должного обоснования) была рассмотрена в статике для трещины конечной длины [5] — задача сведена к сингулярному интегральному уравнению, решенному численно. Для полубесконечной трещины



Фиг. 1

в [6] указано на неединственность решения подобного рода задач (фактически, не найдено условие для выбора единственного корня уравнения для определения l). При вдавливании штампа, сцепленного с упругой средой, участки проскальзывания с аналогичной целью вводились гораздо раньше [7].

1. По границе раздела двух упругих полуплоскостей $y > 0$ (среда 1) и $y < 0$ (среда 2) со скоростью s движется полубесконечная трещина. Декартову систему координат $x = y_1$, $y = y_2$ свяжем с краем разреза (фиг. 1). При $x > 0$ ($y = 0$) полуплоскости спаяны, при $-l < x < 0$ материалы проскальзывают один относительно другого без трения, на луче $x < -l$ берега разреза не взаимодействуют (отрыв). Такое движение трещины вызвано стационарной нормальной и касательной нагруз-

кой, приложенной симметрично к берегам на участке $x_1 < x < x_2 < -l$ (координаты x_1 и x_2 заданы, а величина l подлежит определению). Будем изучать поля напряжений σ_{km}^j и скоростей u_m^j ($j, k, m = 1, 2$; индекс j фиксирует среду) при сделанных физических предположениях о геометрии трещины. Оправдание этих предположений последует ниже и будет заключаться в проверке естественных дополнительных условий.

Сформулируем граничные условия задачи при $y = 0$

$$(1.1) \quad [\sigma_{2m}] = [u_m] = 0, \quad x > 0; \quad [\sigma_{22}] = [u_2] = 0, \quad \sigma_{12}^j = 0, \quad -l < x < 0 \\ \sigma_{22}^j = -\sigma(x), \quad \sigma_{12}^j = \tau(x), \quad x < -l \quad (\sigma(x) = \tau(x) = 0 \\ x \in [x_1, x_2])$$

$$(1.2) \quad \sigma_{22}^j \leq 0, \quad -l < x < 0, \quad [U_2] = -\frac{1}{c} \int_{-l}^x [u_2] dx \geq 0, \quad x < -l$$

Квадратные скобки означают скачок величины при переходе из среды 1 в среду 2, $j, m = 1, 2$, (U_1, U_2) — вектор смещения, $\sigma(x)$, $\tau(x)$ — непрерывные по Гёльдеру функции.

В задаче динамической теории упругости (плоская деформация) напряжения и скорости в дозвуковом установившемся режиме можно выразить через аналитические функции $\chi_m^j(z_{kj})$ комплексного переменного z_{kj} посредством формул (представления, близкие к представлениям Л. А. Галина [7])

$$(1.3) \quad \sigma_{11}^j = R_j^{-1} \operatorname{Re} \{ -\alpha_j \beta_{2j} \chi_1^j(z_{1j}) + \beta_j \beta_{2j} \chi_1^j(z_{2j}) + \alpha_j \beta_j \chi_2^j(z_{1j}) - \\ - \beta_{1j} \beta_{2j} \chi_2^j(z_{2j}) \} \\ \sigma_{12}^j = R_j^{-1} \operatorname{Im} \{ \beta_{1j} \beta_{2j} \chi_1^j(z_{1j}) - \beta_j^2 \chi_1^j(z_{2j}) - \beta_j \beta_{1j} [\chi_2^j(z_{1j}) - \chi_2^j(z_{2j})] \} \\ \sigma_{22}^j = R_j^{-1} \operatorname{Re} \{ \beta_j \beta_{2j} [\chi_1^j(z_{1j}) - \chi_1^j(z_{2j})] - \beta_j^2 \chi_2^j(z_{1j}) + \beta_{1j} \beta_{2j} \chi_2^j(z_{2j}) \} \\ u_1^j = \frac{c}{2\mu_j R_j} \operatorname{Re} \{ \beta_{2j} \chi_1^j(z_{1j}) - \beta_j \beta_{2j} \chi_1^j(z_{2j}) - \beta_j \chi_2^j(z_{1j}) + \beta_{1j} \beta_{2j} \chi_2^j(z_{2j}) \} \\ u_2^j = \frac{c}{2\mu_j R_j} \operatorname{Im} \{ -\beta_{1j} \beta_{2j} \chi_1^j(z_{1j}) + \beta_j \chi_1^j(z_{2j}) + \beta_j \beta_{1j} \chi_2^j(z_{1j}) - \\ - \beta_{1j} \chi_2^j(z_{2j}) \} \\ \beta_{mj} = \sqrt{1 - c^2/c_{mj}^2}, \quad 2\beta_j = 1 + \beta_{2j}^2, \quad \alpha_j = 1 + \beta_{1j}^2 - \beta_j, \quad z_{mj} = x + i\beta_{mj}y$$

Здесь μ_j — модули сдвига, c_{1j} и c_{2j} — скорости объемных волн расширения и сдвига, $R_j = \beta_{1j} \beta_{2j} - \beta_j^2$ (c_{Rj} — единственные положительные корни уравнений Релея $R_j(c) = 0$).

На границе раздела $z_{mj} = x$ ($y = 0$)

$$(1.4) \quad \sigma_{12}^j = \operatorname{Im} \chi_1^j, \quad \sigma_{22}^j = \operatorname{Re} \chi_2^j, \quad u_1^j = c \operatorname{Re} \{ b_{2j} \chi_1^j + a_j \chi_2^j \} \\ u_2^j = -c \operatorname{Im} \{ a_j \chi_1^j + b_{1j} \chi_2^j \}, \quad 2\mu_j R_j (a_j, b_{mj}) = (\beta_{1j} \beta_{2j} - \\ - \beta_j, \beta_{mj} (1 - \beta_j))$$

Решение ищем в энергетическом классе функций с конечными всюду смещениями. Отсюда вытекают оценки ($z = x + iy$ — вспомогательная переменная)

$$(1.5) \quad |\chi_m^j| < \frac{\operatorname{const}}{|z - z_k|^{1/2}}, \quad z \rightarrow z_k, \quad |\chi_m^j| < \frac{\operatorname{const}}{|z|^{1+\varepsilon}}, \quad z \rightarrow \infty \\ \varepsilon > 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -l \quad (k, j, m = 1, 2)$$

Условие непрерывности напряжений σ_{m2}^j на всей оси $y = 0$, вытекающее из (1.1), при учете (1.4), (1.5) эквивалентно равенствам

$$\chi_1^1(z) = -\overline{\chi_1^2(\bar{z})} \equiv \chi_1(z), \quad \chi_2^1(z) = \overline{\chi_2^2(\bar{z})} \equiv \chi_2(z), \quad \operatorname{Im} z > 0$$

которые сокращают число неизвестных комплексных функций до двух, а выражения для скачков скоростей принимают вид ($y = 0$)

$$(1.6) \quad [u_1] = c \operatorname{Re} \{q\chi_1 + d\chi_2\}, [u_2] = -c \operatorname{Im} \{d\chi_1 + p\chi_2\}$$

$$d = a_1 - a_2, p = b_{11} + b_{12}, q = b_{21} + b_{22}$$

Оставшиеся условия (1.1) в терминах χ_m составят краевые условия задачи Римана — Гильберта [8]

$$(1.7) \quad \operatorname{Im}\chi_1 = \tau(x), \operatorname{Re}\chi_2 = -\sigma(x), x < -l, \operatorname{Im}\chi_1 = \operatorname{Im}\chi_2 = 0,$$

$$-l < x < 0$$

$$q \operatorname{Re}\chi_1 + d \operatorname{Re}\chi_2 = 0, d \operatorname{Im}\chi_1 + p \operatorname{Im}\chi_2 = 0, x > 0$$

Ее можно переписать в форме задачи Гильберта [9], если ввести кусочно-голоморфный вектор

$$(1.8) \quad \chi = (\chi_1, \chi_2), \operatorname{Im}z > 0; \chi(z) = (\overline{\chi_1(z)}, \overline{\chi_2(\bar{z})}), \operatorname{Im}z < 0$$

$$\chi^+ = g(x)\chi^- + G(x), G = 2(i\tau(x), -\sigma(x))$$

$$g_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, x < -l; g_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -l < x < 0$$

$$g_2 = \frac{1}{S} \begin{vmatrix} d^2 + pq & 2pd \\ -2qd & -d^2 - pq \end{vmatrix}$$

$$x > 0 (S = d^2 - pq)$$

Индексы плюс или минус означают сужение на действительную ось сверху или снизу. В силу (1.7) вектор χ аналитичен в плоскости с разрезами вдоль действительной оси $x < -l$ и $x > 0$. Он удовлетворяет условиям сопряжения (1.8) с ограничениями на поведение в особых точках (1.5). Эта обобщенная задача с тремя особыми точками относится к числу особых задач линейного сопряжения, поскольку положение одной особой точки не известно заранее. Подобные задачи возникают в теории фильтрации, где разработан общий алгоритм нахождения эффективного решения [10]. Он заключается в построении разложений функций (сначала канонических локальных решений) в ряды Лорана в окрестности каждой из особых точек и существенно опирается на аналитическую теорию дифференциальных уравнений.

2. Следуя [9, 10], проведем анализ локальных решений. Обозначим через λ_{kn} ($k = 1, 2; n = 1, 2, 3$) корни характеристических уравнений для особых точек

$$(2.1) \quad \det \| g_{k-1}g_k^{-1} - \lambda E \| = 0, \det \| g_0g_2^{-1} - \lambda E \| = 0$$

где E — единичная матрица, λ — параметр. Для задачи (1.8) эти корни таковы: $\lambda_{11} = \lambda_{12} = 1, \lambda_{22} = \lambda_{21} = -1, \lambda_{13} = \lambda_{23}^{-1} = (d + \sqrt{pq}) / (d - \sqrt{pq})$. При $c < \min(c_{R1}, c_{R2}) \equiv c_*$ имеем $p > 0, q > 0, S < 0, \sqrt{pq} > |d|$, поэтому $-\infty < \lambda_{23} < \lambda_{13} < 0$. Далее считаем для определенности $d < 0$ (если $d > 0$, то следует поменять местами среду 1 и среду 2; случай $d = 0$ будет рассмотрен отдельно). Введем показатели $\rho_{kn} = (\ln \lambda_{kn}) / (2\pi i)$, определенные с точностью до целых чисел. В силу (1.5) все особые точки регулярные, случаев кратных корней уравнений (2.1) нет, а тогда главные части разложений канонических решений χ_{kn} в ряды Лорана около особых точек пропорциональны $(z - z_m)^{\rho_{km}}$ ($k, m, n = 1, 2$) и $z^{-\rho_{k3}}$ соответственно [9, 10]. Функции χ_m могут быть представлены в виде линейных комбинаций пары функций χ_{kn} около каждой особой точки

$z = z_n$. Сами показатели выберем исходя из оценок (1.5)

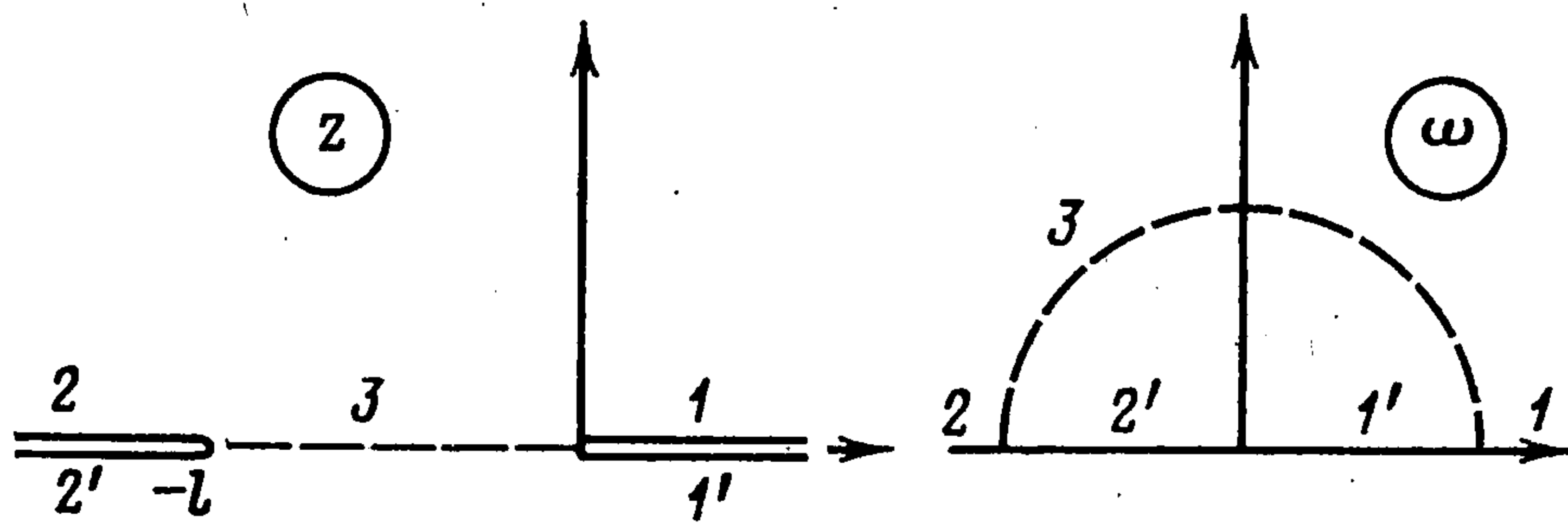
$$(2.2) \quad \rho_{11} = \rho_{12} = 0, \quad \rho_{21} = \rho_{22} = -1/2, \quad \rho_{13} = \bar{\rho}_{23} = 3/2 - i\alpha \\ 2\pi\alpha = \ln \lambda, \quad \lambda = (\sqrt{pq} - d)/(\sqrt{pq} + d)$$

Тем самым фиксирована ветвь решения.

3. Конформное преобразование

$$(3.1) \quad \omega = (2z + l + 2\sqrt{z(z+l)})/l \quad (z = (l/4)(\omega + \omega^{-1} - 2)) \\ \sqrt{z(z+l)^+} = -\sqrt{z(z+l)^-}, \quad x \in [-l, 0], \quad \sqrt{z(z+l)^+} = \\ = \sqrt{z(z+l)^-}, \quad x \in]-l, 0[$$

переводит плоскость z с указанными в п. 1 разрезами в верхнюю полу-
плоскость ω . Точкам $z = -l, 0$ соответствуют точки $\omega = -1, 1$,



Фиг. 2

а отрезок $\{-l \leq x \leq 0, y = 0\}$ переходит в единичную полуокруж-
ность на полуоси ω (фиг. 2).

Для исключения особенностей в точках $\omega = \pm 1$ (полюса) введем но-
вые неизвестные функции]

$$(3.2) \quad Y_1 = \sqrt{z(\omega)}(\omega + 1) \chi_1, \quad iY_2 = \sqrt{z(\omega)}(\omega + 1) \chi_2 \\ \sqrt{z^+} = -\sqrt{z^-}, \quad x > 0, \quad \sqrt{z^+} = \sqrt{z^-}, \quad x < 0$$

В силу (2.2), (3.1) точки $\omega = \pm 1$ для вектор-функции $Y = (Y_1, Y_2)$
будут обыкновенными точками. Далее снова будем рассматривать вектор Y
как кусочно-голоморфный, заданный во всей плоскости ω с разрезом
вдоль действительной оси ($Y_k(z) = -\overline{Y_k(\bar{z})}$, $\text{Im } z < 0$). Граничные
значения Y удовлетворяют таким условиям сопряжения ($\omega = \xi + i\eta$):

$$(3.3) \quad Y^+ = DY^-, \quad \xi > 0, \quad Y^+ = Y^- + 2i\Sigma, \quad \xi < 0 \\ \frac{\Sigma}{i\sqrt{|x(\xi)|}(\xi + 1)} = \begin{cases} (\tau, \sigma), & -\infty < \xi < -1 \\ (-\tau, \sigma), & -1 < \xi < 0 \end{cases} \\ D = \frac{-1}{s} \begin{vmatrix} d^2 + pq & -2dpi \\ 2dqi & d^2 + pq \end{vmatrix}$$

Задача (3.3) является задачей уже с двумя особыми точками $\omega = 0, \infty$.
Матрица $T = \{t_{km}\}$, $t_{11} = t_{12} = 1$, $t_{21} = \bar{t}_{22} = i\sqrt{q/p}$ диагонализует
матрицу D

$$\Lambda = T^{-1}DT = \begin{vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad (\lambda > 1)$$

Для новой вектор-функции $W = T^{-1}Y \equiv (W_1, W_2)$ получим из (3.3)
расщепленную задачу сопряжения, индекс которой равен нулю [8]

$$(3.4) \quad W^+ = \Lambda W^-, \quad \xi > 0, \quad W^+ = W^- + 2iT^{-1}\Sigma, \quad \xi < 0$$

Единственное решение (3.4), удовлетворяющее нужному условию на бесконечности ($W = O(1)$, $\omega \rightarrow \infty$), можно записать в форме [8]

$$W_k = \frac{\omega^{\rho_k}}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{W_k^{\circ}(\xi) d\xi}{\xi^{\rho_k} (\xi - \omega)}, \quad \rho_1 = \bar{\rho}_2 = 1 - i\alpha, \quad (W_1^{\circ}, W_2^{\circ}) = T^{-1}\Sigma$$

$$(\omega^{i\alpha} = \exp(i\alpha \ln |\omega| - \alpha \arg \omega), \quad 0 \leq \arg \omega \leq 2\pi)$$

Вектор χ выражается через W по формуле

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{TW}{\sqrt{z}(\omega + 1)}$$

В результате вычисления произведения матриц и векторов и преобразования интеграла по отрезку $-1 \leq \xi \leq 0$ к интегралу по лучу $-\infty < \xi \leq -1$ с использованием свойства симметрии функций получим основной результат в виде

$$(3.5) \quad \chi = \frac{i}{2\pi\sqrt{z}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\mathbf{H}^{(1)} + i \frac{(\omega - 1)(\xi + 1)}{(\omega + 1)(\xi - 1)} \mathbf{H}^{(2)} \right] \frac{(\xi - \xi^{-1}) \sqrt{|x(\xi)|}}{(\xi - \omega)(\xi - \omega^{-1})} d\xi$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = [\sigma \sqrt{p/q} \sin(\alpha \ln |\xi|) + \tau \cos(\alpha \ln |\xi|)] \quad (h_+, h_- \sqrt{q/p})$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = [\sigma \sqrt{p/q} \cos(\alpha \ln |\xi|) - \tau \sin(\alpha \ln |\xi|)] \quad (h_-, h_+ \sqrt{q/p})$$

$$h_{\pm} = \lambda^{1/2} \omega^{i\alpha} \pm \lambda^{-1/2} \omega^{-i\alpha}, \quad \omega = \omega(z), \quad \xi_k = \xi(x_k) \quad (k = 1, 2)$$

Угловое распределение искомых функций около точки $z = 0$ и коэффициенты интенсивности можно получить из асимптотики этого решения при $z \rightarrow 0$, не зависящей от параметра l (см. также [11])

$$\chi \sim \frac{-i}{2\pi\sqrt{\lambda z}} \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \left[\sigma \sqrt{\frac{p}{q}} \sin(\alpha \ln |\xi(x)|) + \tau \cos(\alpha \ln |\xi(x)|) \right] \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

Анализ асимптотики решения в окрестности точки $z = -l$ показывает, что особенности решения $\sim (z + l)^{-1/2}$ независимо от знака коэффициента отвечает такое сочетание знаков $\sigma_{22}(x, 0)$ при $x \rightarrow -l + 0$ и $[u_2]$ при $x \rightarrow -l - 0$, что одновременно удовлетворить (локально) неравенствам (1.2) нельзя. Отсюда следует вывод о необходимости погашения вклада полюса $\omega = -1$ в решение. Приравнявая вычет функции $\mathbf{X}(\omega)$ в точке $\omega = -1$ нулю, получим одно уравнение для определения l (оно одинаково для каждой из составляющих вектора)

$$\int_{x_1}^{x_2} [\sigma(x) \sqrt{p/q} \cos(\alpha \ln |\xi|) - \tau(x) \sin(\alpha \ln |\xi|)] \sqrt{|x|} \xi^{-1} \xi' dx = 0$$

$$l\xi = 2x + l - 2\sqrt{x(x+l)}, \quad \xi' = d\xi/dx = l^{-1} [2 + (1 + l/x)^{1/2} + (1 + l/x)^{-1/2}]$$

Решение этого уравнения не единственно. Глобальная проверка условий (1.2) позволяет выделить единственный корень.

Дальнейшие рассуждения проведем для случая сосредоточенной нагрузки $\sigma = \Sigma \delta(x + L)$, $\tau = T \delta(x + L)$. Уравнение для l примет вид

$$(3.6) \quad \sqrt{p/q} \Sigma \cos(\alpha \ln |\xi_L|) - T \sin(\alpha \ln |\xi_L|) = 0 \quad (\xi_L = \xi(L))$$

Из условия $\sigma_{22} \leq 0$ при $\omega = e^{i\theta}$ с учетом (3.6) и принятого предположения относительно знака d получаем

$$(3.7) \quad T \cos(\alpha \ln |\xi_L|) + \sqrt{p/q} \Sigma \sin(\alpha \ln |\xi_L|) = \sqrt{T^2 + (p/q) \Sigma^2} \\ \sin(\alpha \ln |\xi_L|) > 0, \quad \Sigma > 0$$

Обратно, из (3.7) следует $\sigma_{22} \leq 0$ при $\omega = e^{i\theta}$ ($0 < \theta < \pi$).

Принимая во внимание (3.6), (3.7) и равенство $\xi'(L) = 4\xi_L^2/[l(\xi_L^2 - 1)]$, запишем окончательный вид решения (3.5) для сосредоточенной нагрузки

$$(3.8) \quad \chi = \frac{2i\xi_L \sqrt{L(qT^2 + p\Sigma^2)}}{\pi l \sqrt{\lambda z} (\xi_L - \omega)(\xi_L - \omega^{-1})} \begin{vmatrix} q^{-1/2} (\omega^{i\alpha} \lambda + \omega^{-i\alpha}) \\ p^{-1/2} (\omega^{i\alpha} \lambda - \omega^{-i\alpha}) \end{vmatrix}$$

Осталось непроверенным условие непересечения берегов разреза (пока оно удовлетворяется только асимптотически при $x \rightarrow -l - 0$). На основании (1.2), (1.6), (3.8) запишем

$$[U_2] = -dTh(-x - L) - 2I \sqrt{\frac{L(qT^2 + p\Sigma^2)}{lp}} \\ I(\xi_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\xi_0} \frac{\sin(\alpha \ln |\xi|) (\xi + 1) d\xi}{|\xi|^{1/2} (\xi_L - \xi)(\xi_L - \xi^{-1})}$$

где $h(x)$ — ступенчатая функция. Можно показать, что при $0 \leq \alpha \ln |\xi_L| \leq \pi$ функция $I(\xi)$ не меняет знака, а $[U_2] > 0$ внутри интервала $\xi_L < \xi < -1$ ($-L < x < -l$). Для других (положительных в силу $|\xi_L| > 1$) значений $\alpha \ln |\xi_L|$ — корней уравнения (3.6) — функция $I(\xi)$ знакопеременна, т. е. условие «непересечения» нарушается в области $l < -x < L$. Отсюда (а при $\Sigma = 0$ $T \neq 0$, учитывая (3.7)) следует выбор единственного корня (3.6)

$$|\xi_L| = e^{\gamma/\alpha}, \quad l = 4L |\xi_L| / (|\xi_L| + 1)^2 \\ \gamma = \min \left\{ \text{Arctg} \left(\frac{\Sigma}{T} \sqrt{\frac{p}{q}} \right) > 0 \right\} \quad (\Sigma \neq 0) \\ \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (T = 0, \Sigma \neq 0) \\ \gamma = 0, \quad l = L \quad (\Sigma = 0, T > 0), \quad \gamma = \pi \quad (\Sigma = 0, T < 0)$$

В точке $x = -L$ функция $[U_2](x)$ имеет логарифмическую особенность, за исключением случая $\Sigma = 0, T > 0$, когда она испытывает разрыв первого рода. Полностью удовлетворить требованию $[U_2] \geq 0$ при $x < -L$ не удастся, по-видимому, ни при каких сочетаниях Σ и T : при $x \rightarrow -\infty$ она осциллирует, затухает и знакопеременна (при $T = 0, \Sigma > 0$ и $\Sigma = 0, T \neq 0$ это можно доказать). Первый минимум (в отрицательной области) она достигает в точке $-x = L_* = l(e^{-\pi/\alpha} + 1)/4$, за исключением случая $T < 0, \Sigma = 0$, в котором функция $[U_2]$ имеет логарифмическую особенность с изменением знака при переходе через точку $x = -L$. Однако решение следует считать приемлемым в случаях, когда $L_* \gg L$, поскольку неучтенные в постановке силы отталкивания, возникающие при взаимодействии берегов, будут, во-первых, незначительны по величине, во-вторых, далеко расположены от края разреза (расчет для $l/L = 0,5$ в типичных случаях] $\Sigma > 0, T = 0$ и $T > 0, \Sigma = 0$ дает значение $L_* \approx \approx 4,5 L$). Введением некоторой дополнительной системы малых сил, действующей на берега разреза при $x \ll -L$, можно надеяться в этих случаях удовлетворить условию «непересечения» полностью.

4. В малой окрестности края разреза ($|z| \ll l$) поведение решения на разрезе таково:

$$(4.1) \quad \sigma_{12}^j \sim K_2 (2\pi x)^{-1/2} \sim \text{const} \cdot u_2^j, \quad \sigma_{22}^j \sim u_1^j = O(1), \quad x \rightarrow +0 \\ \sigma_{22}^j \sim K_1 (2\pi |x|)^{-1/2} \sim d [u_1]/(cS), \quad x \rightarrow -0 \\ K_2 = -(1 + \lambda)[(p\Sigma^2 + qT^2)/(2\pi\lambda qL)]^{1/2} = -(p/d) K_1$$

При $c \rightarrow 0$ (статика) эти результаты, не зависящие от l , согласуются с решением [6] для схемы [5], причем выражения для статических коэффициентов интенсивности K_1 и K_2 являются точными, а не асимптотически точными при $l/L \rightarrow 0$, как указано в [6].

Следуя [4], вычислим поток энергии F , приходящийся на единицу длины края разреза: $F = -cSK_2^2/(4p)$ (особенность у напряжения σ_{22}^j слева от края разреза, как выясняется, не вносит вклада в величину F). Он равен мощности, развиваемой нагрузкой, — в другие особые точки нет стока энергии. Участок скольжения остается плоским, поскольку из (1.4), (1.7) вытекает, что на нем $u_2^j \equiv 0$. Вблизи точки отрыва

$$(4.2) \quad \sigma_{22}^j(x, 0) = O((l+x)^{3/2}), \quad x \rightarrow -l+0$$

Если $l \ll L$ и, более того, можно указать z , такие, что $l \ll |z| \ll L$, то имеет место промежуточная асимптотика. На продолжении трещины при $l \ll x \ll L$ ($1 \ll \xi \ll \xi_L \approx 4L/l$)

$$(4.3) \quad \sigma_{22}^j + i\sigma_{12}^j \sim \frac{K_2}{\sqrt{2\pi x}} \left[\sqrt{\frac{q}{p}} \sin\left(\alpha \ln \frac{4x}{l}\right) - i \cos\left(\alpha \ln \frac{4x}{l}\right) \right]$$

При $T = 0$ имеем $\alpha \ln(4L/l) \approx \alpha \ln |\xi_L| = \pi/2$, и (4.3) совпадает с соответствующей асимптотикой решения задачи о трещине без учета зоны проскальзывания [1]. Совершая предельный переход к случаю одинаковых материалов ($\mu_1 \rightarrow \mu_2$, $c_{m1} \rightarrow c_{m2}$), получим $\alpha \rightarrow 0$, $l/L \rightarrow 0$ ($\Sigma > 0$). При этом области, в которых действуют локальные асимптотики (4.1), (4.2), исчезают, а промежуточная асимптотика переходит в асимптотику соответствующей задачи о трещине отрыва (если $\Sigma = 0$, то — сдвига) в однородной плоскости. С другой стороны, устремляя средю 2 к жесткой (параметры μ_2 , c_{12} , c_{22} — к бесконечности) при $c = \text{const}$ обнаружим, что величина l/L растет, достигая максимума. Этот факт находится в согласии со следующим физическим объяснением появления площадки контакта с проскальзыванием: материалы испытывают различное растяжение внешних слоев при изгибе, вследствие этого и появляются касательные силы на границе раздела при попытке оторвать два упругих материала один от другого.

При приближении скорости края к релеевской ($c \rightarrow c_*$) можно убедиться, что $\lambda \rightarrow \infty$, $l \rightarrow L$. Заметим, что в статике при $T = 0$ величины l/L порядка $5 \cdot 10^{-4}$. Если $c = c_d$, где c_d — корень уравнения $d(c) = 0$, то $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $l = 0$, как и в случае одинаковых материалов (поведение решений также качественно одинаково). Корень c_d может существовать в изучаемом диапазоне скоростей, если $\mu_2(1 - 2\nu_1) < \mu_1(1 - 2\nu_2)$ и $c_* = c_{R1}$ или $\mu_2(1 - 2\nu_1) > \mu_1(1 - 2\nu_2)$ и $c_* = c_{R2}$ (ν_j — коэффициенты Пуассона).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В. О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов. — Инж. ж. МТТ, 1966, № 5, с. 93—102.
2. Achenbach J. D., Bazant Z. P., Khetan R. P. Elastodynamic neartip fields for a rapidly propagating interface crack. — Internat. J. Engng. Sci., 1976, v. 14, No. 9, p. 797—809.
3. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. — Bull. Seismol. Soc. America, 1959, v. 49, No. 2, p. 199—204.
4. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.

5. *Comninou M.* The interface crack.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, No. 4, p. 631—636.
6. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (an analytical treatment).— Internat. J. Fract., 1982, v. 18, No. 3, p. 161—177.
7. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
8. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
9. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
10. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977, 664 с.
11. *Симонов И. В.* О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела упругих материалов.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 497—506.

Москва

Поступила в редакцию
28.1.1983