Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 539.374

О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Кузьменко В. И.

Рассматривается задача о взаимодействии штампа и упругопластического тела при непропорциональном изменении заданных нагрузок и с учетом неопределенности площадки контакта. Предполагается, что свойства материала описываются дифференциально-линейными или дифференциально-нелинейными соотношениями между скоростями напряжений и скоростями деформаций, охватывающими достаточно широкую группу теорий пластичности. Показано, что исходная задача в обобщенной постановке эквивалентна некоторому квазивариационному неравенству относительно скоростей перемещений. С использованием постановки в форме квазивариационного неравенства изучаются условия существования решения, предлагается и обосновывается метод численного исследования.

Отметим, что аппарат интегральных уравнений, широко используемый в теории упругости, удается применить только к некоторым специальным классам контактных задач теории пластичности [1, 2]. Работы по общим вопросам теории контактных задач для упругопластических тел относятся к отдельным моделям пластичности [3—6], а получившие большое развитие численные методы применяются к контактным задачам при сложном нагружении с использованием эвристических алгоритмов [7—9], требующих дополнительного исследования и обоснования.

1. Общая постановка задачи. Рассмотрим квазистатический процесс деформирования упругопластического тела, занимающего область Ω трехмерного декартова пространства, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью Γ. Перемещения и деформации считаются малыми. Обозначим через t монотонно возрастающий параметр, связанный с процессом нагружения, который будем называть временем. Решение задачи рассматривается на промежутке времени $[0, T]$. Обозначим через $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ в момент времени $t \in [0, T]$. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ тело находится в ненапряженном и недеформированном состоянии. Точкой будем обозначать дифференцирование по времени, запятой — по пространственным переменным. Принимается правило суммирования по повторяющимся индексам.

Предполагается, что поведение материала тела в процессе сложного нагружения может быть описано дифференциально-линейными или дифференциально-нелинейными соотношениями вида

$$\sigma_{ij}^{\cdot} = A_{ijpq}(x, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r, \varepsilon_{\xi\eta}^{\cdot})\, \varepsilon_{pq}^{\cdot} \tag{1.1}$$

Функция A_{ijpq} является однородной нулевой степени относительно $\varepsilon_{\xi\eta}^{\cdot}$ или вообще не зависит от $\varepsilon_{\xi\eta}^{\cdot}$ в случае дифференциально-линейных соотношений. Под $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ понимаются значения некоторых функционалов истории деформирования. В форме (1.1) могут быть представлены соотношения для различных вариантов теории течения и для теорий, основанных на концепции скольжения [10]. Соотношения (1.1) — частный вариант теории упругопластических процессов [11]. В случае $A_{ijpq} = A_{ijpq}(x)$ выражения (1.1) соответствуют линейной теории упругости для неоднородного анизотропного тела. Отметим, что соотношения вида

(1.1) могут быть применены как для процессов активного нагружения, так и для процессов разгрузки.

Введем функцию

$$W(x, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_r, \dot{\varepsilon}_{\xi\eta}) = \frac{1}{2} A_{ijpq}(x, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_r, \dot{\varepsilon}_{\xi\eta})\, \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{pq} \tag{1.2}$$

и наложим на A_{ijpq} ограничения таким образом, чтобы были выполнены условия:

а) $W(\ldots, \dot{\varepsilon}_{\xi\eta})$ — выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция $\dot{\varepsilon}_{\xi\eta}$;

б) существуют такие $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, не зависящие от истории деформирования, что выполнены неравенства

$$\alpha_1 \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \leqslant W(\ldots, \dot{\varepsilon}_{\xi\eta}) \leqslant \alpha_2 \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{1.3}$$

Поверхность Γ состоит из трех частей Γ_c, Γ_σ, Γ_u. Обозначим через $\nu(x)$ внешнюю по отношению к Ω нормаль к поверхности Γ в точке x.

На поверхность Γ_c действует жесткий штамп, причем фактические площадки контакта заранее не заданы. Предполагается, что трение между поверхностью Γ_c тела и поверхностью штампа отсутствует. Если задан закон движения штампа как жесткого тела, то может быть однозначно построена функция $\Phi(x, t)$, значения которой равны расстоянию от точки $x \in \Gamma_c$ до поверхности штампа в момент времени t. Расстояние измеряется вдоль направления нормали $\nu(x)$. Функция $\Phi(x, t)$ может принимать и отрицательные значения, что соответствует внедрению штампа. Поскольку при $t = 0$ тело находится в недеформированном состоянии, необходимо потребовать, чтобы $\Phi(x, 0) \geqslant 0$, $\forall x \in \Gamma_c$.

Обозначим через u_ν, u_τ, σ_ν, σ_τ нормальные и касательные компоненты векторов перемещений и напряжений в точках поверхности Γ_c. Тогда взаимодействие тела и штампа в точках поверхности возможного контакта описывается следующими условиями:

$$\begin{gathered} \sigma_\nu(x, t) \leqslant 0, \ \sigma_\tau(x, t) = 0, \ u_\nu(x, t) \leqslant \Phi(x, t) \\ \sigma_\nu(x, t)\,[u_\nu(x, t) - \Phi(x, t)] = 0, \ \forall x \in \Gamma_c, \ \forall t \in [0, T] \end{gathered} \tag{1.4}$$

Условие $u_\nu(x, t) \leqslant \Phi(x, t)$ выражает требование взаимного непроникания тела и штампа, а условие $\sigma_\nu(x, t) \leqslant 0$ означает отсутствие растягивающих напряжений в точках контактной поверхности. Подчеркнем, что фактические площадки контакта при формулировке условий (1.4) не задаются.

На поверхности Γ_σ заданы усилия

$$\sigma_{ij}(x, t)\,\nu_j(x) = S_i(x, t), \ S_i(x, 0) = 0, \ \forall x \in \Gamma_\sigma, \ \forall t \in [0, T] \tag{1.5}$$

а на поверхности $\Gamma_u \neq \phi$ — перемещения

$$u_i(x, t) = U_i(x, t), \ U_i(x, 0) = 0, \ \forall x \in \Gamma_u, \ \forall t \in [0, T] \tag{1.6}$$

Тело Ω находится также под действием объемных нагрузок

$$Q_i(x, t), \ Q_i(x, 0) = 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall t \in [0, T]$$

Исходная задача состоит в определении перемещений $u_i(x, t)$, деформаций $\varepsilon_{ij}(x, t)$, напряжений $\sigma_{ij}(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям равновесия, соотношениям Коши, соотношениям (1.1), граничным условиям (1.5), (1.6), условиям на контактной поверхности (1.4) и начальным условиям $u_i(x, 0) = \varepsilon_{ij}(x, 0) = \sigma_{ij}(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

2. Постановка в форме квазивариационного неравенства. Введем, прежде всего, некоторые функциональные пространства для определения классов допустимых функций. Под $L^2(P)$ понимаем гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом на многообразии P; скалярное произведение в $L^2(P)$ определено следующим образом:

$$(w_1, w_2) = \int\limits_P w_1 w_2 \, dP$$

Введем пространство С. Л. Соболева $H \equiv [W_2^1 \ (\Omega)]^3$ вектор-функций $w(x) = (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$, таких, что $w_i \in L^2(\Omega)$, $w_{i,j} \in L^2(\Omega)$. Наделим H структурой гильбертова пространства, указав скалярное произведение

$$(w^{(1)}, w^{(2)})_H = (w_i^{(1)}, w_i^{(2)})_{L^2(\Omega)} + (w_{i,j}^{(1)}, w_{i,j}^{(2)})_{L^2(\Omega)}$$

Наконец, определим гильбертово пространство $L^2(0, T; H)$ вектор-функций $w(x, t)$ со скалярным произведением

$$(w^{(1)}, w^{(2)})_{L^2(0,T;H)} = \int\limits_0^T (w^{(1)}, w^{(2)})_H \, dt$$

Как обычно в гильбертовых пространствах, под нормой понимаем $\| w \| = \sqrt{(w, w)}$.

В дальнейшем считаем скорости перемещений $v^\cdot(x, t)$ элементами пространства $L^2(0, T; H)$. Введем множество V допустимых скоростей перемещений, в которое включим скорости $v^\cdot(x, t)$, удовлетворяющие условиям (1.6) и кинематическим условиям из (1.4)

$$V = \Big\{ v^\cdot \in L^2(0, T; H) \, \Big| \int\limits_0^t v_i^\cdot(x, \tau)\, d\tau = U_i(x, t), \quad \forall x \in \Gamma_u,$$

$$\int\limits_0^t v_\nu^\cdot(x, \tau)\, d\tau \leqslant \Phi(x, t), \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad \forall t \in [0, \ T] \Big\}$$

Получим аналог принципа возможных скоростей перемещений применительно к контактным задачам с неопределенными площадками контакта. Действительные скорости перемещений будем обозначать через $u_i^\cdot$, кинематически возможные — через $v_i^\cdot$.

Определим тензор возможных скоростей деформаций соотношениями Коши

$$\zeta_{ij}^\cdot = {}^1/_2 \, (v_{i,j}^\cdot + v_{j,i}^\cdot)$$

Под $\varepsilon_{ij}^\cdot$, $\sigma_{ij}^\cdot$ понимаем компоненты тензоров действительных скоростей деформаций и действительных скоростей напряжений.

Применяя к тождеству

$$-\int\limits_\Omega (\sigma_{ij,j}^\cdot + Q_i^\cdot)(v_i^\cdot - u_i^\cdot)\, d\Omega = 0, \quad \forall v^\cdot \in V$$

теорему Остроградского — Гаусса, получаем с учетом условий (1.4)—(1.6) интегральное равенство

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}^\cdot (\zeta_{ij}^\cdot - \varepsilon_{ij}^\cdot)\, d\Omega - \int\limits_\Omega Q_i^\cdot (v_i^\cdot - u_i^\cdot)\, d\Omega -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_\sigma} S_i^\cdot (v_i^\cdot - u_i^\cdot)\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_c} \sigma_\nu^\cdot (v_\nu^\cdot - u_\nu^\cdot)\, d\Gamma = 0, \ \forall v^\cdot \in V, \ \forall t \in [0, T] \tag{2.1}$$

Введем в множество V подмножество $K(u)$ вектор-функций $v^{\cdot}(x, t)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$(2.2)\qquad v_\nu(x,t)\equiv\int_0^t v_\nu^{\cdot}(x,\tau)\,d\tau=\Phi(x,t)$$

для всех $(x, t)\in\Gamma_c\times[0, T]$, таких, что

$$u_\nu(x,t)\equiv\int_0^t u_\nu^{\cdot}(x,\tau)\,d\tau=\Phi(x,t)$$

Можно показать, что в точках фактического контакта в течение времени контактирования, за исключением моментов начального касания и отставания, имеет место равенство

$$(2.3)\qquad v_\nu^{\cdot}(x, t) = u_\nu^{\cdot}(x, t),\ \forall v^{\cdot}\in K(u)$$

В точках Γ_c, свободных от контактирования, $\sigma_\nu^{\cdot}=0$ и, следовательно

$$(2.4)\qquad \sigma_\nu^{\cdot}(v_\nu^{\cdot}-u_\nu^{\cdot})=0,\ \forall v^{\cdot}\in K(u),\ \text{почти всюду в } \Gamma_c\times[0, T]$$

Рассмотрим теперь равенство (2.1), считая $v^{\cdot}$ элементом множества $K(u)$. Интегрируя на промежутке $[0, T]$, с учетом (2.4) получаем

$$(2.5)\qquad \int_0^T\left\{\int_\Omega \sigma_{ij}^{\cdot}(\zeta_{ij}^{\cdot}-\varepsilon_{ij}^{\cdot})\,d\Omega-\int_\Omega Q_i^{\cdot}(v_i^{\cdot}-u_i^{\cdot})\,d\Omega-\right.$$
$$\left.-\int_{\Gamma_c} S_i^{\cdot}(v_i^{\cdot}-u_i^{\cdot})\,d\Gamma\right\}dt=0,\ \forall v^{\cdot}\in K(u)$$

Выразим $\sigma_{ij}^{\cdot}$ через $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$ согласно (1.1) и преобразуем (2.5) к виду:

$$(2.6)\qquad J_1(u^{\cdot},v^{\cdot}-u^{\cdot})\equiv\int_0^T[a(\ldots,u^{\cdot},v^{\cdot}-u^{\cdot})-$$
$$-F(v^{\cdot}-u^{\cdot})]\,dt=0,\ \forall v^{\cdot}\in K(u)$$
$$a(\ldots,u^{\cdot},v^{\cdot})=\int_\Omega A_{ijpq}(\ldots,\varepsilon_{\xi\eta})\,\varepsilon_{ij}^{\cdot}\zeta_{pq}^{\cdot}\,d\Omega$$
$$F(v^{\cdot})=\int_\Omega Q_i^{\cdot}v_i^{\cdot}\,d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma} S_i^{\cdot}v_i^{\cdot}\,d\Gamma$$

Соотношения (2.6) аналогичны вариационному уравнению в скоростях перемещений для классических краевых задач и отличается тем, что допустимые скорости $v^{\cdot}$ принадлежат множеству $K(u)$, зависящему от искомого решения.

Преобразуем (2.6) в эквивалентную форму таким образом, чтобы допустимые скорости являлись элементами множества V. При $v^{\cdot}\in V\setminus K(u)$ выражение $J_1(u^{\cdot}, v^{\cdot}-u^{\cdot})$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если добавить к $J_1(u^{\cdot}, v^{\cdot}-u^{\cdot})$ слагаемые, принимающие достаточно большие значения при нарушении множества $K(u)$, то для всех $v^{\cdot}\in V$ полученное выражение будет неотрицательным. В частности, для всякого $v^{\cdot}\in V$ можно указать такое $\varepsilon_0(v)>0$, что

$$(2.7)\qquad J_1(u^{\cdot},v^{\cdot}-u^{\cdot})+\int_0^T\int_{\Gamma_c}[\sigma_\nu(u)(v-u)/\varepsilon]\,d\Gamma\,dt\geqslant 0,\ \forall\varepsilon<\varepsilon_0(v)$$

Введем функцию $\psi(\sigma_\nu(u), v-u)$ следующим образом:

$$\psi(\sigma_\nu(u), v-u)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\nu(u)(v-u)/\varepsilon,\ \forall v^{\cdot}\in V$$

Очевидно, что $\psi(\sigma_\nu(u), v-u)=+\infty$, если $\sigma_\nu(u)<0$, $v<\Phi$, и

$\psi(\sigma_\nu(u), v-u) = 0$ в остальных случаях. Формально переходя в (2.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$
(2.8)\qquad J_2(\sigma_\nu(u), u^\cdot, v^\cdot - u^\cdot) \equiv J_1(u^\cdot, v^\cdot - u^\cdot) + \int_0^T F_c(\sigma_\nu(u), v-u)\,dt \geqslant 0, \quad \forall v^\cdot \in V
$$

$$
F_c = \int_{\Gamma_c} \psi(\sigma_\nu(u), v-u)\,d\Gamma
$$

Если $\psi(\sigma_\nu(u), v-u) = +\infty$ на множестве ненулевой меры в $\Gamma_c \times [0, T]$, то по определению неравенство (2.8) считается выполненным.

Таким образом, если $u^\cdot \in V$ — решение задачи в исходной (дифференциальной) постановке, то $u^\cdot \in V$ удовлетворяет также квазивариационному неравенству (2.8). Понятие «квазивариационное неравенство» употребляется в связи с тем, что в отличие от вариационных неравенств формулировка неравенства (2.8) зависит от искомого решения [3].

Докажем, что решение квазивариационного неравенства (2.8) является обобщенным решением задачи в постановке п. 1. Ограничимся условиями (1.4); выполнение остальных уравнений и условий можно обосновать точно так же, как и в случае контактных задач для нелинейно-упругого тела, формально заменив перемещения скоростями [4]. Пусть $u^\cdot(x, t) \in V$ — решение (2.8). Введем обозначения $\Gamma_c^{(1)}(t) = \{x \in \Gamma_c \mid u_\nu(x, t) = \Phi(x, t)\}$, $\Gamma_c^{(2)}(t) = \Gamma_c \setminus \Gamma_c^{(1)}(t)$ и покажем, что $\sigma_\nu(x, t) \leqslant 0$, $\forall x \in \Gamma_c^{(1)}(t)$, $\sigma_\nu(x, t) = 0$, $\forall x \in \Gamma_c^{(2)}(t)$. Действительно, если $\sigma_\nu(x, t) > 0$ для x, образующих множество ненулевой меры в $\Gamma_c^{(1)}(t)$, то для всех $v^\cdot(x, t) \in V$, таких, что $v_\nu(x, t) < \Phi(x, t)$, $\forall x \in \Gamma_c^{(1)}(t)$, имеем $F_c(\sigma_\nu(u), v-u) = -\infty$. Если же $\sigma_\nu(x, t) \neq 0$, $x \in \Gamma_c^{(2)}(t)$, то, выбрав $v_i = u_i \pm \varphi_i$ на $\Gamma_c^{(2)}(t)$, также приходим к противоречию с квазивариационным неравенством (2.8).

Окончательно сформулируем полученные в п. 2 результаты.

Теорема 1. Решение исходной задачи, поставленной в п. 1, удовлетворяет квазивариационному неравенству (2.8); наоборот, решение (2.8) является обобщенным решением задачи в исходной (дифференциальной) постановке.

3. Метод решения квазивариационного неравенства (2.8). Разобьем отрезок $[0, T]$ на n отрезков при помощи $n+1$ узлов $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_l, t_{l+1}, \ldots, t_n = T$; $t_l < t_{l+1}$. Поскольку скорости $v^\cdot(x, t)$, как элементы пространства $L^2(0, T; H)$, могут иметь разрывы по времени, будем различать моменты времени $t_l - 0$, предшествующие t_l, и моменты времени $t_l + 0$, следующие за t_l. Внутри каждого интервала (t_l, t_{l+1}) аппроксимируем $v^\cdot(x, t)$ линейными функциями $v_n^\cdot(x, t)$. Нижний индекс n соответствует разбиению промежутка $[0, T]$ на n частей. Из требований, наложенных на $v^\cdot \in V$, следует, что узловые скорости $v_n^\cdot(x, t_l - 0)$ и $v_n^\cdot(x, t_l + 0)$ в рамках используемой кусочно-линейной аппроксимации должны удовлетворять условиям

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
& v_{\nu n}(x, t_l - 0) \equiv v_{\nu n}(x, t_{l-1} + 0) + [v_{\nu n}^\cdot(x, t_{l-1} + 0) + v_{\nu n}^\cdot(x, t_l - 0)]\,\Delta t_l/2 \leqslant \Phi(x, t_l - 0), \ \forall x \in \Gamma_c, \ l = 1, 2, \ldots, n, \ \Delta t_l = t_l - t_{l-1} \\
& v_{\nu n}^\cdot(x, t_l + 0) \leqslant \Phi^\cdot(x, t_l + 0) \text{ для всех } x \in \Gamma_c, \text{ таких, что} \\
& v_{\nu n}(x, t_l - 0) = \Phi(x, t_l - 0), \ l = 0, 1, \ldots, n-1 \\
& v_i^\cdot(x, t_l - 0) = U_i^\cdot(x, t_l - 0), \ l = 1, 2, \ldots, n \\
& v_i^\cdot(x, t_l + 0) = U_i^\cdot(x, t_l + 0), \ l = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Обозначим через V_n множество кусочно-линейных функций $v_n^{\cdot} \in L^2(0, T; H)$, удовлетворяющих (3.1). Пусть $u_n^{\cdot} \in V_n$ — искомое приближенное решение, $\sigma_{\nu n}$ — соответствующие нормальные напряжения на Γ_c. Положим $\sigma_{\nu n}(x, t) = \sigma_{\nu n}(x, t_{l-1}+0)$, $\forall x \in \Gamma_c$, $\forall t \in (t_{l-1}+0, t_l-0)$ и введем подмножество $K_n(u_n) \subset V$ функций $v_n^{\cdot} \in V_n$, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$(3.2) \qquad v_{\nu n}^{\cdot}(x, t_{l-1}+0) = \Phi^{\cdot}(x, t_{l-1}+0), \; v_{\nu n}(x, t_l - 0) = \Phi(x, t_l - 0)$$

для всех $x \in \Gamma_c$, таких, что $\sigma_{\nu n}(x, t_{l-1}+0) < 0$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Заменим интеграл в (2.8) интегральной суммой по формуле трапеций. При $v_n^{\cdot} \in K_n(u_n)$ значения ψ в узлах $t_l \pm 0$ равны нулю и соответствующие слагаемые в интегральной сумме отсутствуют. Пусть приближенное решение $u_n^{\cdot}(x, t) \in V_n$ уже получено при $t \leqslant t_l$. Покажем, как определить узловые значения $u_n^{\cdot}(x, t)$ при $t = t^* = t_l + 0$ и при $t = t^{**} = t_{l+1} - 0$. Обозначим через $\varkappa_{1n}^{(l)}, \ldots, \varkappa_{rn}^{(l)}$ значения функционалов истории деформирования, соответствующих моменту времени $t_l - 0$. Согласно условиям (3.1) и (3.2), введем множество K_n^* допустимых скоростей в момент времени t^* с учетом того, что при $t \leqslant t_l$ приближенное решение $u_n^{\cdot}$ уже получено: $K_n^* = \{v_n^{\cdot}(x, t^*) \in H \mid v_{in}^{\cdot}(x, t^*) = U_i^{\cdot}(x, t^*)$, $\forall x \in \Gamma_u$, $v_{\nu n}^{\cdot}(x, t^*) \leqslant \Phi^{\cdot}(x, t^*)$ для всех $x \in \Gamma_c$, таких, что $u_{\nu n}(x, t^*) = \Phi(x, t^*)$, $v_{\nu n}^{\cdot}(x, t^*) = \Phi^{\cdot}(x, t^*)$ для всех $x \in \Gamma_c$, таких, что $\sigma_{\nu n}(x, t^*) < 0\}$.

Потребуем, чтобы слагаемые в интегральной сумме, соответствующие моменту времени t^*, были неотрицательны, и получим для определения $u_n^{\cdot *} = u_n^{\cdot}(x, t^*)$ следующее вариационное неравенство:

$$(3.3) \qquad a(x, \varkappa_{1n}^{(l)}, \ldots, \varkappa_{rn}^{(l)}, u_n^{\cdot *}, v_n^{\cdot *} - u_n^{\cdot *}) \geqslant F(t^*, v_n^{\cdot *} - u_n^{\cdot *}), \quad \forall v^{\cdot *} \in K_n^*$$

Считая $u_n^{\cdot}(x, t^*)$ известным, построим множество K_n^{**} допустимых скоростей в момент времени t^{**}

$$K_n^{**} = \{v_n^{\cdot}(x, t^{**}) \in H \mid v_{in}^{\cdot}(x, t^{**}) = U_i^{\cdot}(x, t^{**}), \; \forall x \in \Gamma_u,$$
$$v_{\nu n}(x, t^{**}) \equiv u_{\nu n}(x, t^*) + [u_{\nu n}^{\cdot}(x, t^*) + v_{\nu n}^{\cdot}(x, t^{**})]\, \Delta t_{l+1}/2 \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(x, t^{**}), \; \forall x \in \Gamma_c, v_{\nu n}(x, t^{**}) = \Phi(x, t^{**}) \text{ для всех } x \in \Gamma_c,$$
$$\text{таких, что } \sigma_{\nu n}(x, t^*) > 0\}$$

Значения $u_n^{\cdot **} = u_n^{\cdot}(x, t^{**})$ определяются как решение вариационного неравенства

$$(3.4) \qquad a(x, \varkappa_{1n}^{(l)}, \ldots, \varkappa_{rn}^{(l)}, u_n^{\cdot **}, v_n^{\cdot **} - u_n^{\cdot **}) \geqslant F(t^{**}, v_n^{\cdot **} - u_n^{\cdot **}), \forall v_n^{\cdot **} \in K_n^{**}$$

Условия существования решения задач типа (3.3) и (3.4) хорошо исследованы [3, 4, 12]. Используя эти условия, получаем, что при сделанных допущениях о функции $W(\ldots, \varepsilon_{\xi\eta}^{\cdot})$ и при следующих требованиях на функции $U_i^{\cdot}$, $\Phi_i^{\cdot}$, $Q_i^{\cdot}$, $S_i^{\cdot}$:

$$U_i^{\cdot} \in H^{1/2}(\Gamma_u), \; \Phi^{\cdot} \in H^{1/2}(\Gamma_c), \; Q_i^{\cdot} \in L^2(\Omega), \; S_i^{\cdot} \in L^2(\Gamma_\sigma)$$

почти для всех фиксированных $t \in [0, T]$ существует единственное решение задач (3.3) и (3.4).

Определение пространств $H^{1/2}(\ldots)$ приведено в [3]. Для численного решения задач типа (3.3), (3.4) предложены простые и эффективные алгоритмы [13].

4. Существование решения квазивариационного неравенства. Исследование сходимости алгоритма, описанного в п. 3, и одновременно существования решения квазивариационного неравенства (2.8), следует идее [14] и состоит в доказательстве двух утверждений:

а) из последовательности приближенных решений $\{u_n^{\cdot}(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся при $n \to \infty$;

б) предел этой подпоследовательности удовлетворяет квазивариационному неравенству.

Докажем первое утверждение. Пусть $u_n^{\cdot *} = u_n^{\cdot}(x, t^*)$ — решение вариационного неравенства (3.3) и, следовательно

$$(4.1)\qquad a(\ldots, u_n^{\cdot *}, v^{\cdot} - u_n^{\cdot *}) - F(t^*, v^{\cdot} - u_n^{\cdot *}) \geqslant 0, \ \forall v^{\cdot} \in K_n^*$$

Введем обозначение $w_n^{\cdot} = u_n^{\cdot *} - v$ и преобразуем (4.1) к виду

$$(4.2)\qquad a(\ldots, w_n^{\cdot} + v^{\cdot}, w_n^{\cdot}) - F(t^*, w_n^{\cdot}) \leqslant 0, \ \forall v^{\cdot} \in K_n^*$$

Из условия (1.3) следует, что при любом $\alpha > 0$

$$a\left(\ldots, \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} v^{\cdot} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} w_n^{\cdot}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} v^{\cdot} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} w_n^{\cdot}\right) \geqslant 0$$

или

$$\frac{1}{2\alpha} a(\ldots, v^{\cdot}, v^{\cdot}) + \frac{\alpha}{2} a(\ldots, w_n^{\cdot}, w_n^{\cdot}) + a(\ldots v^{\cdot}, w_n^{\cdot}) \geqslant 0$$

Вычитая из (4.2) последнее неравенство, находим, что

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) a(\ldots, w_n^{\cdot}, w_n^{\cdot}) \leqslant \frac{1}{2\alpha} a(\ldots, v^{\cdot}, v^{\cdot}) + F(t^*, w_n^{\cdot})$$

Используя неравенство Корна [3], получаем оценку

$$(4.3)\qquad \alpha_1^* \| w_n^{\cdot} \|_H^2 \leqslant \frac{1}{2\alpha} a(\ldots, v^{\cdot}, v^{\cdot}) + F(t^*, w_n^{\cdot})$$

Применим аналогичный прием в сочетании с теоремами вложения С. Л. Соболева [15] для оценки $F(t^*, w_n^{\cdot})$

$$(4.4)\qquad F(t^*, w_n^{\cdot}) \leqslant \frac{1}{2\alpha} \| Q^{\cdot} \|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \frac{\alpha\beta}{2} \| w_n^{\cdot} \|_H^2 + \\ + \frac{1}{2\alpha} \| S^{\cdot} \|^2_{[L^2(\Gamma_\sigma)]^3} + \frac{\alpha\gamma}{2} \| w_n^{\cdot} \|_H^2$$

Отметим, что в силу требований, наложенных в п. 3 на функции $Q_i^{\cdot}$ и $S_i^{\cdot}$, соответствующие нормы в (4.4) конечные.

Объединяя (4.3) и (4.4), получаем окончательную оценку

$$\| w_n^{\cdot} \|_H^2 \leqslant \beta_1 a(\ldots, v^{\cdot}, v^{\cdot}) + \beta_2 \| Q^{\cdot} \|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \beta_3 \| S^{\cdot} \|^2_{[L^2(\Gamma_\sigma)]^3}$$

Постоянные β_1, β_2, β_3 могут быть сделаны положительными за счет выбора произвольного α. Отсюда следует, что $\| w_n^{\cdot} \|^2 \leqslant C_1$, причем C_1 не зависит от разбиения отрезка $[0, T]$. Поскольку $u_n^{\cdot *} = w_n^{\cdot} + v^{\cdot}$, то можно заключить, что $\| u^{\cdot *} \|_H^2 < C_2$. Аналогично можно показать, что $\| u_n^{\cdot **} \|_H^2 < C_2$. Учитывая способ определения $u_n^{\cdot}$ внутри отрезка (t^*, t^{**}), находим, что $\| u_n^{\cdot} \|_H^2 < C$, $C = \max(C_2, C_3)$, $\forall t \in [t^*, t^{**}]$, и, следовательно

$$\| u_n^{\cdot} \|^2_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \| u_n^{\cdot} \|_H^2 \, dt < CT$$

Таким образом, приближенное решение $u_n^{\cdot}$ ограничено в норме $L^2(0, T; H)$, и поэтому [15] из последовательности $\{u_n^{\cdot}\}$ можно выделить подпоследовательность, которую также обозначим через $\{u_n^{\cdot}\}$, слабо сходящуюся к некоторому элементу $u^{\cdot} \in L^2(0, T; H)$.

Покажем теперь, что $\dot{u}$ — решение неравенства (2.8). Используя введенное в п. 3 разбиение промежутка $[0, T]$, аппроксимируем $U_i^{\cdot}$, $\Phi^{\cdot}$ кусочно-линейными функциями $U_{in}^{\cdot}$, $\Phi_n^{\cdot}$, а $Q_i^{\cdot}$, $S_i^{\cdot}$ — кусочно-постоянными по времени функциями. Все введенные аппроксимации сильно сходятся в норме соответствующих пространств [14]. Если $v_n^{\cdot} \to v^{\cdot}$, $v_n^{\cdot} \in V_n$ при $n \to \infty$, то на основании теоремы о следах [3] заключаем, что $v^{\cdot} \in V$. Поскольку множество V выпукло и замкнуто, и, следовательно, слабо замкнуто, то можно также показать, что $u^{\cdot} \in V$.

Подставим введенные аппроксимации в левую часть (2.8) и, выполнив интегрирование по времени, получим

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad & \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\{a(\ldots, \dot{u}_n^{*}, \dot{v}_n^{*} - \dot{u}_n^{*}) + a(\ldots, \dot{u}_n^{**}, \dot{v}_n^{**} - \dot{u}_n^{**}) - \\
& - F(t^*, \dot{v}_n^{*} - \dot{u}_n^{*}) - F(t^{**}, \dot{v}_n^{**} - \dot{u}_n^{**}) + F_c(\sigma_{\nu n}^{*}, v_n{}^{*} - u_n{}^{*}) + \\
& + F_c(\sigma_{\nu n}^{*}, v_n^{**} - u_n^{**}) + \frac{1}{3}[F_c(\sigma_{\nu n}^{*}, u_n{}^{*} - u_n^{**} - v_n{}^{*} - v_n^{**})\Delta t_l + \\
& + \int_{\Omega} A_{ijpq}(\ldots, \dot{\varepsilon}_{\xi\eta n}^{*})(\dot{\varepsilon}_{ijn}^{*} - \dot{\varepsilon}_{ijn}^{**})(\dot{\zeta}_{pqn}^{*} - \dot{\varepsilon}_{pqn}^{*} + \dot{\zeta}_{pqn}^{**} - \dot{\varepsilon}_{pqn}^{**})\, d\Omega\Big]\Big\}\Delta t_l
\end{aligned}
$$

Первые четыре слагаемых представляют собой сумму левых частей вариационных неравенств (3.3) и (3.4); в случае $v_n^{\cdot} \in K_n(u_n)$ эта сумма неотрицательна. Если же $v_n^{\cdot} \in V_n \setminus K_n(u_n)$, то (4.5) принимает значение $+\infty$. Слагаемые в квадратных скобках при $n \to \infty$ стремятся к нулю.

Заметим, что при сделанных допущениях о $W(\ldots, \varepsilon_{\xi\eta}^{\cdot})$ функционал $a(\ldots, v^{\cdot}, v^{\cdot})$ слабо полунепрерывен снизу [16]. Учитывая также сильную сходимость введенных аппроксимаций и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое квазивариационное неравенство (2.8).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если соотношения связи вида (1.1) таковы, что функция $W(\ldots, \varepsilon_{\xi\eta})$, построенная согласно (1.2), удовлетворяет условиям а) и б) п. 1, а выбор функций $U_i^{\cdot}$, $\Phi^{\cdot}$, $Q_i^{\cdot}$, $S_i^{\cdot}$ подчинен требованиям

$$
\begin{gathered}
U_i^{\cdot} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_u)),\ \Phi^{\cdot} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_c)) \\
Q_i^{\cdot} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),\ S_i^{\cdot} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_\sigma))
\end{gathered}
$$

то решение квазивариационного неравенства (2.8) или, что то же самое, обобщенное решение исходной задачи $u^{\cdot} \in L^2(0, T; H)$ существует.

На основе изложенных результатов разработан алгоритм численного решения контактных задач при сложном нагружении в условиях плоской деформации. Вариационные неравенства (3.3) и (3.4) заменяются эквивалентными задачами минимизации [3, 4, 12], дискретизация которых осуществляется с помощью метода конечных элементов. Для решения возникающих задач нелинейного программирования используется обобщение метода верхней релаксации на случай задач с ограничениями [17]. Разработанный комплекс программ на языке ФОРТРАН открыт для использования любой теории пластичности с определяющими соотношениями вида (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, т. 12, № 2, с. 77—105.
2. *Галанов Б. А.* Приближенное решение некоторых контактных задач с неизвестной площадкой контакта в условиях степенного упрочнения материала.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 6, с. 36—41.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.

4. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 329—337.
5. *Panagiotopoulos P. D.* On the unilateral contact problem of structures with a non-quadratic strain energy density.— Internat. J. Solids and Struct., 1977, v. 13, No. 3, p. 253—261.
6. *Johnson C.* An elasto-plastic contact problem.— RAIRO. Anal. numer., 1978, v. 12, No. 1, p. 59—74.
7. *Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л.* Численное решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа в упругопластическую среду.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1, с. 50—57.
8. *Нигина Е. Л.* К решению контактных задач методом конечных элементов.— Машиноведение, 1978, № 5, с. 87—92.
9. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа, 1982. 479 с.
10. *Швайко Н. Ю.* К теории пластичности, основанной на концепции скольжения.— Прикл. механика, 1976, т. 12, вып. 11, с. 12—24.
11. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
12. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 893—901.
13. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
16. *Казимиров В. И.* О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления.— Успехи матем. наук, 1956, т. 11, вып. 3, с. 125—129.
17. *Кузьменко В. И., Чернецкий С. А.* К решению задач нелинейного программирования, возникающих при численном исследовании контактного взаимодействия деформируемых тел.— В кн.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Изд-е Днепропетровск. ун-та, 1980, с. 10—17.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
19.IX.1983