Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 539.383

К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ НА КОНТУРЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С УПРУГИМ СЛОЕМ

Порошин В. С.

Исследуется возможность построения ограниченного решения интегрального уравнения контактной задачи для упругого слоя в случае эллиптического в плане штампа с полиномиальным основанием. Показано, что для параболического штампа область контакта оказывается эллиптической при достаточно большой относительной толщине слоя или достаточно малой относительной толщине.

Известно, что решение контактной задачи теории упругости без учета сил трения с фиксированной, наперед заданной областью контакта, в общем случае приводит к бесконечным значениям контактных давлений на контуре области контакта. Гипотеза ограниченности функции распределения контактного давления на контуре области контакта может быть использована как необходимое условие, которому должно удовлетворять решение задач.

Поскольку функцию достаточно общего вида с любой степенью точности можно аппроксимировать некоторым полиномом, то вполне естественным будет вопрос о возможности построения ограниченного в некоторой области контакта решения интегрального уравнения контактной задачи для упругого слоя с полиномиальным свободным членом.

В данной работе исследуется вопрос о существовании такого решения в случае эллиптической площадки контакта.

1. Постановка задачи. Основное интегральное уравнение контактной задачи для упругого слоя, без учета трения между штампом и слоем, слоем и основанием, можно записать в виде [1]

$$\iint q(\xi,\eta)\,K(R/h)\,d\xi d\eta = 2\pi h\theta f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$K(t)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}2u-1}{\operatorname{sh}2u+2u}J_0(ut)\,du,\quad R=\sqrt{(\xi-x)^2+(y-\eta)^2},$$

$$\theta=G(1-\nu)^{-1}$$

$$f(x,y)=\delta+\alpha x+\beta y-g(x,y)>0,\quad (x,y)\in\Omega$$

Здесь и далее двойные интегралы берутся по области контакта Ω штампа со слоем, $q(x,y)$ — контактное давление, h — толщина слоя, $J_0(x)$ — функция Бесселя, G и ν — упругие постоянные слоя, $\delta+\alpha x+\beta y$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенной к нему силы P, $g(x,y)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

К интегральному уравнению (1.1) необходимо добавить условия равновесия штампа

$$P=\iint q(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,\quad Pe_1=\iint q(\xi,\eta)\,\xi d\xi d\eta,\quad Pe_2=\iint q(\xi,\eta)\,\eta d\xi d\eta \tag{1.2}$$

Здесь e_1 и e_2 — проекции эксцентриситета приложения силы P на оси x и y.

В задачах с переменной областью контакта необходимо найти решение уравнения (1.1), доставляющее минимум функционалу [2]

$$I = \iint q(\xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \tag{1.3}$$

при заданном виде функции $f(x, y)$ и малых возможных вариациях области Ω. Указанное условие является необходимым и достаточным для определения границы L области контакта Ω; из него, в частности, вытекает [3] как необходимое условие ограниченности контактного давления $q(x, y)$ на L. В случае, когда функция $f(x, y)$ на L удовлетворяет условию Гёльдера, это условие принимает простой вид

$$q(x, y) = 0, \quad (x, y) \in L \tag{1.4}$$

Заметим еще, что после решения контактной задачи должны быть проверены очевидные условия физичности решения: перемещения точек поверхности слоя вне области контакта Ω таковы, что она нигде не пересекается с поверхностью штампа; $q(x, y) \geqslant 0$ при $(x, y) \in \Omega$.

Перепишем интегральное уравнение (1.1) следующим образом [1]:

$$\begin{gathered} \iint q(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{R} = 2\pi\theta f(x, y) + \\ + \frac{1}{h} \iint q(\xi, \eta) F\left(\frac{R}{h}\right) d\xi\, d\eta, \quad (x, y) \in \Omega \\ F(t) = t^{-1} - K(t), \quad 0 \leqslant t < \infty \end{gathered} \tag{1.5}$$

где непрерывная со всеми производными функция $F(t)$ может быть разложена в абсолютно сходящейся при $0 \leqslant t < 2$ ряд

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i}, \quad a_i = \frac{(-1)^i}{(2i!)^2} \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}\right] u^{2i}\, du \tag{1.6}$$

Значения постоянных a_i даны в табл. 3 [1].

Теперь подробнее рассмотрим интегральное уравнение

$$A[q(\xi, \eta)] = 2\pi\theta f(x, y), \quad A[\ldots] = \iint (\ldots) \frac{d\xi\, d\eta}{R}, \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.7}$$

получающееся из (1.5) при $\lambda = h/a \to \infty$ ($a = {}^1/_2 \max_\Omega R$) и соответствующее контактной задаче для упругого полупространства. На основании опыта решения плоской и осесимметричной контактных задач для упругого полупространства ([1], теоремы 23.2 и 40.2) можно утверждать, что в общем пространственном случае (1.7) при достаточной гладкости контура L области Ω имеет место соотношение корректности

$$\| q(x, y) \|_{L(\Omega)} \leqslant 4\pi\theta a m_\Omega \| f(x, y) \|_{M^2(\Omega)} \tag{1.8}$$

Здесь $L(\Omega)$ — пространство абсолютно суммируемых в Ω функций, $M^2(\Omega)$ — пространство функций, вторые производные которых в Ω ограничены. Норму в $M^2(\Omega)$ определим соотношением

$$\begin{gathered} \| f \|_{M^2(\Omega)} = \max |f| + a \max [|f_x'| + |f_y'|] + \\ + a^2 \sup [|f_x''| + |f_{xy}''| + |f_y''|] \end{gathered} \tag{1.9}$$

Неравенство (1.8) означает, что для интегрального оператора A вида (1.7) существует обратный, ограниченный из $M^2(\Omega)$ в $L(\Omega)$ оператор A^{-1}, причем $\| A^{-1} \| \leqslant 2am_\Omega$. Для множества функций $q(x, y) \in L(\Omega)$, таких, что $q(x, y) \geqslant 0$ в Ω, постоянная $m_\Omega < 1$. Последнее вытекает из (1.7).

Вернемся к рассмотрению интегрального уравнения (1.5). Покажем, что если его решение существует в $L(\Omega)$, то оно может быть получено методом последовательных приближений при $\lambda > \lambda_*$. Для этого подействуем оператором A^{-1} на обе части уравнения (1.5). Получим

$$q = 2\pi\theta A^{-1}[f] + B[q], \quad B[q] = A^{-1}\left[\frac{1}{h}\iint q(\xi, \eta) F\left(\frac{R}{h}\right) d\xi\, d\eta\right] \tag{1.10}$$

Докажем, что оператор B в пространстве $L(\Omega)$ является при условии $\lambda > \lambda_*$ оператором сжатия. Тогда из принципа Банаха будет вытекать указанное выше утверждение. Имеем оценку

$$\| B[q^{(1)}] - B[q^{(2)}] \|_{L(\Omega)} \leqslant \frac{2}{\lambda} m_\Omega \left[\max|F(t)| + \frac{\sqrt{2}}{\lambda}\max|F'(t)| + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\lambda^2}\max|F''(t)| + \frac{\sqrt{3}}{\lambda^2}\max|F'(t)|t^{-1}\right]\iint|q^{(1)} - q^{(2)}|\,d\xi\,d\eta =$$
$$= k\,\| q^{(1)} - q^{(2)} \|_{L(\Omega)}$$

Теперь из уравнения $k = 1$ найдем λ_* как наименьший положительный корень. Заметим, что в соответствии с (1.5), (1.6)

$$\max|F(t)| = a_0, \ \max|F'(t)| < 0{,}5819\cdot 2\,|d_1| \tag{1.11}$$
$$\max|F'(t)|t^{-1} = \max|F''(t)| = 2\,|a_1|$$

Здесь $0{,}5819 = \max J_1(x)$, $J_1(x)$ — функция Бесселя, постоянные $a_0 = 1{,}168$; $d_1 = -0{,}521$; $a_1 = -0{,}395$ ([1], табл. 3). С учетом (1.11) и неравенства $m_\Omega < 1$, которое должно иметь место, если задача поставлена физически правильно (т. е. обеспечено выполнение условия $q(x, y) \geqslant 0$ в Ω; отметим, что это заведомо будет так, если форма основания штампа выпуклая), получим $k < k_*$, $k_* = 5{,}897\lambda^{-3} + 1{,}715\lambda^{-2} + 2{,}336\lambda^{-1} = 1$; отсюда найдем $\lambda_* = 3{,}37$.

2. Решение при большой относительной толщине слоя. Ограничимся в разложении для $F(t)$ вида (1.6) M первыми членами. Подставляя затем этот отрезок ряда в уравнение (1.5) вместо $F(t)$, будем иметь

$$\iint q(\xi, \eta)\frac{d\xi\, d\eta}{R} = 2\pi\theta f(x, y) + \tag{2.1}$$
$$+ \sum_{i=0}^{M}\frac{a_i}{h^{2i+1}}\iint q(\xi, \eta) R^{2i}\,d\xi\,d\eta, \quad (x, y) \in \Omega$$

Будем строить ограниченное в эллиптической области Ω (полуоси a и b) решение интегрального уравнения (2.1), если форма основания штампа задается полиномом степени N, т. е.

$$g(x, y) = \sum_{k,\, l=0}^{k+l\leqslant N} b_{kl}x^k y^l \tag{2.2}$$

Обратим внимание, что в правой части уравнения (2.1) стоит полином степени

$$t = \max(N, 2M) \tag{2.3}$$

Тогда, как известно [1], ограниченное на L решение уравнения (2.1) для эллиптической области Ω, если оно существует, должно иметь вид

$$q(x, y) = \sum_{m,\, n=0}^{m+n\leqslant t-2} a_{mn}x^m y^n\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

Подставив (2.4) в (2.1) и выполнив интегрирование [1] в правой и левой частях, получим соотношение, связывающее между собой два полинома степени t, коэффициенты которых зависят от a_{mn} и b_{kl}. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y, получим систему $^1/_2\,(t +$

$+ 1)(t + 2)$ независимых алгебраических уравнений. Эти уравнения содержат $^1/_2 (t - 1) t$ неизвестных коэффициентов a_{mn}. Из $^1/_2 (N + 1)(N + 2)$ коэффициентов b_{kl} должны быть произвольными $^1/_2 (N - 1) N$, остальные $2N + 1$ являются при заданных величинах δ, α, β, a и b дополнительными неизвестными. Требование произвольности $^1/_2 (N - 1) N$ коэффициентов b_{kl} необходимо для того, чтобы из решения уравнений (2.1) получалось в частном случае $\lambda \to \infty$ решение уравнения (1.7).

Таким образом, система $^1/_2 (t + 1)(t + 2)$ уравнений содержит $^1/_2 (t - 1) t + 2N + 1$ неизвестных. При $N \geqslant 2M$ из (2.3) следует, что $t = N$ и, следовательно, число неизвестных совпадает с числом уравнений в системе. При $2M > N$ будем иметь $t = 2M$, и неизвестных в системе меньше числа уравнений. Отсюда можно заключить, что если основание штамма — полином степени $N = 2p$, то решение уравнения (1.5), ограниченное на контуре эллиптической области контакта, может быть получено при больших λ лишь с точностью до членов $O(\lambda^{-2p-3})$.

Будем теперь искать решение уравнения (1.5) в виде [1]

$$q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x, y) h^{-n} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в обе части интегрального уравнения (1.5) и приравнивая члены при одинаковых степенях h, получим бесконечную систему интегральных уравнений вида (1.7) для последовательного определения функций $q_n(x, y)$

$$\begin{aligned} &\iint q_0(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{R} = 2\pi\theta f(x, y), \; (x, y) \in \Omega \\ &\iint q_1(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{R} = a_0 \iint q_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ &\iint q_2(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{R} = a_0 \iint q_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ &\iint q_3(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{R} = \iint [a_0 q_2(\xi, \eta) + a_1 q_0(\xi, \eta) R^2]\, d\xi\, d\eta \\ &\iint q_4(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{R} = \iint [a_0 q_3(\xi, \eta) + a_1 q_1(\xi, \eta) R^2]\, d\xi\, d\eta, \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Поскольку ряд (1.6) сходится при $t < 2$, или при $\lambda > 1$, то разложение решения вида (2.5) может быть построено при $\lambda > \sup(\lambda_*, 1)$. Однако заметим, что полученная в п. 1 оценка для λ_* завышена. Если в формуле (2.5) ограничиться удержанием членов $O(\lambda^{-4})$, то результаты можно использовать при $\lambda \geqslant 1{,}52$ ([1], табл. 36) и погрешность не будет превосходить 5%.

Пусть теперь область контакта в плане представляет собой, как и выше, эллипс с полуосями a и b, а форма основания штампа описывается функцией $g(x, y) = Ax^2 + By^2$, $A > 0$, $B > 0$ (параболический штамп). Пусть вдавливающая сила P приложена в центре симметрии штампа, т. е. $e_1 = e_2 = 0$, тогда также $\alpha = \beta = 0$. Решая последовательно интегральные уравнения (2.6), построим [1] для указанного случая неограниченное на контуре эллиптической области Ω асимптотическое решение с точностью до членов $O(\lambda^{-5})$

$$\begin{aligned} q(x, y) = \frac{\theta}{b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \Big\{ D \Big[1 + \frac{s}{h} + \left(\frac{s}{h}\right)^2 + \\ + \left(\frac{s}{h}\right)^3 + \left(\frac{s}{h}\right)^4 \Big] - \frac{a^2}{e^2\beta} \sum_{i=1}^{2} \Psi_i [A\sigma_{3-i} - B(\sigma_{3-i} - e^2)] + \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$+\frac{2a_1a^3(2-e^2)}{3h^3K(e)}D\left(1+2\frac{s}{h}\right)-\frac{\Phi}{h^3}\left(1+\frac{s}{h}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)\Bigg\};$$

$$\Psi_i=K_i\left(\frac{x^2}{a^2\sigma_i}+\frac{y^2}{a^2(\sigma_i-e^2)}-1\right)$$

$$\Phi=\frac{2a_1a^5}{15\beta e^2K(e)}\sum_{i=1}^{2}K_i[A\sigma_{3-i}-B(\sigma_{3-i}-e^2)](\sigma_i+\sigma_ie^2-2e^2)$$

$$K_i=\frac{(-1)^i\sigma_i^2(\sigma_i-e^2)^2}{(\sigma_i-1)[E(e)-(1-\sigma_i)K(e)]},\quad D=\frac{\delta-{}^1/_3(Aa^2+Bb^2)}{K(e)}$$

$$s=\frac{a_0a}{K(e)},\quad \sigma_1=\frac{1+e^2}{3}+\beta,\quad \sigma_2=\frac{1+e^2}{3}-\beta$$

$$\beta=\frac{1}{3}(1-e^2+e^4)^{1/2},\quad e=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

Здесь e — эксцентриситет эллиптической области Ω, $K(e)$ и $E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Из формулы (2.7) согласно проведенному выше анализу можно получить с точностью до членов $O(\lambda^{-5})$ ограниченное на контуре эллиптической области контакта решение задачи. Действительно, потребуем, чтобы выражение (2.7) для $q(x, y)$ имело вид

$$q(x,y)=C\frac{\theta}{b}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

Умножая формулы (2.7) и (2.8) на $(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2}$ и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях x и y, получим систему трех уравнений, решая которую, выразим величины a, e и C через δ, A и B. Потом определим величину из первого условия равновесия штампа (1.2).

Ввиду того что указанную систему в общем случае решить трудно, ограничимся в ней членами $O(\lambda^{-2})$. Тогда система сильно упрощается и принимает вид

$$D\left(1+\frac{s}{h}+\frac{s^2}{h^2}\right)+\frac{a^2}{e^2\beta}\sum_{i=1}^{2}K_i[A\sigma_{3-i}-B(\sigma_{3-i}-e^2)]=C \tag{2.9}$$

$$\frac{a^2}{e^2\beta}\sum_{i=1}^{2}K_i[A\sigma_{3-i}-B(\sigma_{3-i}-e^2)]\sigma_i^{-1}=C$$

$$\frac{a^2}{e^2\beta}\sum_{i=1}^{2}K_i[A\sigma_{3-i}-B(\sigma_{3-i}-e^2)](\sigma_i-e^2)^{-1}=C(1-e^2)^{-1}$$

Из последних двух уравнений (2.9) сначала получим выражения для A и B через C. Подставляя эти результаты в первое уравнение (2.9) и решая его, получим C. Окончательно решение системы (2.9) можно записать в виде

$$A=\frac{K(e)-E(e)}{2a^2e^2}C,\quad B=\frac{E(e)-(1-e^2)K(e)}{2b^2e^2}C \tag{2.10}$$

$$C=\frac{2\delta}{K(e)}\left[1+\frac{2s}{3h}+\left(\frac{2s}{3h}\right)^2+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right]$$

Наконец, из (2.8) и (1.2) найдем

$$P=\frac{4\pi a\theta\delta}{3K(e)}\left[1+\frac{2s}{3h}+\left(\frac{2s}{3h}\right)^2+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right] \tag{2.11}$$

Соотношения (2.10) и (2.11) дают возможность определить a, e и δ в зависимости от величины силы P, считая заданными A и B, или A, B и δ, считая заданными a и e.

3. Решение при малой относительной толщине слоя. Чтобы характеризовать слой малой относительной толщины в случае выпуклой области, введем следующий безразмерный геометрический параметр $\mu = h/\rho_{\min}$; $\rho_{\min}$ — минимальный радиус кривизны контура L области Ω.

Внутреннее (проникающее) асимптотическое решение интегрального уравнения (1.1) при малых значениях μ имеет вид ([1], § 55)

$$q(x, y) \sim \theta (hA)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D_i h^{2i} \Delta^i f(x, y) \tag{3.1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а постоянные A и D_i определяются из следующего разложения:

$$\frac{u(\operatorname{sh} 2u + 2u)}{\operatorname{ch} 2u - 1} = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{\infty} D_i u^{2i} \tag{3.2}$$

Можно найти, что

$$A = {}^1/_2,\ D_0 = 1,\ D_1 = 0,\ D_2 = {}^1/_{45} \tag{3.3}$$

Радиус сходимости ряда (3.2) определяется величиной первого ненулевого корня функции $\operatorname{ch} 2u - 1$ в комплексной плоскости u, в данном случае сходимость будет иметь место при $|u| < \pi$. Отсюда, например, следует, что для эллиптического в плане штампа с полуосями a и b при

$$f(x, y) = \exp\left[i\left(p_1 \frac{x}{a} + p_2 \frac{y}{b} \right) \right] \tag{3.4}$$

формулой (3.1) можно пользоваться при выполнении неравенства

$$\lambda\mu\, [(1 - e^2)\, p_1^2 + p_2^2] < \pi \tag{3.5}$$

Внутреннее решение при малых μ применимо во всей области Ω, за исключением узкой кольцевой зоны, примыкающей к контуру L.

В этой узкой зоне справедливо решение типа погранслоя [1]; относительная толщина погранслоя имеет порядок μ^{-1}. Решение типа погранслоя экспоненциально (как $\exp(-n\mu^{-1})$, где n — отнесенное к $\rho_{\min}$ кратчайшее расстояние от точки $Q \in \Omega$ до точки $P \in L$) стремится при удалении от контура L к внутреннему решению. Далее предположим, что параметр μ настолько мал, что решение типа погранслоя можно не принимать в расчет.

В случае полиномиальной функции $f(x, y)$ ряд (3.1), дающий внутреннее решение, обрывается. Например, для штампа с полиномиальным основанием вида (2.2) внутреннее решение (3.1) будет также представлять собой полином степени N.

Можно показать, что при $q(x, y)$ вида (3.1) из условия минимума функционала (1.3) непосредственно вытекает как необходимое условие (1.4). Таким образом, здесь при рассмотрении задачи в предположении переменности области контакта в случае эллиптической области Ω (полуоси a и b) функцию $q(x, y)$ для штампа с основанием (2.2) нужно представить в форме

$$q(x, y) = \sum_{m,n=0}^{m+n \leqslant N-2} a_{mn} x^m y^n \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \tag{3.6}$$

Подставим теперь функцию $f(x, y)$ вида (1.1), (2.2) в (3.1), выполним все операции дифференцирования и приравняем полученный результат выражения (3.6). Получим соотношение, связывающее между собой два полинома степени N, коэффициенты которых зависят от a_{mn} и b_{kl}. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y, получим систему $^1/_2\,(N+1)\,(N+2)$ независимых алгебраических уравнений. Эти уравнения содержат $^1/_2\,(N-1)\,N$ неизвестных коэффициентов a_{mn}, поэтому из всей совокупности коэффициентов b_{kl} могут быть произвольными только $^1/_2\,(N-1)\,N$. Остальные $2N+1$ коэффициентов b_{kl}, как и в п. 2, при заданных величинах δ, α, β, a и b необходимо считать дополнительными неизвестными.

Рассмотрим частный случай, когда форма основания штампа — параболоид, т. е. $g\,(x, y) = Ax^2 + By^2$ $(A > 0,\ B > 0)$, а сила P приложена в центре симметрии штампа. На основании (3.1) найдем для этого случая внутреннее асимптотическое решение задачи при малых μ, обращающееся в нуль на контуре L эллиптической области контакта. Согласно изложенной выше общей схеме, имеем

$$q\,(x, y) = \frac{2\theta\delta}{h}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+O\left(e^{-\frac{n}{\mu}}\right)\right] \tag{3.7}$$

$$A=\frac{\delta}{a^2},\quad B=\frac{\delta}{b^2},\quad P=\frac{\pi ab\theta\delta}{h}$$

Из асимптотической оценки в первой формуле (3.7) следует, что погрешность ее не будет превосходить 5%, если $n \geqslant 3\,\mu$, т. е. если точка $Q \in \Omega$ удалена по нормали от контура L более чем на $3h$.

Итак, в случае переменной области контакта для параболического штампа, взаимодействующего со слоем, при достаточно больших λ или достаточно малых μ область контакта Ω оказывается эллиптической.

Автор благодарен В. М. Александрову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Александров В. М.* Контактные задачи для полупространства. Сложные в плане области контакта.— В кн.: Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976, с. 200—206.
3. *Баренблатт Г. И.* Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 316—322.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1983