

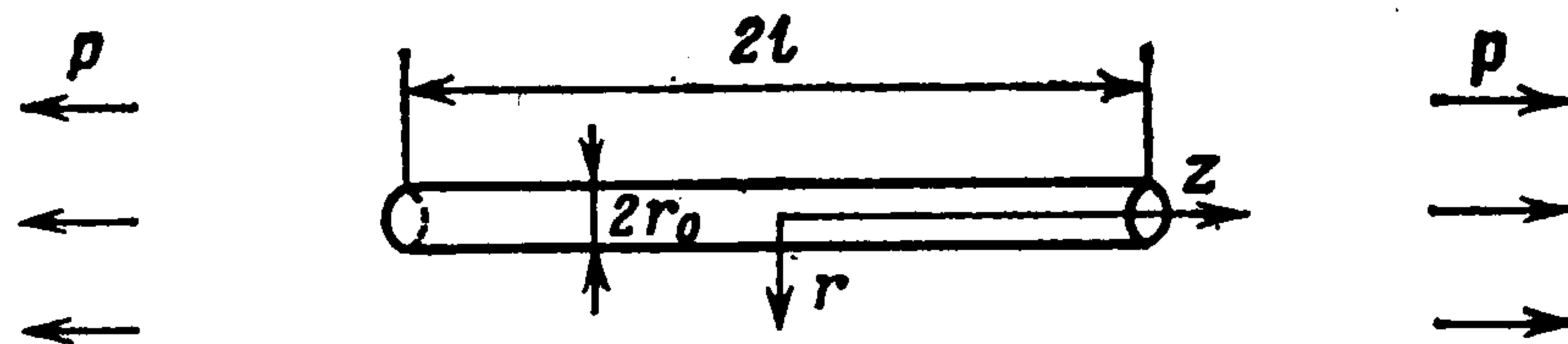
УДК 539.3

РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ИЗОЛИРОВАННЫМ ЖЕСТКИМ СТЕРЖНЕМ

Никишков Г. П., Черепанов Г. П.

Рассматривается задача о растяжении неограниченного упругого пространства с жестко заделанным в него изолированным прямолинейным упругим тонким стержнем конечной длины, модуль упругости стержня считается гораздо большим, чем у окружающего пространства. Предлагается приближенное асимптотическое решение задачи, основанное на введении пограничного слоя в окрестности стержня; получена формула для оптимальной длины армирующего волокна. Затем задача о пограничном слое решается методом асимптотического Γ -интегрирования [1], приводящим, естественно, к тем же результатам. Представлены численные эксперименты на ЭВМ с использованием метода конечных элементов. Один из результатов численного расчета используется при построении аналитического решения. Дается оценка точности приближенного аналитического решения.

1. Постановка задачи. Пусть тонкий прямолинейный упругий стержень (нить) кругового сечения погружен в безграничное однородное и изотропное упругое пространство, испытывающее на бесконечности одностороннее растяжение вдоль направления стержня (фиг. 1). На границе



Фиг. 1

контакта справедливы условия идеального сцепления, т. е. все компоненты смещения непрерывны всюду.

Введем систему цилиндрических координат Ozr (ось z совпадает с осью стержня, точка O — середина стержня). Пусть l — полудлина стержня, r_0 — радиус его поперечного сечения, p — растягивающее напряжение σ_z на бесконечности, E_m, ν_m и E_f, ν_f — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы (основного материала) и стержня соответственно.

В этой пространственной задаче теории упругости четыре положительных безразмерных параметра: $\nu_m, \nu_f, \lambda = r_0/l \ll 1, \epsilon = E_m/E_f \ll 1$ (по условию стержень тонкий и гораздо более жесткий, чем матрица).

Наибольший интерес представляет распределение по z среднего (по сечению) напряжения $\sigma = \sigma_z$ в стержне и касательного напряжения $\tau = \tau_{rz}$ на боковых поверхностях цилиндрического стержня. Они связаны уравнением равновесия

$$\tau = -\frac{1}{2}r_0 d\sigma/dz$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ («нерастяжимый» стержень) решение этой задачи было предложено впервые в работе [1] в качестве одного из примеров применения метода асимптотического Γ -интегрирования. Однако в процессе решения были допущены вычислительные ошибки, на которые обратил внимание Эшелби [2], предложивший решение этой задачи при $\epsilon \rightarrow 0$, основанное на методе [3] приближенного решения задачи теории поля о проводящем цилиндре в параллельном электростатическом поле диэлектрика.

Эшелби указал, что метод, которым Ван-Дайк решал электростатическую задачу Ландау и Лифшица в приложении к статье Тейлора [4], а также метод Галлена, решавшего ту же электростатическую проблему [5], приводит к тем же результатам.

Аналитическое и численное решение проблемы при малых ϵ и λ , излагаемое ниже, показывает, однако, что при любых сколь угодно малых ϵ величины σ , τ и σ_{\max} в стержне могут как угодно сильно (например, на один или два порядка) отличаться от значений, определяемых формулами работы [2], в зависимости от значений другого малого параметра λ . Таким образом, решение [2] оказывается, вообще говоря, непригодным для любых сколь угодно малых ϵ .

2. Приближенное аналитическое решение. Рассмотрим вначале предельный случай бесконечно длинного стержня ($\lambda = 0$). В этом случае точное решение [6] уравнений Ламе, удовлетворяющее условиям сцепления при $r = r_0$ и условиям на бесконечности при $r \rightarrow \infty$, полагая для простоты, что $\nu_m = \nu_f$, можно записать следующим образом (w — компонента смещения по оси z):

$$(2.1) \quad \sigma_z = \begin{cases} p/\epsilon, & r < r_0 \\ p, & r > r_0 \end{cases}, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{p}{E_m}$$

В случае $\nu_m \neq \nu_f$ погрешности формулы (2.1) для характерных величин σ_z и w не превышают нескольких процентов для всех практически значимых случаев. (В случае сжатия, когда $p < 0$, напряжения σ_r и σ_θ в волокне будут растягивающими при $\nu_m > \nu_f$, и поэтому, несмотря на свою малую величину, в некоторых случаях могут приводить к расщеплению волокон и выходу композита из строя [6].)

Займемся теперь случаем стержня конечной, но весьма большой длины, когда $1 \gg \lambda > 0$. Эпюра смещения w в сечениях $z = \text{const}$ будет напоминать профиль скорости в пограничном слое вязкой жидкости. Поэтому в некоторой окрестности стержня естественно принять следующие допущения (приближение погранслоя):

$$\frac{\partial w}{\partial r} \gg \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \gg \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \sigma_r \ll \sigma_z, \quad \sigma_\theta \ll \sigma_z, \quad u \ll w$$

Опуская малые члены в уравнениях теории упругости, согласно этим допущениям, приходим к уравнениям пограничного слоя

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \sigma_z = E_m \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sigma = E_f \frac{dW}{dz}, \quad \tau = -\frac{1}{2} r_0 \frac{d\tau}{dz}, \quad \tau_{rz} = G_m \frac{\partial w}{\partial r}$$

Здесь W — смещение стержня вдоль оси z , τ_{rz} — касательное напряжение, G_m — модуль сдвига матрицы.

Решение уравнений (2.2) имеет вид

$$(2.3) \quad w = \frac{r_0 \tau}{G_m} \ln \frac{r}{r_0} + W, \quad \tau_{rz} = \tau \frac{r_0}{r}$$

$$\sigma_z = 2(1 + \nu_m) r_0 \tau'(z) \ln \frac{r}{r_0} + W'(z)$$

$$(r_0 E_f W''(z) = -2\tau)$$

На границе погранслоя при $r = r_*$ решение (2.3) должно «сшиваться» с невозмущенным решением $\partial w / \partial z = p / E_m$ (r_* — радиус сшивания). Отсюда получаем следующее уравнение [7]:

$$(2.4) \quad W'(z) + \frac{r_0}{G_m} \ln \frac{r_*}{r_0} \tau'(z) = \frac{p}{E_m}$$

Вместе с последним уравнением (2.3) оно служит для определения $\tau(z)$ и $W(z)$ в пограничном слое. Запишем решение этих уравнений,

удовлетворяющее условиям симметрии $\tau = 0$, $W = 0$ при $z = 0$, выбирая радиус «сшивания» r_* следующим образом:

$$(2.5) \quad \frac{r_*}{r_0} = \left(\frac{l}{r_0}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha$$

где α — некоторый параметр сшивания (порядка единицы). Находим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \tau &= (p - \varepsilon \sigma_{\max}) \frac{\lambda k}{2\varepsilon} \operatorname{sh} \frac{kz}{l} \\ \sigma &= \frac{p}{\varepsilon} - \left(\frac{p}{\varepsilon} - \sigma_{\max}\right) \operatorname{ch} \frac{kz}{l} \\ W &= \frac{p}{E_m} z - \alpha \tau(z) \frac{r_0}{G_m} \ln \frac{1}{\lambda} \\ \left(k^2 = \frac{\varepsilon}{\alpha \lambda^2 (1 + \nu_m) \ln(1/\lambda)}\right) \end{aligned}$$

Здесь σ_{\max} — наибольшее значение σ (при $z = 0$).

Напряжение σ в концах стержня пренебрежимо мало; поэтому можно положить $\sigma = 0$ при $z = \pm l$.

Отсюда при помощи (2.6) находим

$$(2.7) \quad \sigma_{\max} = \frac{p}{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} k}\right) = \begin{cases} p/\varepsilon, & k \gg 1 \\ pk^2/(2\varepsilon), & k \ll 1 \end{cases}$$

Для определения параметра α воспользуемся данными численного расчета исходной задачи методом конечных элементов (см. ниже п. 4). В частности, при $\varepsilon = 10^{-5}$, $\lambda = 10^{-2}$, $\nu_m = 0,3$ было найдено $\sigma_{\max} = 1130p$. Воспользуемся в этом случае формулой (2.7) при $k \ll 1$, получаем $\alpha = 0,738$.

Из (2.7) видно, что с увеличением длины армирующего стержня максимальное напряжение σ_{\max} монотонно возрастает. Из полученного решения вытекает следующее интересное следствие. Обозначим прочность на разрыв стержня через σ_{st} . На основании (2.6), (2.7), если

$$(2.8) \quad \lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda} \leq \delta_0 \quad \left(\delta_0 = \frac{\varepsilon}{\alpha (1 + \nu_m)} \operatorname{arsh} \frac{p}{p - \varepsilon \sigma_{st}}\right)$$

то армирующий стержень разрывается пополам. Асимптотическое решение неравенства (2.8) при малых λ приводит к явному выражению

$$(2.9) \quad l \geq r_0 [\ln(1/\delta_0)/(2\delta_0)]^{-1/2}$$

Величина в правой части (2.9) играет роль оптимальной длины армирующего волокна, при которой максимально используется его прочностные свойства.

3. Приближенное решение методом асимптотического Γ -интегрирования. Следуя [1], заменим действие тонкого волокна на матрицу действием сосредоточенной силы интенсивности Z , распределенной вдоль оси z и направленной вдоль этой оси (из условия равновесия $Z = 2\pi r_0$). Имеем [6, 7]

$$(3.1) \quad \int_{\Sigma} (U n_z - \sigma_{ij} n_j u_{i,z}) d\Sigma = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Здесь U — упругий потенциал единицы объема, σ_{ij} — напряжения, u_i — смещения, n_i — внешняя единичная нормаль в замкнутой поверхности Σ , составленной из двух торцов $z = \text{const}$ и двух соосных круговых цилиндров Σ_ε и Σ_* одинаковой длины Δ (где $l \gg \Delta \gg r_*$); $\Sigma_\varepsilon: r = \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 \ll r_0$; $\Sigma_*: r = r_*$, где $l \gg r_* \gg r_0$. Интеграл (3.1) на торцевой части поверхности Σ пренебрежимо мал по сравнению с другими сла-

гаемыми (так как $\Delta \gg r_*$), а на цилиндрах Σ_ε и Σ_* будет $n_z = 0$. Поэтому из (3.1) получаем (с учетом осевой симметрии)

$$(3.2) \quad \int_{\Sigma_\varepsilon} (\tau_{rz} u_{z,z} + \sigma_r u_{r,z}) d\Sigma = \int_{\Sigma_*} (\tau_{rz} u_{z,z} + \sigma_r u_{r,z}) d\Sigma$$

Согласно правилам Г-интегрирования [1, 6] и уравнениям равновесия, имеем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \int_{\Sigma_\varepsilon} (\dots) d\Sigma &= \int_{\Sigma_\varepsilon} (\tau_{rz}^s u_{z,z}^0 + \sigma_r^s u_{r,z}^0) d\Sigma = \\ &= u_{z,z}^0 \int_{\Sigma_\varepsilon} \tau_{rz}^s d\Sigma + u_{r,z}^0 \int_{\Sigma_\varepsilon} \sigma_r^s d\Sigma = Z u_{z,z}^0 |_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \\ \int_{\Sigma_*} (\dots) d\Sigma &= \int_{\Sigma_*} (\tau_{rz}^0 u_{z,z}^s + \sigma_r^0 u_{r,z}^s) d\Sigma = \\ &= u_{z,z}^s \int_{\Sigma_*} \tau_{rz}^0 d\Sigma + u_{r,z}^s \int_{\Sigma_*} \sigma_r^0 d\Sigma = Z u_{z,z}^s |_{r=r_*} \Delta \end{aligned}$$

Верхние индексы 0 и s относятся к регулярной (невозмущенной) и сингулярной (возмущенной) составляющей соответственно.

Согласно (3.2) и (3.3), получаем

$$(3.4) \quad u_{z,z}^0 |_{\varepsilon \rightarrow 0} = u_{z,z}^s |_{r=r_*}$$

Очевидно, имеем

$$u_{z,z}^0 = \frac{p}{Z_m}, \quad u_{z,z}^s = \frac{Z'(z)}{2\pi G_m} \ln \frac{r}{r_0} + W'(z) \quad (E = 2\pi \tau r_0)$$

Отсюда согласно (3.4) получаем соотношение (2.4). Дальнейший ход решения аналогичен изложенному в п. 2.

В выражении для u_z^0 самоиндуктивная составляющая, равная

$$\frac{1 + \nu_m}{2\pi E_m} \int_{l_0}^l \frac{Z(t) - Z(z)}{|t - z|} dt$$

опущена как пренебрежимо малая по сравнению с pz/E_m .

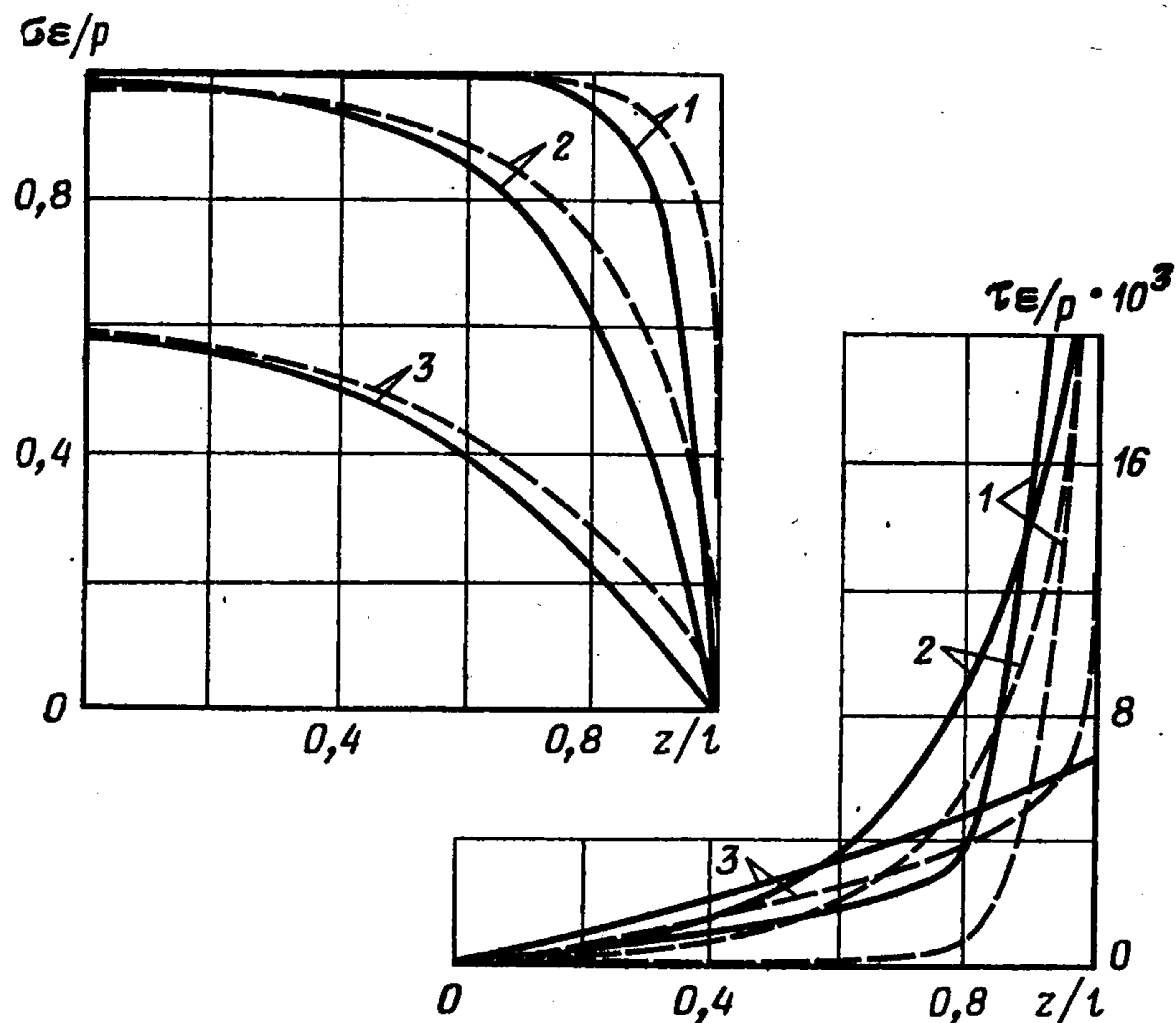
4. Расчет методом конечных элементов. Для проверки полученных соотношений выполнены расчеты с использованием усовершенствованной версии программного комплекса НЕПТУН [8].

В качестве расчетной схемы для решения задачи выбран цилиндр радиусом R_0 и высотой $2L$, в который помещен цилиндрический стержень с радиусом r_0 и длиной $2l$. Материалы цилиндра (матрицы) и стержня имеют разные упругие характеристики. Для расчета были приняты следующие размеры: $r_0 = 0,5$, $l = 50$, $R_0 = 100$, $L = 150$ ($\lambda = 10^{-2}$).

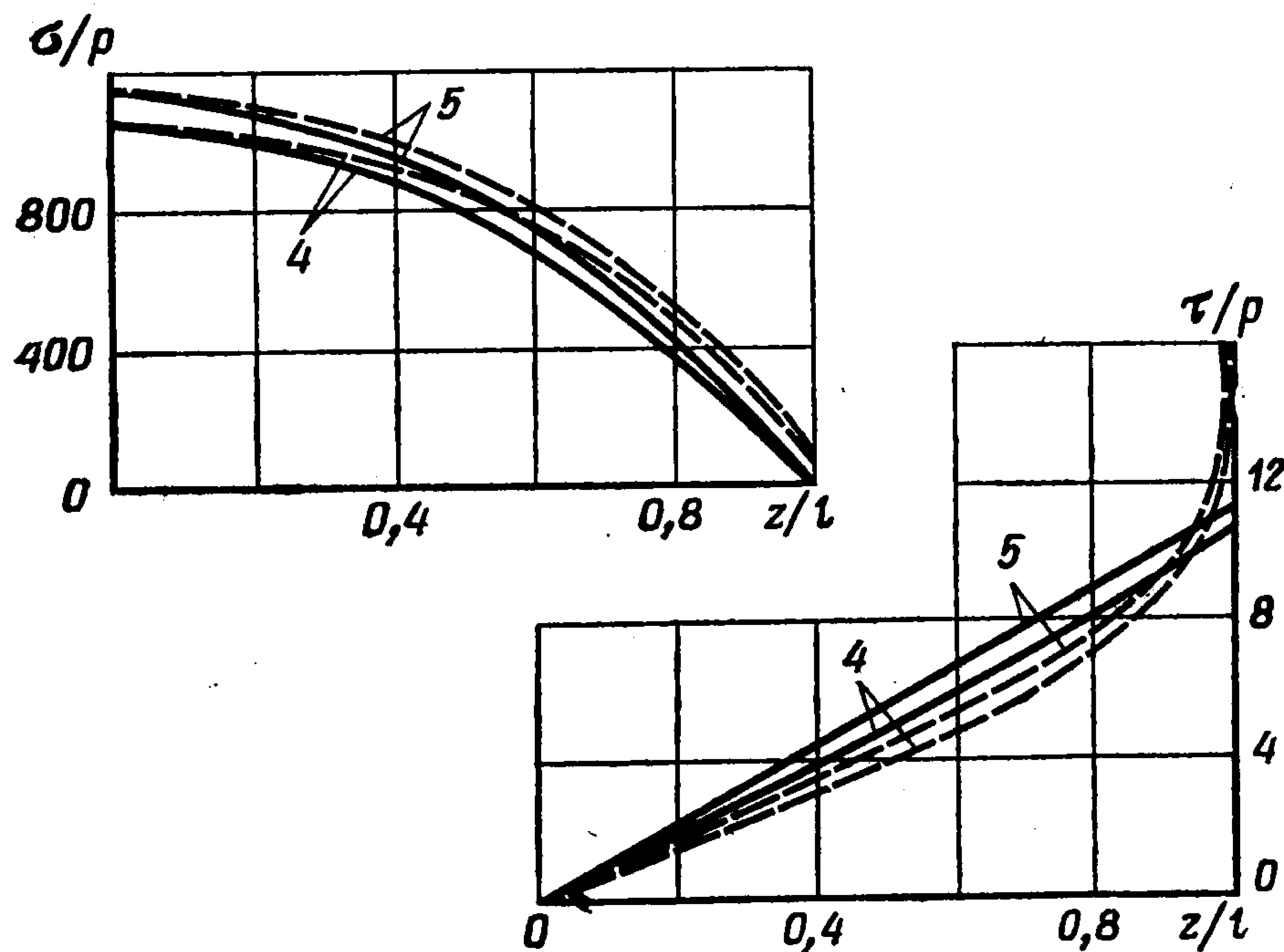
В силу симметрии при решении была рассмотрена верхняя половина цилиндра с граничными условиями в перемещениях и напряжениях: $w = 0$ при $z = 0$, $\sigma_z = p$ при $z = L$.

Для построения дискретной модели в плоскости rz применены изопараметрические квадратичные элементы с восемью узлами. Сетка конечных элементов сгенерирована автоматически при помощи параметрического задания] координат. Она состоит из 176 элементов и имеет 1166 степеней свободы. Произведено сгущение сетки в области, прилегающей к стержню.

Результаты расчета нормальных напряжений σ в стержне и касательных напряжений τ на границе стержень — матрица приведены на фиг. 2, а, б для разных $\varepsilon = E_m/E_f$ и показаны штриховыми линиями 1—5, соответствующими значениям $\varepsilon = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} . При этом было принято, что коэффициенты Пуассона $\nu_m = \nu_f = 0,3$. Сплошными линиями показаны те же величины, рассчитанные по формулам (2.6).



Фиг. 2а



Фиг. 2б

Наблюдается хорошее согласие численных и аналитических зависимостей для нормальных напряжений в стержне. Максимальное значение σ_{\max} предсказывается формулой (2.6) практически точно. Наибольшие отличия σ наблюдаются при приближении к концу стержня, что обусловлено пренебрежением нормальным напряжением на концах стержня при выводе (2.6). Различие расчетных и аналитических значений τ больше, что естественно, так как касательное напряжение — производная от σ . Тем не менее, при малых ε эти различия не велики.

Для проверки влияния размера матрицы (размеры стержня неизменны) на решение, получаемое методом конечных элементов, были проведены повторные расчеты с $R_0 = 200$, $L = 250$. Для $\varepsilon = 10^{-5}$ получено увеличение напряжений менее чем на 2%.

Полное численное исследование задачи в целом затруднительно из-за того, что в задаче имеется четыре безразмерных свободных параметра ε , λ , ν_m и ν_f . Поэтому было проверено лишь влияние на решение значений величин ν_m и ν_f . Численные расчеты были проведены при $\varepsilon = 0$ (абсолютно жесткий стержень) с $\nu_{m1} = 0,3$ и $\nu_{m2} = 0,49$. Из аналитического решения]

$$\frac{\sigma_{\max 1}}{\sigma_{\max 2}} = \frac{1 + \nu_{m2}}{1 + \nu_{m1}} = 1,146.$$

По данным численных расчетов эта величина равна 1,110.

Пп. 1—3 написаны Г. П. Черепановым, п. 4 — Г. П. Никишковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cherepanov G. P.* Invariant Γ -integrals.— Engng Fract. Mech., 1981, v. 14, No. 1, p. 39—58.
2. *Eshelby J. D.* The stresses on and in a thin inextensible fibre in a stretched elastic medium.— Engng Fract. Mech., 1982, v. 16, No. 3, p. 453—455.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
4. *Taylor G. I.* The force exerted by an elastic field on a long cylindrical conductor.— Proc. Roy. Soc. A, 1966, v. 291, No. 1425, p. 145—158.
5. *Hallen E.* Lösung Zweiter Potentialprobleme der Electrostatik.— Ark. För. Mat., Astron. och Fysik. Ser. A, 1929, v. 21, No. 22, p. 1—44.
6. *Cherepanov G. P.* Mechanics of Brittle Fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979. 952 p.
7. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
8. *Морозов Е. М., Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 254 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.VII.1983