Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 539.3 + 624.07

ОБ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СТЕРЖНЕМ, ОРТОГОНАЛЬНО ВЫХОДЯЩИМ НА ГРАНИЦУ

Тихоненко Л. Я.

Исследуется интегродифференциальное уравнение относительно контактного напряжения задачи для упругой полуплоскости (изотропной и ортотропной) с растягиваемым стержнем, ортогонально выходящим на границу. Выясняется вопрос о характере особенности контактного напряжения в точке выхода стержня на границу. Показано, что асимптотика интеграла типа Коши не позволяет однозначно решить вопрос о характере особенности, если она предполагается степенно-логарифмической. Истинный характер особенности определяется на основе точного решения уравнения, построенного при помощи интегрального преобразования Меллина и краевой задачи Карлемана для полосы [1].

Задача о контакте упругой полуплоскости с растягиваемым стержнем, ортогонально выходящим на границу, в изотропном случае рассматривалась в работе [2]. В ней сделан вывод о наличии степенной особенности контактных напряжений в точке выхода стержня на границу. Эта же задача в ортотропном случае была рассмотрена в работе [3], в которой на основании асимптотического исследования и точного решения задачи, построенного в предельном случае сильной ортотропии, сделан вывод, что особенность контактного напряжения в отличие от [2] имеет степенно-логарифмический характер, причем при нулевых значениях коэффициента Пуассона она становится логарифмической. Указанные факты позволили авторам работы [3] подвергнуть сомнению правильность сделанных ранее [2] выводов относительно характера особенности и принять для изотропного случая особенность контактного напряжения также степенно-логарифмической.

Ниже показано, что асимптотика интеграла типа Коши не позволяет однозначно решить вопрос о характере особенности, если она предполагается степенно-логарифмической. В результате подтверждена правильность выводов работы [2]; для ортотропной же полуплоскости особенность оказывается также степенной и переходит в логарифмическую только в случае предельной сильной ортотропии, что опровергает соответствующий вывод работы [3].

1. Задача для упругой полуплоскости ($-\infty < x < \infty$, $y > 0$) со стержнем, растягиваемым силой Q и расположенным на линии ($x = 0$, $0 < y < l$), сведена [2, 3] к интегродифференциальному уравнению относительно осевого усилия в стержне $\varphi_n(y)$

$$\varphi_n(y) + \mu_n \int_0^l K_n(y, s)\, \varphi_n'(s)\, ds = 0, \quad 0 < y < l, \quad n = 1, 2 \tag{1.1}$$

$$\varphi_n(0) = Q, \quad \mu_1 = SE_0 (4\pi h E)^{-1}, \quad \mu_2 = SE_0 (1 - \nu_1\nu_2)(2\pi h E_1)^{-1}$$

$$K_1(y, s) = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{y-s} + \frac{8-(3-\nu)(1+\nu)}{y+s} + \frac{2(1+\nu)^2 s (y-s)}{(y+s)^3}$$

$$K_2(y, s) = \left(\frac{A_1}{\lambda_1} - \frac{A_2}{\lambda_2}\right)\frac{1}{y-s} + \left(\frac{A_3}{\lambda_1} + \frac{A_4}{\lambda_2}\right)\frac{1}{y+s} -$$

$$- \frac{A_5}{\lambda_1 y + \lambda_2 s} - \frac{A_6}{\lambda_2 y + \lambda_1 s}$$

Значение $n = 1$ характеризует изотропный случай, $n = 2$ — ортотропный; S и E_0 — площадь поперечного сечения и модуль упругости стержня, h — толщина пластинки, E, ν и $E_{1,2}$, $\nu_{1,2}$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно в изотропном и ортотропном случаях; постоянные A_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ и $\lambda_{1,2}$ связаны с упругими свойствами ортотропного материала и определены в работе [3]. Функция $\varphi_n'(s)$ ищется в классе интегрируемых функций.

Ядра уравнения помимо ядра Коши содержат слагаемые, имеющие неподвижную особенность первого порядка в точке $y = 0$. Наличие этих слагаемых меняет характер поведения функции $\varphi_n'(s)$ при $s \to 0$ — оно перестает быть корневым, как, например, при $s \to l$, и нуждается в уточнении. Знание характера особенности решения важно для конструирования эффективных приближенных решений, необходимость построения которых диктуется либо отсутствием точного решения задачи, либо сложностью его численной реализации.

Вначале уточним характер особенности функции $\varphi_n'(s)$ при $s \to 0$, руководствуясь схемой работ [2, 3], которая основана на асимптотике интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, и положив для простоты $l = \infty$. Покажем, что эта схема не решает однозначно вопрос о характере особенности, если она предполагается степенно-логарифмической.

Действительно, пусть функция $\varphi_n(y) \in C_1(0, \infty)$ и существует функция $\psi_n(s) \in H[0, \infty]$, такая, что

$$\varphi_n'(s) = \psi_n(s)\, s^{-\gamma_n} \ln^k s, \quad 0 < \operatorname{Re}\gamma_n < 1, \quad k \text{ — целое} \tag{1.2}$$

Представление (1.2) обобщает предположения работ [2, 3] о характере особенности $\varphi_n'(s)$, в которых положено соответственно $k = 0$ и $k = 1$. Для определения чисел γ_n выпишем асимптотику особых интегралов, входящих в уравнение (1.1), беря за основу асимптотику интеграла типа Коши с плотностью (1.2) в окрестности точки $y = 0$ ([4], гл. 1, § 8. 6)

$$\begin{gathered}
\int_0^\infty \varphi_n'(s) \frac{ds}{s-y} = -\frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi(1-\gamma_n)} \psi_n(0)\, y^{-\gamma_n} \ln^k y + \varphi_1(y) \\
\int_0^\infty \varphi_n'(s) \frac{ds}{s+ay} = \frac{\pi}{\sin\pi(1-\gamma_n)} \psi_n(0)\, (ay)^{-\gamma_n} \ln^k y + \varphi_2(y) \\
\int_0^\infty \varphi_n'(s) \frac{s(y-s)\,ds}{(y+s)^3} = \\
= -(1-\gamma_n)^2 \frac{\pi}{\sin\pi(1-\gamma_n)} \psi_n(0)\, y^{-\gamma_n} \ln^k y + \varphi_3(y) \\
a = \text{const} > 0, \quad \varphi_m(y) = O(y^{-\gamma_n} \ln^{k-1} y), \quad y \to 0, \quad m = 1, 2, 3
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Требование, чтобы уравнение (1.1) было справедливо и в точке $y = 0$, с учетом асимптотики (1.3), после умножения обеих частей уравнения на $y^{\gamma_n} \ln^{-k} y$ и перехода к пределу при $y \to 0$ позволяет выписать характеристические уравнения для определения постоянных γ_n

$$\begin{gathered}
f_1(\gamma_1) = 0, \quad f_2(\gamma_2) = 0 \\
f_1(\gamma) = \cos\pi(1-\gamma) - 2\varkappa^{-1}(1-\gamma)^2 + (\varkappa^2+1)(2\varkappa)^{-1}, \\
\varkappa = (3-\nu)(1+\nu)^{-1} \\
f_2(\gamma) = \cos\pi(1-\gamma) - \frac{A_5\lambda_2}{A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1-\gamma} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1-\gamma}\right] + \\
+ \frac{A_3\lambda_2 + A_4\lambda_1}{A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Первое уравнение соответствует изотропному, а второе — ортотропному случаям. Согласно работам [2, 3], оба уравнения не имеют комплекс ных корней, действительные части которых лежат в интервале (0, 1), при условиях $0 < \nu < {}^1/_2$ и $\lambda_1^2 > 0$ соответственно. При этих же условиях оба уравнения имеют по одному действительному корню $\gamma_{1,2} \in (0, 1)$, а при условиях $\nu = 0$ и $\nu_1 = \nu_2 = 0$, соответственно, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Таким образом, для изотропного и ортотропного материала при указанных выше условиях особенность функции $\varphi_n'(s)$ на краю стержня имеет вид

$$\varphi_n'(s) = O(s^{-\gamma_n} \ln^k s), \quad s \to 0$$

В случае $\nu = 0$ и $\nu_1 = \nu_2 = 0$ следует положить $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, и особенность становится логарифмической.

Полученные результаты, а также и результаты работ [2, 3] не совпадают между собой. Это объясняется тем, что асимптотика интеграла типа Коши (1.3) позволяет определить только постоянные γ_n, никак не фиксируя число k, предположенное здесь целым для упрощения рассуждений. Отказ от этого предположения не вызывает принципиальных затруднений, поскольку формулы для нецелых k, аналогичные формулам (1.3), можно получить по известной схеме ([5], § 6.7).

Изложенное позволяет сделать вывод, что заключение работы [3] о неверности предположения работы [2], связанного с определением характера особенности функции $\varphi_n'(s)$, необоснованно. Ниже это подтверждается путем выделения особенности функции $\varphi_n'(s)$ на основе точного решения уравнения (1.1).

2. Построим точное решение уравнения (1.1). С этой целью преобразуем его к виду

$$\varphi_n(y) + \mu_n \int_0^\infty g_n\left(\frac{y}{s}\right) \varphi_n'(s) \frac{ds}{s} = 0, \quad y > 0 \tag{2.1}$$

$$g_1(x) = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{x-1} + \frac{8-(3-\nu)(1+\nu)}{x+1} + \frac{2(1+\nu)^2}{(x+1)^2} - \frac{4(1+\nu)^2}{(x+1)^3}$$

$$g_2(x) = \left(\frac{A_1}{\lambda_1} - \frac{A_2}{\lambda_2}\right)\frac{1}{x-1} + \left(\frac{A_3}{\lambda_1} + \frac{A_4}{\lambda_2}\right)\frac{1}{x+1} -$$

$$- \frac{A_5}{\lambda_2}\, \frac{1}{\lambda_1 x \lambda_2^{-1} + 1} - \frac{A_6}{\lambda_1}\, \frac{1}{\lambda_2 x \lambda_1^{-1} + 1}$$

Интегральное слагаемое в (2.1) представляет собой свертку Меллина для одноименного преобразования [6]

$$\Phi(p) = \int_0^\infty \varphi'(s) s^{p-1} ds, \quad \varphi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(p) s^{-p} dp \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.1) будем разыскивать в классе функций $\varphi_n'(s)$, обладающих асимптотикой: $\varphi_n'(s) = O(s^{-\varepsilon})$, $s \to 0$, $0 < \varepsilon < 1$; $\varphi_n'(s) = O(s^{-1-\delta})$, $s \to \infty$, $\delta \geqslant 1$. В этом случае для существования интегралов Меллина от функций, входящих в (2.1), постоянную c в интегралах (2.2) следует выбирать из интервала $(\varepsilon, 1)$ (практически контур интегрирования во втором из интегралов (2.2) следует проводить левее прямой $\operatorname{Re} p = 1$).

Применим к уравнению (2.1) преобразование Меллина (2.2). Используя его свойства [6], придем к краевой задаче Карлемана для полосы [1]

$$\Phi_n(p_0 + 1) + \mu_n G_n(p_0) \Phi_n(p_0) = 0, \quad \operatorname{Re} p_0 = c \tag{2.3}$$

$$G_1(p) = -16\pi\varkappa(\varkappa + 1)^2 f_1(p) [\sin \pi(1-p)]^{-1}$$

$$G_2(p) = -\pi(A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2)^{-1} f_2(p) [\sin \pi(1-p)]^{-1}$$

Функция $f_n(p)$ определяется формулами (1.4), функция $\Phi_n(p)$ аналитична в полосе $c < \operatorname{Re} p < 1 + c$. Прием частичной факторизации [1] позволяет привести задачу (2.3) к стандартному виду

$$\Psi_n(p_0 + 1) + K_n(p_0)\Psi_n(p_0) = 0, \quad \operatorname{Re} p_0 = c \tag{2.4}$$
$$\Psi_n(p) = \Phi_n(p)\theta_n^{-p}\,[\Gamma(p)\cos(^1/_2)\pi p]^{-1}$$
$$\theta_1 = 16\pi\mu_1\varkappa(\varkappa + 1)^{-2}, \quad \theta_2 = \pi\mu_2(A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2)^{-1}$$
$$K_n(p) = \operatorname{ctg}(^1/_2\pi p)\,f_n(p)\,[\sin\pi(1 - p)]^{-1}$$

Здесь функция $\Psi_n(p)$ аналитична в полосе $c < \operatorname{Re} p < 1 + c$ всюду, за исключением точки $p = 1$, где у нее находится простой полюс. Функция $K_n(p)$ на прямой $\operatorname{Re} p = c$ непрерывна, не обращается в нуль, обладает асимптотикой $K_n(p) = 1 + O(\exp(-^1/_2\pi\,|p|))$, $|p| \to \infty$ и имеет приращение аргумента, равное нулю. В этом случае решение краевой задачи Карлемана для полосы (2.4) дается формулами [1]:

$$\Psi_n(p) = B_n X_n(p)\,[\sin\pi p]^{-1}, \quad c < \operatorname{Re} p < 1 + c \tag{2.5}$$
$$X_n(p) = \exp\left\{\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \ln K_n(s)\,[e^{2\pi i(s-p)} - 1]^{-1}\,ds\right\}$$

Здесь B_n — произвольная постоянная, которая должна быть зафиксирована условием $\varphi_n(0) = Q$. Реализовать его удобно в формуле $\Phi_n(1) = -Q$, равносильной исходному условию, поскольку $\varphi_n(\infty) = 0$. В результате реализации преобразованного условия с использованием формул (2.4) и (2.5) получим

$$B_n = -2Q\,[\theta_n X_n(1)]^{-1} \tag{2.6}$$

Вторая из формул (2.2), а также формулы (2.4) — (2.6) дают решение интегрального уравнения (1.1) в виде интеграла Меллина

$$\varphi_n'(y) = -\frac{Q}{\theta_n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(p)\,X_n^+(p)}{X_n(1)\sin(^1/_2\pi p)}\left(\frac{y}{\theta_n}\right)^{-p} dp \tag{2.7}$$

Здесь $X_n^+(p)$ — предельное значение функции $X_n(p)$, аналитической в полосе $c < \operatorname{Re} p < c + 1$, справа на прямой $\operatorname{Re} p = c$. Для выяснения поведения функции $\varphi_n'(y)$ при $y \to 0$ в интеграле (2.7) следует предварительно заменить значение $X_n^+(p)$ на предельное значение функции $X_n^-(p)$, аналитической в полосе $-1 + c < \operatorname{Re} p < c$, слева на прямой $\operatorname{Re} p = c$. Замена осуществляется по формуле [1]

$$X_n^-(p) = K_n(p)X_n^+(p), \quad \operatorname{Re} p = c$$

После этой замены подынтегральная функция интеграла (2.7) в полосе $-1 + c < \operatorname{Re} p < c$ аналитична всюду, за исключением нулей функции $f_n(p)$. Применяя теорему о вычетах к этой полосе, заменим интеграл по прямой $\operatorname{Re} p = c$ на сумму вычета относительно нуля функции $f_n(p)$ и интеграла по прямой $\operatorname{Re} p = -1 + c$. Этот вычет и определяет поведение функции $\varphi_n'(y)$ на краю стержня.

Принимая во внимание расположение простых корней уравнений (1.4), обнаружим, что при $0 < \nu < ^1/_2$ и $\lambda_1^2 > 0$ соответственно функция $\varphi_n'(y)$ имеет степенную особенность вида $\varphi_n'(y) = O(y^{-\gamma_n})$, где γ_n — вещественные нули функций $f_n(p)$. При $\nu = 0$ и $\nu_1 = \nu_2 = 0$ имеем $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 0$, следовательно, здесь функция $\varphi_n'(y)$ ограничена при $y \to 0$.

Для определения поведения функции $\varphi_n'(y)$ на бесконечности следует к интегралу (2.7) применить теорему Коши и сдвинуть контур интегрирования с прямой $\operatorname{Re} p = c$ на прямую $\operatorname{Re} p = 1 + c$. Используя затем формулу, связывающую предельные значения функции $X_n(p)$ на прямой $\operatorname{Re} p = 1 + c$, по теореме о вычетах обнаружим, что $\varphi_n'(y) = O(y^{-2})$. Это подтверждает, что класс, в котором разыскивается решение уравнения (2.1), выбран правильно ($\delta = 1$).

Остановимся еще на предельном случае сильной ортотропии ($\varepsilon \to 0$), для которого в работе [3] построено точное решение и на его основе выявлена логарифмическая особенность функции $\varphi_2'(y)$ при $y \to 0$. В этом случае ядро уравнения (1.1) принимает вид [3] (G_0 — модуль сдвига ортотропного материала)

$$K_2(y, s) = \sqrt{\frac{E_1}{G_0}}\left(\frac{1}{y-s} + \frac{1}{y+s}\right) \tag{2.8}$$

Повторяя проделанные выше выкладки, придем к задаче Карлемана (2.3) с коэффициентом

$$G_2(p) = -\pi\sqrt{E_1 G_0^{-1}} f_2(p)\,[\sin \pi(1-p)]^{-1}, \quad f_2(p) = \\ = \cos \pi(1-p) + 1$$

который фактеризуется в элементарных функциях, что дает возможность положить в формулах (2.5) — (2.7) $X(p) \equiv 1$ и записать решение уравнения (1.1), (2.8) так:

$$\varphi_2'(y) = -\frac{Q}{\theta_2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\theta_2^p \Gamma(p)}{\sin(^1/_2\pi p)}\, y^{-p}\, dp, \quad \theta_2 = \frac{SE_0}{h\sqrt{E_1 G_0}} \tag{2.9}$$

Поведение функции (2.9) при $y \to 0$ определяется ближайшей к прямой $\operatorname{Re} p = c$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p < c$ особой точкой подынтегральной функции. Такой точкой является полюс второго порядка $p = 0$. Вычет относительно этого полюса имеет слагаемое, содержащее множитель $\ln y$. Следовательно, функция $\varphi_2'(y)$, определяемая интегралом (2.9), имеет логарифмическую особенность при $y \to 0$, что совпадает с результатом, полученным в [3] для уравнения (1.1), (2.8).

Таким образом, вскрыта зависимость особенности функции $\varphi_2'(y)$ на краю стержня от соотношений между упругими постоянными опосредовано через расположение нулей функции $f_2(p)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$. Так, при $\lambda_1^2 > 0$ функция $f_2(p)$ имеет единственный вещественный простой нуль $\gamma_2 > 0$, определяющий асимптотику $\varphi_2'(y) = O(y^{-\gamma_2})$, $y \to 0$; при $\nu_1 = \nu_2 = 0$ нуль γ_2 попадает в точку $p = 0$ и функция $\varphi_2'(y)$ становится ограниченной при $y \to 0$, а при $\nu_1 = \nu_2 = 0$ и предельном случае сильной ортотропии точка $p = 0$ становится нулем второй кратности функции $f_2(p)$, что определяет асимцтотику $\varphi_2'(y) = O(\ln y)$, $y \to 0$.

Итак, предположение [2] о степенном характере особенности контактного напряжения на краю стержня полностью подтверждены, предположения же [3] о степенно-логарифмическом характере этой особенности при $\lambda_1^2 > 0$ и логарифмическом характере при $\nu_1 = \nu_2 = 0$ оказались неверными.

Автор благодарит Г. Я. Попова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Реут В. В., Тихоненко Л. Я.* Изгиб клиновидних пластинок с упругозакрепленными или подкрепленными гранями.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 151—160.
2. *Muki R., Sternberg E.* On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheets.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 4, p. 737—746.— Рус. перев.: Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1968, т. 35, № 4, с. 124—135.
3. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* О характере особенности контактных напряжений при передаче нагрузки от стержня к полубесконечной упругой пластине.— В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во Днепропетров. ун-та, 1979, с. 150—155.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. *Чибрикова Л. И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 302 с.
6. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 479 с.

Одесса

Поступила в редакцию
9.IX.1983