Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 539.3

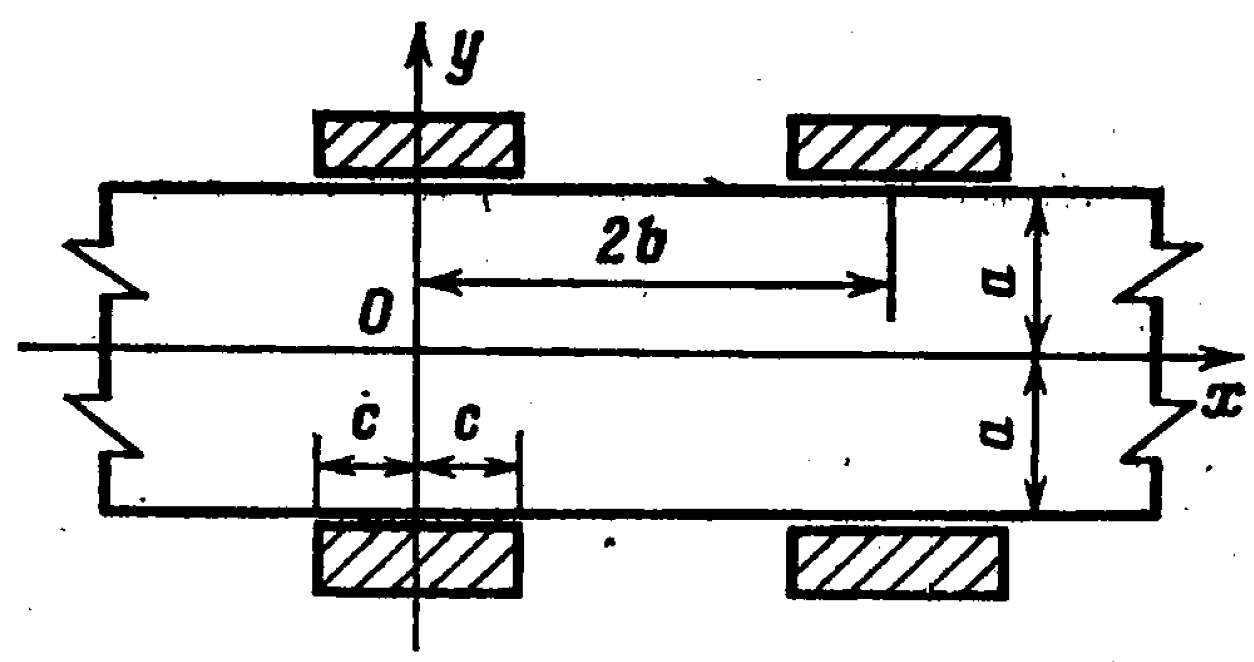
ОБ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Мироненко Н. И.

Рассматривается периодическая задача о действии жестких штампов на полосу. Основания штампов предполагаются произвольными выпуклыми, симметричными относительно их вертикальных осей. Традиционным способом задача сводится к парному сумматорному уравнению. Изучаются два случая: углы штампа давят на полосу (ширина площадки контакта известна), углы штампа не доходят до полосы (ширина площадки контакта неизвестна). Из полученного решения следует, как частный случай, решение для штампов с плоскими основаниями. Последнее является в то же время решением (с точностью до знака и обозначений) некоторой двоякопериодической задачи для плоскости с разрезами.

Рассматриваемая задача изучена другими методами в работах [1—3].

1. Область изучаемой полосы отнесем к комплексной плоскости $z = x + iy$ (см. фиг. 1, на которой основания штампов для простоты показаны плоскими). Штампы, действующие на полосу с обеих сторон, имеют одинаковую ширину и расположены симметрично с периодом $2b$. Следовательно, задача периодическая, поэтому все рассуждения будем относить к основному периоду $-b \leqslant x \leqslant b$.



Фиг. 1

Запишем граничные условия для верхней грани $y = a$

$$v = -f(x),\ |x| < c \qquad (1.1)$$
$$Y_y = 0,\ c < |x| \leqslant b$$
$$X_y = 0,\ |x| \leqslant b$$

Вид функции $f(x)$ будет указан ниже. Давление под штампами обозначим через $Y_{ys}(x)$, тогда нагрузку $Y_{ya}(x)$ по граням полосы можно представить следующим образом:

$$Y_{ya}(x) = \begin{cases} Y_{ys}(x), & |x| < c \\ 0, & c < |x| \leqslant b \end{cases};\quad X_{ya}(x) = 0,\quad |x| \leqslant b \qquad (1.2)$$

Разложим периодическую нагрузку $Y_{ya}(x)$ в ряд Фурье

$$Y_{ya}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \varkappa_n x,\quad \varkappa_n = \frac{n\pi}{b} \qquad (1.3)$$

$$a_0 = \frac{1}{b}\int_0^b Y_{ya}(x)\,dx,\quad a_n = \frac{2}{b}\int_0^b Y_{ya}(x)\cos\varkappa_n x\,dx$$

Перепишем теперь граничные условия (1.1), используя потенциалы Колосова — Мусхелишвили

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2G(u - if),\quad t = x + ia,\quad |x| < c \qquad (1.4)$$

$$\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} + t\overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)} = 0,\quad t = x + ia,\quad c < |x| \leqslant b \qquad (1.5)$$

Условие (1.4) иногда удобно продифференцировать по x

$$\varkappa\varphi'(t) - \overline{\varphi'(t)} - t\overline{\varphi''(t)} - \overline{\psi'(t)} = 2G(u' - if') \tag{1.6}$$
$$t = x + ia, \ |x| < c$$

Предполагая, что по граням полосы задана периодическая нагрузка (1.2), (1.3), решение задачи представим в таком виде:

$$\varphi(z) = \frac{a_0}{4}z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\varkappa_n}\sin\varkappa_n z \tag{1.7}$$
$$\psi(z) = \frac{3}{4}a_0 z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\varkappa_n}\sin\varkappa_n z - z\varphi'(z)$$
$$A_n = a_n \operatorname{sh}\mu_n/S(\mu_n), \quad S(\mu_n) = 2\mu_n + \operatorname{sh}2\mu_n$$
$$B_n = a_n(2\mu_n \operatorname{ch}\mu_n + \operatorname{sh}\mu_n)/S(\mu_n)$$
$$\mu_n = a\varkappa_n = n\pi/\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = b/a$$

В этом решении коэффициенты a_n неизвестны, так как неизвестно давление под штампами. Для определения a_n необходимо обратиться к (1.4)—(1.6). Подставим сначала (1.7) в (1.4) и выделим мнимую часть, так как именно она задана

$$\frac{a_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\mu_n}L(\mu_n)\cos\varkappa_n x = -\frac{2G}{a(\varkappa+1)}f(x) \tag{1.8}$$
$$L(\mu_n) = \operatorname{sh}^2\mu_n/S(\mu_n), \ |x| < c$$

Аналогично поступая с (1.7) и (1.6), приходим к следующему уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\mu_n)\sin\varkappa_n x = \frac{2G}{\varkappa+1}f'(x), \quad |x| < c \tag{1.9}$$

Наконец, подставив (1.7) в (1.5), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\varkappa_n x = 0, \quad c < |x| \leqslant b \tag{1.10}$$

Тем самым получено парное сумматорное уравнение (1.8), (1.10) (или (1.9), (1.10)) для определения коэффициентов a_n. Функцию $f(x)$, зависящую от формы основания штампа, зададим в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{x}{c}\right)^{2k}, \quad |x| \leqslant c \tag{1.11}$$

Здесь величина γ_0 неизвестна, так как характеризует жесткое смещение штампа, остальные коэффициенты γ_k ($k \geqslant 1$) заданы. По бокам штампы ограничены прямыми $x = \pm c$.

Будем рассматривать отдельно два случая. Первый — углы штампа $x = \pm c$ давят на полосу. В этом случае ширина площадки контакта известна и равна $2c$. Во втором случае будем предполагать, что углы штампа не доходят до полосы. Здесь ширина площадки контакта $2c_1 < 2c$ неизвестна, но решение задачи будет получено в такой форме, что эту ширину необходимо будет задавать заранее, а другие величины считать неизвестными.

2. Рассмотрим первый случай (углы штампа давят на полосу). Ширина площадки контакта равна ширине штампов $2c$. В качестве парного сумматорного уравнения возьмем (1.8), (1.10) с учетом (1.11)

$$\frac{a_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n} L(\mu_n) \cos \varkappa_n x = -\frac{2G}{a(\varkappa+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{x}{c}\right)^{2k}, \quad |x| < c \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \varkappa_n x = 0, \quad c < |x| \leqslant b$$

Для решения этого уравнения построим сначала следующую разрывную функцию:

$$\frac{\delta_{k0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2k}(\varkappa_n c) \cos \varkappa_n x = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{b}{\pi} \dfrac{T_{2k}\left(\frac{x}{c}\right)}{\sqrt{c^2 - x^2}}, & |x| < c \\ 0, & c < |x| \leqslant b \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $J_{2k}(t)$ — функция Бесселя первого рода, $T_{2k}(t)$ — многочлены Чебышёва первого рода, δ_{k0} — символ Кронекера.

Если теперь коэффициенты a_n взять в таком виде:

$$a_0 = -\alpha_0^* \frac{P^*}{2b}, \quad \varepsilon = \frac{\pi c}{b} \tag{2.3}$$

$$a_n = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k^* J_{2k}(n\varepsilon), \quad n \geqslant 1$$

то второе уравнение (2.1) на основании (2.2) удовлетворяется автоматически. Подставив (2.3) в (1.3) и воспользовавшись (2.2) и (1.2), получим давление под штампом

$$Y_{ys}(x) = -\frac{P^*}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^* T_{2k}\left(\frac{x}{c}\right), \quad |x| < c \tag{2.4}$$

(P^* — сила, прижимающая штампы). Используя (2.4) в условии равновесия штампа

$$\int_{-c}^{c} Y_{ys}(x)\, dx = -P^* \tag{2.5}$$

находим $\alpha_0^* = 1$.

Ниже понадобится формула [4]

$$\cos \varkappa_n x = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tau_m J_{2m}(n\varepsilon) T_{2m}\left(\frac{x}{c}\right) \tag{2.6}$$

$$\tau_0 = {}^1/_2, \quad \tau_{m \geqslant 1} = 1, \quad |x| \leqslant c$$

а также следующее разложение:

$$x^k = 2^{1-k} \sum_{m=0}^{[k/2]} \nu_{[k/2]-m}^{(k)} C_k^{\,m} T_{k-2m}(x), \quad |x| \leqslant 1 \tag{2.7}$$

$$\nu_0^{(k)} = {}^1/_2, \quad \nu_{n \geqslant 1}^{(k)} = 1 \quad (k = 0, 2, 4, \ldots), \quad \nu_{n \geqslant 0}^{(k)} = 1 \quad (k = 1, 3, 5, \ldots)$$

Используя (2.7), выразим сумму в правой части первого уравнения (2.1) через $T_k(x/c)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{x}{c}\right)^{2k} = \sum_{s=0}^{\infty} A_s^* T_{2s}\left(\frac{x}{c}\right), \quad |x| \leqslant c \tag{2.8}$$

$$A_s^* = \sum_{k=s}^{\infty} 2^{1-2k} \nu_s^{(2k)} \gamma_k C_{2k}^{k-s}$$

Заметим, что величина A_0^* неизвестна, так как неизвестна γ_0, остальные A_s^* известны.

Для удовлетворения первому уравнению (2.1) подставим в него (2.3), (2.6) и (2.8), поменяем в левой части порядок суммирования и приравняем выражения при одинаковых многочленах Чебышева справа и слева [5]. Это приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения α_k^*

$$(2.9)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{8\varepsilon_1}\delta_{k0}+a_{0k}^*\right)\alpha_k^*=2\beta A_0^*$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}^*\alpha_k^*=(-1)^m\beta A_m^*,\quad m\geqslant 1$$

$$a_{mk}^*=(-1)^{k+m}a_{km}^*=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(\mu_n)}{n}J_{2k}(n\varepsilon)J_{2m}(n\varepsilon)$$

$$\beta=\frac{\pi}{\varkappa+1}\frac{G}{P^*}$$

В рассматриваемой задаче известны ширина штампа $2c$ (а следовательно, и ε) и сила P^*, но неизвестна глубина внедрения штампа γ_0 (следовательно, и A_0^*). Поэтому в (2.9) правая часть в первом уравнении неизвестна и систему необходимо решать дважды с двумя различными правыми частями. Первый раз в первом уравнении (2.9) правую часть необходимо взять нулевой, остальные правые части сохранить. Второй раз, наоборот, правую часть в первом уравнении необходимо сохранить, а в остальных уравнениях правую часть положить равной нулю. Суммируя решения этих двух систем, находим решение системы (2.9)

$$(2.10)\qquad \alpha_k^*=\frac{G}{P^*}\frac{c}{\varkappa+1}\left(\tau_k^{(1)}+\tau_k^{(2)}\frac{A_0^*}{c}\right)\quad (k\geqslant 0)$$

($\tau_k^{(1)}$ и $\tau_k^{(2)}$ — числовые коэффициенты). В полученном решении неизвестно A_0^*. Для его определения используем тот факт, что $\alpha_0^*=1$. Отсюда и из (2.10) при $k=0$ выражаем A_0^* через P^*. Тем самым определена и зависимость между глубиной внедрения штампа γ_0 и силой P^*. Заметим, что в случае плоского штампа $\gamma_k=0$ ($k\geqslant 1$), поэтому (см. (2.8)) $A_0^*=$ $=\gamma_0$. Исследование системы (2.9) показывает, что она в зависимости от значений параметров ε и ε_1 является в худшем случае квазирегулярной.

3. Теперь займемся вторым случаем (углы штампа не доходят до полосы). Здесь будем предполагать заданной ширину площадки контакта $2c_1$, искомыми — давление под штампами, глубину внедрения штампов и силу, действующую на штампы, P^{**}.

В качестве парного уравнения возьмем уравнения (1.9), (1.10). Производную, входящую в (1.9), запишем в таком виде:

$$(3.1)\qquad f'(x)=\frac{2}{c_1}\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k^*\left(\frac{x}{c_1}\right)^{2k-1},\quad |x|\leqslant c_1;\quad \gamma_k^*=\gamma_k\left(\frac{c_1}{c}\right)^{2k}\quad (k\geqslant 0)$$

Для решения упомянутого парного уравнения понадобится следующая разрывная функция:

$$(3.2)\qquad \frac{\varepsilon_2}{4}\delta_{k0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}(n\varepsilon_2)}{n}\cos\varkappa_n x=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}\sqrt{1-\dfrac{x_2}{c_1^2}}\,U_{2k}\left(\dfrac{x}{c_1}\right), & |x|\leqslant c_1\\ 0,\quad c_1\leqslant|x|\leqslant b; & \varepsilon_2=\pi c_1/b\end{cases}$$

Здесь $U_{2k}(t)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Решение уравнения (1.9), (1.10) возьмем в таком виде:

$$(3.3)\qquad a_0 = -\frac{P^{**}}{2b}\alpha_0^{**}$$

$$a_n = -\frac{2P^{**}}{n\pi c_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\alpha_k^{**}J_{2k+1}(n\varepsilon_2)\quad (n \geqslant 1)$$

Как следует из (3.2), уравнение (1.10) будет удовлетворено при этом автоматически. Подставив (3.3) в (1.3) и используя (1.2), получим давление под штампами (P^{**} — сила, действующая на штампы)

$$(3.4)\qquad Y_{ys}(x) = -\frac{2P^{**}}{\pi c_1}\sqrt{1-\frac{x^2}{c_1^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{**}U_{2k}\left(\frac{x}{c_1}\right),\quad |x| \leqslant c_1$$

Подставляя (3.4) в условие равновесия штампа, аналогичное (2.5), получим, что $\alpha_0^{**} = 1$.

Чтобы удовлетворить уравнению (1.9), представим $\sin \varkappa_n x$ следующим образом [4]:

$$(3.5)\qquad \sin\varkappa_n x = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(n\varepsilon_2)T_{2m+1}\left(\frac{x}{c_1}\right),\quad |x| \leqslant c_1$$

Правую часть (1.9), т. е. (3.1), также выразим через $T_k(t)$, используя (2.7)

$$(3.6)\qquad f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}B_m^* T_{2m+1}\left(\frac{x}{c_1}\right),\quad |x| \leqslant c_1$$

$$B_m^* = \sum_{k=m+1}^{\infty}2^{2-2k}k\gamma_k^* C_{2k-1}^{k-m-1}$$

Подставляя теперь (3.3), (3.5) и (3.6) в (1.9), меняя слева порядок суммирования и приравнивая справа и слева выражения при одинаковых многочленах Чебышева первого рода, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения α_k^{**} ($k \geqslant 0$)

$$(3.7)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}a_{mk}^{**}\alpha_k^{**} = (-1)^{m+1}\beta^* B_m^*\quad (m \geqslant 0),\quad \beta^* = \frac{\pi}{\varkappa+1}\frac{G}{P^{**}}$$

$$a_{mk}^{**} = (-1)^{k+m}\frac{2k+1}{2m+1}a_{km}^{**} =$$

$$= (-1)^k(2k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(\mu_n)}{n}J_{2k+1}(n\varepsilon_2)J_{2m+1}(n\varepsilon_2)$$

Исследование системы (3.7) показывает, что она, как минимум, квазирегулярна в зависимости от значений параметров ε_1 и ε_2. Решение этой системы можно записать так (τ_k^* — числовые коэффициенты):

$$(3.8)\qquad \alpha_k^{**} = \tau_k^*\frac{c_1}{\varkappa+1}\frac{G}{P^{**}}$$

Из (3.8) при $k = 0$ и того факта, что $\alpha_0^{**} = 1$, определим силу P^{**}. Для определения глубины внедрения штампов $\gamma_0 = \gamma_0^*$ обратимся к

(1.8), где $f(x)$ (см. (1.11)) запишем так (используем (2.7)):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^* \left(\frac{x}{c_1}\right)^{2k} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{**} T_{2m}\left(\frac{x}{c_1}\right)$$

$$A_m^{**} = \sum_{k=m}^{\infty} 2^{1-2k} \nu_m^{(2k)} \gamma_k^* C_{2k}^{k-m}, \quad |x| \leqslant c_1$$

Далее воспользуемся формулой (2.6), в которой необходимо заменить ε на ε_2, c на c_1, а $J_{2m}(n\varepsilon_2)$ — представить следующей суммой [6]:

$$J_{2m}(n\varepsilon_2) = (n\varepsilon_2/(4m)) \left[J_{2m-1}(n\varepsilon_2) + J_{2m+1}(n\varepsilon_2)\right]$$

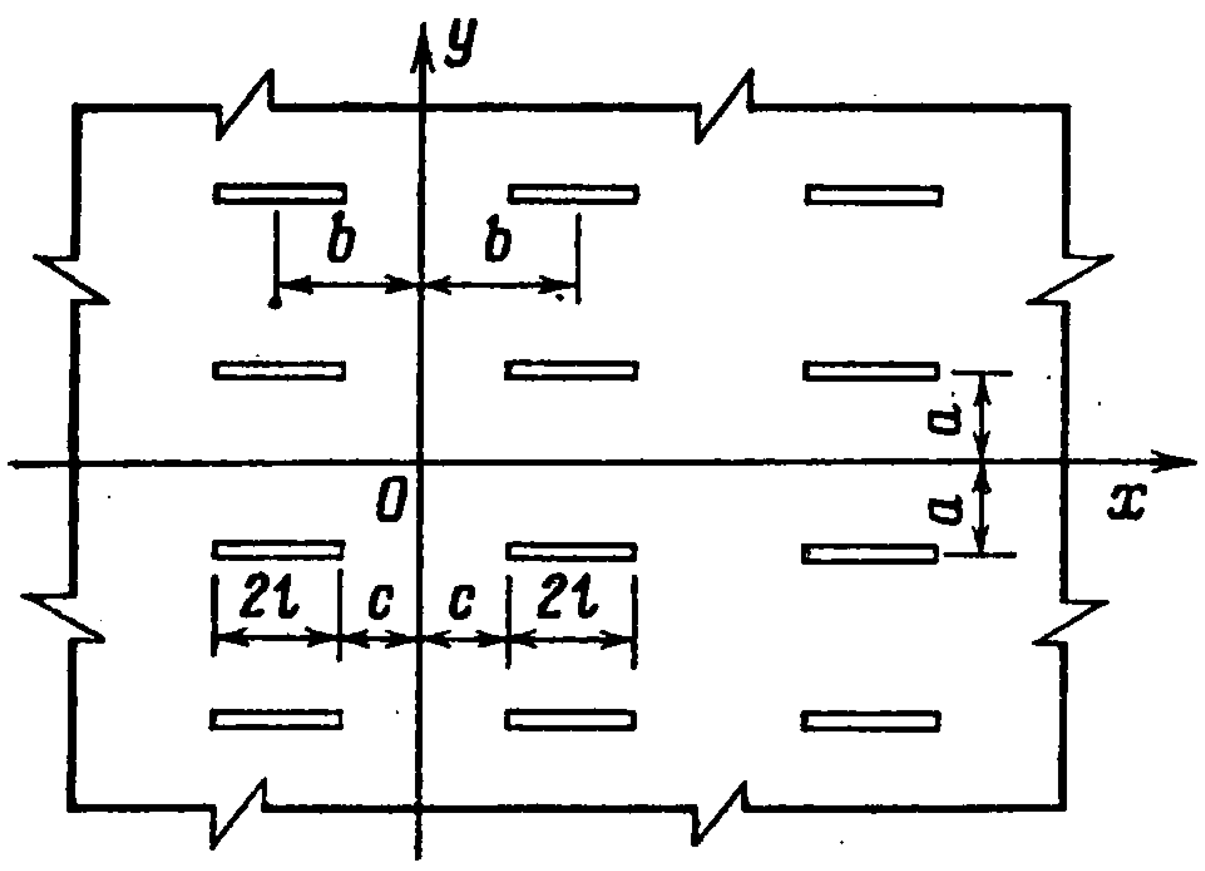
Подставляя все это в (1.8) и поступая, как при выводе системы (3.7), получим бесконечную систему уравнений, все уравнения в которой, кроме первого, удовлетворяются тождественно в силу (3.7). Первое уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\pi}{16} \alpha_0^{**} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \lambda_k \alpha_k^{**} = \varepsilon_1 \beta^* A_0^{**}$$

$$\lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\mu_n)}{n^2} J_0(n\varepsilon_2) J_{2k+1}(n\varepsilon_2)$$

Из этого уравнения и определяем A_0^{**} (в него входит γ_0^*), так как силу P^{**} определили ранее.

На оси полосы в силу симметрии касательное напряжение $X_y = 0$ и вертикальное перемещение $v = 0$, поэтому, очевидно, полученное решение является решением задачи для полосы шириной a, покоящейся без трения на абсолютно жестком основании и нагруженной по верхней грани штампами [1].



Фиг. 2

Рассмотрим следующую задачу. Плоскость ослаблена двоякопериодической системой разрезов (фиг. 2) и растягивается на бесконечности в направлении оси Oy средним напряжением $Y_y = q$. Любую прямую $y = ka$ ($k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$), а также $y = na$ ($n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$) можно принять в качестве оси симметрии, поэтому отсюда следует, что перемычки между разрезами всегда остаются прямолинейными.

Выделим из рассматриваемой плоскости полосу $|x| \leqslant \infty$, $|y| \leqslant a$ и запишем для основного периода этой полосы граничные условия

$$v(x) = \pm f_0 = \text{const}, \ |x| < c, \ y = \pm a$$
$$Y_y(x) = 0, \ c < |x| \leqslant b, \ y = \pm a; \quad X_y(x) = 0, \quad |x| \leqslant b, \ y = \pm a$$

Эти граничные условия являются частным случаем условий (1.1). Следовательно, данную задачу можно считать решенной (см. п. 2). При этом необходимо, в частности, положить $P^* = -2qb$. Тогда напряжение Y_y в перемычке $|x| < c$, $y = a$ будет определяться формулой (2.4) с указанной заменой для силы P^*. Из этой формулы следует коэффициент интенсивности напряжений

$$K_1 = \frac{2qb}{\sqrt{\pi c}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^*$$

Здесь $2c$ — ширина перемычки (ширина разреза $2l = 2(b - c)$). Система разрезов (трещин) в рассматриваемом случае является неравновесной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Периодические контактные задачи для упругой полосы.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 4, с. 18—33.
2. Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. 263 с.
3. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 53—61.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415 с.
5. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.

Поступила в редакцию
24.II.1983

Алма-Ата