Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 539.3

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Фокин А. Г.

Развивается метод решения линейных краевых задач, основанный на интерпретации их в духе функционального анализа. В частном случае теории упругости поля напряжений и деформаций рассматриваются в качестве элементов действительного гильбертова пространства симметричных тензоров второго ранга. На базе второй производной тензора Грина уравнения равновесия строятся проектирующие операторы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, удовлетворяющие равенству $\bar{P}+\bar{Q}=I$. Решение смешанной краевой задачи представляется в форме рядов Неймана, достаточные условия сходимости которых записаны в виде операторных неравенств, допускающих простую интерпретацию на языке энергетических функционалов. Усиление этих условий позволяет выразить их в терминах близости коэффициентов задачи λ и λ_c. Дается представление потенциальной энергии в виде некоторого функционала, который всегда может быть разложен в ряд. Получены границы, внутри которых находится точное значение потенциальной энергии.

Цель данной работы — разработка метода решения линейных краевых задач, основанного, с одной стороны, на формализме тензоров Грина, а с другой — на интерпретации этих задач в духе функционального анализа. Рассмотрение полей напряжений σ и деформаций ε в качестве элементов действительного гильбертова пространства H симметричных тензоров второго ранга и введение операторов P и Q, построенных на базе тензора Грина G и действующих в пространстве H, дает возможность перейти от уравнения равновесия к функциональному уравнению в форме (1.13). Часто используемый для решения подобных уравнений метод итераций приводит к решению в форме рядов Неймана (1.15), условия сходимости которых не всегда очевидны.

Предполагается, что упругие свойства исследуемой среды описываются симметричным тензором четвертого ранга $\lambda=\lambda(\mathbf{r})$. (Здесь и далее почти везде тензорные индексы для простоты опущены, векторные величины обозначены жирными буквами. В произведении A_kB_l тензора A_k ранга k и тензора B_l ранга l проводится суммирование по всем индексам тензора B_l, если $l<k$, и по n внутренним индексам тензоров A_k и B_l, если $k=l=2n$).

В качестве вспомогательной среды (среды сравнения) используется среда, для которой решение исходной задачи известно. Ее упругие свойства описываются тензором λ_c. Не уменьшая общности, будем считать λ и λ_c симметричными (см. п. 2) операторами. Это позволит распространить излагаемый метод на вязкоупругие среды и среды с микроструктурой. В п. 2 получены важные соотношения для операторов P, Q и связанных с ними $\bar{P}$, $\bar{Q}$. Показано, что последние принадлежат к классу проектирующих. Это обстоятельство оказывает существенное влияние на форму условий сходимости рядов (2.14). Огрубление достаточных условий сходимости (3.4) и (3.5) приводит к условиям (3.7) и (3.8) (или (3.11)), которые в случае $\lambda_c\mu_c\neq I$ оказываются независимыми и могут быть удовлетворены одновременно.

В п. 4 дано представление потенциальной энергии U в виде функционалов, рассчитываемых с помощью вспомогательных полей σ_c и ε_c, относящихся к среде сравнения. В п. 5 показано, что энергия u' представима в форме рядов (5.1) или (5.2), знакоопределенность которых зависит от свойств функционалов l_k или m_k соответственно. В любом случае могут быть рассчитаны границы, внутри которых находится точное значение u'.

1. Рассмотрим уравнение равновесия для произвольной линейной упругой среды с граничными условиями

$$L\mathbf{u}=-\mathbf{f},\quad L=\operatorname{div}\lambda\operatorname{def}\equiv\nabla\lambda\nabla,\quad \mathbf{r}\in V \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0,\quad \mathbf{r}\in S_1;\quad \mathbf{t}=\mathbf{t}_0,\quad \mathbf{r}\in S_2 \tag{1.2}$$
$$\mathbf{t}=\sigma\mathbf{n},\quad \sigma=\lambda\varepsilon,\quad S_1\cup S_2=S$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор смещений, $\mathbf{f}$ — вектор объемной плотности внешних сил, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, ограничивающей объем V данной среды. Тензор деформаций ε связан с вектором смещений соотношением $\varepsilon = \operatorname{def} \mathbf{u}$, вследствие чего он удовлетворяет уравнению совместности [1]

$$\text{(1.3)} \qquad \operatorname{Ink} \varepsilon = 0, \quad \operatorname{Ink}_{ijkl} = e_{ipk} e_{jql} \nabla_p \nabla_q$$

где по дважды встречающимся индексам проводится суммирование.

Наряду с (1.1)—(1.3) будем предполагать наличие аналогичных уравнений для среды сравнения, переход к которым осуществляется заменой λ на λ_c. Соответствующие этой среде поля обозначены дополнительным индексом c.

Установим связь между полями ε и ε_c. С этой целью введем разностное поле $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c \equiv \mathbf{u}'$, которому в среде с упругими свойствами λ_c соответствуют напряжения $\sigma_1 = \lambda_c \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \operatorname{def} \mathbf{u}_1 = \varepsilon'$. Очевидно, что $\sigma_1 \neq \sigma' = \sigma - \sigma_c$. Используя тензор поляризованных напряжений τ [1], запишем

$$\text{(1.4)} \qquad \sigma' = \sigma_1 + \tau = \lambda_c \varepsilon' + \tau$$

Вычитая из уравнения (1.1) и граничных условий (1.2) соответственно уравнение и граничные условия для среды сравнения и учитывая, что внешние воздействия в обоих случаях одинаковы, получим уравнение с граничными условиями

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{gathered} L_c \mathbf{u}_1 = -\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{f}_1 = \nabla \tau, \quad \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{r} \in S_1; \quad \mathbf{t}_1 = -\tau \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} \in S_2 \end{gathered}$$

Решение задачи (1.5) найдем при помощи тензора Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, удовлетворяющего уравнению [2, 3] и однородным граничным условиям

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{gathered} L_c G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1); \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in V \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_1; \quad T(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_2; \quad \mathbf{r}_1 \in V \\ T_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = n_p \lambda^c_{ipkl} \nabla_k G_{lj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] \end{gathered}$$

В общем решении задачи (1.5) перейдем в подынтегральных выражениях к поляризованным напряжениям τ и используем теорему Гаусса — Остроградского. Получим

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{gathered} u_i'(\mathbf{r}) = -\int \tau_{jk}(\mathbf{r}_1) \nabla_k^1 G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \, dV_1 + \Delta u_i'(\mathbf{r}) \\ \Delta u_i'(\mathbf{r}) = \int [G_{ji}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) t_j'(\mathbf{r}_1) - T_{ji}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) u_j'(\mathbf{r}_1)] \, dS(\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{t}' = \sigma' \mathbf{n} \end{gathered}$$

где ∇^1 — оператор набла для координаты $\mathbf{r}_1$.

Решение (1.7) содержит поверхностный интеграл $\Delta u_i'(\mathbf{r})$, равный нулю внутри области и не определенный на границе S, так как его подынтегральное выражение равно нулю во всех точках поверхности интегрирования, кроме одной, где оно обращается в бесконечность. Предельные же значения этого интеграла равны нулю. Учитывая это замечание, решение (1.7) будем далее писать без члена $\Delta u_i'(\mathbf{r})$.

Полю смещений (1.7) соответствует поле деформаций

$$\text{(1.8)} \qquad \varepsilon_{ij}' = \nabla_{(i} u'_{j)} = -\int \nabla_{(i} G_{j)(k, l_1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \tau_{kl}(\mathbf{r}_1) \, dV_1$$

где по индексам, заключенным в круглые скобки, проводится симметрирование, а индекс l_1 означает дифференцирование, соответствующее оператору ∇_l^1.

Перепишем (1.8) в форме

(1.9) $$\varepsilon' = Q\tau, \quad Q_{ijkl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\nabla_{(i}G_{j)(k,\, l)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$$

Здесь интегральный оператор Q и его ядро $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ обозначены одной и той же буквой.

Подставляя (1.9) в (1.4), найдем

(1.10) $$\sigma' = P\eta, \; \eta = -\mu_c\tau$$

где интегральный оператор P связан с Q соотношениями

(1.11) $$-P = \lambda_c + \lambda_c Q \lambda_c, \quad -Q = \mu_c + \mu_c P \mu_c; \quad \lambda_c \mu_c = I$$

Формулы (1.9) и (1.10) совпадают по форме с аналогичными соотношениями работы [4], однако здесь они получены в более общем случае.

Выражая в (1.4) τ через η, получим

(1.12) $$\varepsilon' = \mu_c \sigma' + \eta$$

Здесь η — тензор поляризованных деформаций, играющий роль, аналогичную τ в формуле (1.4). Из (1.4) и (1.12) вытекают равенства

$$\tau = \lambda'\varepsilon, \; \eta = \mu'\sigma; \; x' \equiv x - x_c, \; \lambda\mu = I$$

при помощи которых (1.9) и (1.10) приводятся к виду

(1.13) $$\varepsilon = \varepsilon_c + Q\tau = \varepsilon_c + Q\lambda'\varepsilon, \quad \sigma = \sigma_c + P\eta = \sigma_c + P\mu'\sigma$$

Полученные соотношения представляют собой неоднородные линейные интегральные уравнения второго рода [3]. В рассматриваемом случае область интегрирования V фиксирована, в связи с чем уравнения (1.13) иногда называют интегральными уравнениями фредгольмова типа [3]. Решение каждого из них позволяет выразить неизвестные поля σ и ε через известные σ_c и ε_c, что равносильно решению задачи (1.1) и (1.2). Таким образом, любое из уравнений (1.13) эквивалентно задаче (1.1), (1.2). (Указанное обстоятельство допускает рассмотрение, при котором уравнения (1.13) оказываются независимыми одно от другого. В этом случае, однако, необходимо использовать две среды сравнения, упругие свойства которых описываются тензорами $\lambda_c^{(1)} \equiv \lambda_c$ и $\lambda_c^{(2)} \equiv \mu_c^{-1}$ соответственно. Очевидно, что $\lambda_c\mu_c \neq I$). Вектор смещений $\mathbf{u}$ может быть найден из (1.7).

Соотношения (1.13), с другой стороны, могут быть истолкованы как функциональные уравнения в действительном гильбертовом пространстве H симметричных тензоров второго ранга. При этом решение уравнений (1.13) сводится к проблеме отыскания операторов a и b вида

(1.14) $$a = (I - X)^{-1}, \; X = Q\lambda'; \; b = (I - Y)^{-1}, \; Y = P\mu'$$

которые при определенных условиях представимы в виде рядов Неймана [3, 5]

(1.15) $$a = \sum_{k=0}^{\infty} X^k, \quad b = \sum_{k=0}^{\infty} Y^k$$

Прежде чем исследовать условия, при которых возможны разложения (1.15), получим некоторые равенства для операторов P и Q.

2. Скалярное произведение двух элементов ε и σ пространства H, обозначаемое посредством (ε, σ), определим равенством

(2.1) $$(\varepsilon, \sigma) = \int \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\, dv, \quad dv \equiv \frac{dV}{V}$$

В данной работе используются симметричные (эрмитовы) операторы, т. е. операторы, удовлетворяющие равенству $A^+ = A$, где индекс плюс означает операцию сопряжения, которая в рассматриваемом случае действительных полей сводится к транспонированию, определяемому соотношением [3, 5]

$$(2.2) \qquad (\varepsilon_1, A\varepsilon_1) = (A^+\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Введенный в (1.9) оператор Q с учетом (2.2) и (1.1) может быть представлен в виде

$$(2.3) \qquad Q = -\nabla M \nabla^+$$

где M — интегральный оператор, ядро которого — тензор Грина G.

Покажем, что оператор Q симметричный. С этой целью подействуем оператором «плюс» на обе части (2.3). Это дает

$$Q^+ = -(\nabla M \nabla^+)^+ = -(\nabla^+)^+ M^+ \nabla^+$$

Принимая во внимание теорему взаимности [2], имеющую смысл условия симметричности оператора M, а также равенство $(\nabla^+)^+ = \nabla$, получим $Q^+ = Q$. В силу (1.11) оператор P также симметричен. Для λ и λ_c условие симметричности считается выполненным.

Рассмотрим скалярное произведение (ε', σ'), равное в силу (1.9), (1.10) и (2.2)

$$(\varepsilon', \sigma') = (Q\tau, P\eta) = (\tau, Q^+P\eta) = (\tau, QP\eta)$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$(\varepsilon', \sigma') = \frac{1}{V}\int \mathbf{u}'\mathbf{t}'\, ds - \int \mathbf{u}' \operatorname{div} \sigma'\, dv$$

в котором поверхностный интеграл (точно равный нулю в силу граничных условий (1.5)) должен быть вообще отброшен в связи с процедурой расчета объемных интегралов, содержащих разностные поля, введенной при получении (1.8) из (1.7). Объемный же интеграл в правой части этого равенства обращается в нуль вследствие уравнения (1.5), записанного с учетом (1.4) в виде $\nabla\sigma' = 0$. Таким образом, окончательно получим

$$(2.4) \qquad (\tau, QP\eta) = (\eta, PQ\tau) = 0$$

Равенства (2.4) позволяют вывести важные соотношения для операторов P и Q. Подставляя в (2.4) оператор P согласно (1.11) и выражая η через τ посредством (1.10), найдем

$$(2.5) \qquad (\tau, Q\tau) = -(\tau, Q\lambda_c Q\tau) = -(Q\tau, \lambda_c Q\tau)$$

или в операторной форме

$$(2.6) \qquad Q + Q\lambda_c Q = 0$$

В силу положительности интегральной формы $(\varepsilon', \lambda_c\varepsilon')$ равенство (2.5) означает, что оператор Q отрицательно-определенный (в смысле неравенства $(\tau, Q\tau) < 0$). Подставляя в (2.4) оператор Q согласно (1.11), аналогичным образом запишем

$$(2.7) \qquad (\eta, P\eta) = -(\eta, P\mu_c P\eta) = -(P\eta, \mu_c P\eta)$$

или в операторной форме

$$(2.8) \qquad P + P\mu_c P = 0$$

В силу положительности $(\sigma', \mu_c\sigma')$ равенство (2.7) означает, что оператор P отрицательно-определенный, т. е. $(\eta, P\eta) < 0$.

В выкладках, приведенных выше, фигурировали два поля ε и $\sigma = \lambda\varepsilon$, принадлежащие пространству H, но отличающиеся размерным множителем λ. Удобнее, однако, освободиться от этих различий, сделав оба поля одинаковыми в смысле размерности. Этого можно достичь путем умножения полей σ и ε на симметричные положительные операторы $\mu_c^{1/2}$ и $\lambda_c^{1/2}$ соответственно. В силу положительности и симметричности λ_c представление $\lambda_c = (\lambda_c^{1/2})^2$ однозначно [5].

Введем обозначения для полей и операторов

$$\bar{\sigma} = \mu_c^{1/2}\sigma, \quad \bar{\varepsilon} = \lambda_c^{1/2}\varepsilon; \quad \bar{P} = -\mu_c^{1/2} P \mu_c^{1/2}, \quad \bar{Q} = -\lambda_c^{1/2} Q \lambda_c^{1/2}$$

Уравнения (1.13) примут вид

$$(2.9) \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_c - \bar{Q}\bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}, \quad \bar{\lambda}' = \mu_c^{1/2}\lambda'\mu_c^{1/2}; \quad \lambda_c^{1/2}\mu_c^{1/2} = I$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_c - \bar{P}\bar{\mu}'\bar{\sigma}, \quad \bar{\mu}' = \lambda_c^{1/2}\mu'\lambda_c^{1/2}; \quad \bar{\sigma}_c = \bar{\varepsilon}_c = \lambda_c^{1/2}\varepsilon_c$$

Из равенств (1.11) получим

$$(2.10) \qquad \bar{P} + \bar{Q} = I$$

а равенства (2.6) и (2.8) переходят в

$$(2.11) \qquad \bar{P}^2 = \bar{P}, \ \bar{Q}^2 = \bar{Q}$$

В силу (2.10) и (2.11) положительные симметричные операторы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ обладают свойствами проектирующих операторов [5]. Таким образом, пространство H представимо в виде суммы $H_1 + H_2$ двух подпространств, служащих ортогональными дополнениями одно другого. Для проектирующих операторов $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ справедливы неравенства [5]

$$(2.12) \qquad 0 \leqslant \bar{P} \leqslant I, \ 0 \leqslant \bar{Q} \leqslant I$$

где левые значения имеют место, когда H_1 или H_2 состоят из одного нулевого элемента, а правые — если H_1 или H_2 совпадают с H.

Отметим, наконец, что решения уравнений (2.9) имеют вид

$$(2.13) \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{a}\bar{\varepsilon}_c, \quad \bar{a} = \lambda_c^{1/2} a \mu_c^{1/2}; \quad \bar{\sigma} = \bar{b}\bar{\sigma}_c, \quad \bar{b} = \mu_c^{1/2} b \lambda_c^{1/2}$$

причем аналогично (1.14), (1.15) для операторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будем иметь

$$(2.14) \qquad \bar{a} = (I - \bar{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{X}^k, \quad \bar{X} = -\bar{Q}\bar{\lambda}'$$

$$\bar{b} = (I - \bar{Y})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Y}^k, \quad \bar{Y} = -\bar{P}\bar{\mu}'$$

Представление $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в форме рядов возможно при условии их сходимости, к исследованию которой и переходим.

3. Ниже рассматривается равномерная (по норме) сходимость рядов (2.14). Будем говорить [5], что последовательность $\bar{a}_{(n)}$ сходится к $\bar{a}$ по норме, если $\| \bar{a}_{(n)} - \bar{a} \| \to 0$ при $u \to \infty$. Понятие нормы, как известно, непосредственно связано со скалярным произведением (2.1). По определению, имеем [3, 5] (A — некоторый оператор)

$$(3.1) \qquad \| f \| = (f, f)^{1/2}, \quad \| A \| = \sup_{f \neq 0} \frac{\| Af \|}{\| f \|}, \quad f \in H$$

Согласно теореме Банаха [6], оператор $(1 - \bar{X})$ имеет непрерывный обратный оператор $\bar{a}$ вида (2.14), если норма оператора $\bar{X}$ удовлетворяет неравенству $\| \bar{X} \| \leqslant k_1 < 1$. Необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\bar{a}$ из (2.14) является [6] выполнение при некотором n неравенства $\| \bar{X}^n \| \leqslant k_1 < 1$.

Согласно определению (3.1), условие теоремы Банаха (сходимости первого ряда (2.14)) можно записать в виде

$$(3.2) \qquad \| \bar{X} f \|^2 = (f, \ \bar{X}^+ \bar{X} f) \leqslant k_1^2 \ (f, \ f) = k_1^2 \| f \|^2, \ 0 \neq f \in H$$

где в отличие от $\bar{X}$ оператор $\bar{X}^+\bar{X}$ обладает свойством симметричности. Переписывая неравенство (3.2) в операторной форме и учитывая (2.11), получим

$$(3.3) \qquad \bar{\lambda}'\bar{Q}\bar{\lambda}' \leqslant k_1^2 I < I,$$

Возвращаясь к исходным величинам, отсюда найдем

$$(3.4) \qquad -\lambda' Q \lambda' \leqslant k_1^2 \lambda_c, \quad 0 \leqslant k_1 < 1$$

Неравенство (3.4) представляет собой достаточное условие сходимости первого ряда (2.14), а следовательно, и ряда a из (1.15). При помощи аналогичных рассуждений достаточное условие сходимости второго ряда (2.14) и b из (1.15) запишем в форме операторного неравенства

$$(3.5) \qquad -\mu' P \mu' \leqslant k_2^2 \mu_c, \quad 0 \leqslant k_2 < 1$$

Опираясь на свойство оператора $\bar{Q}$ вида $\bar{Q} \leqslant I$, из (3.3) будем иметь

$$(3.6) \qquad \bar{\lambda}'\bar{Q}\bar{\lambda}' \leqslant \bar{\lambda}'^2 \leqslant k_1^2 I$$

Видно, что условие (3.6) приводит к достаточному условию сходимости первых рядов (2.14) и (1.15) в форме

$$(3.7) \qquad (1 - k_1)\lambda_c \leqslant \lambda \leqslant (1 + k_1)\lambda_c, \quad 0 \leqslant k_1 < 1$$

Подобным же образом достаточное условие сходимости вторых рядов (2.14) и (1.15) запишем в виде

$$(3.8) \qquad (1 - k_2)\mu_c \leqslant \mu \leqslant (1 + k_2)\mu_c, \quad 0 \leqslant k_2 < 1$$

Можно показать, что неравенства (3.7) эквивалентны соответствующим неравенствам для потенциальных энергий.

Для простоты рассмотрим случай однородных граничных условий и отсутствия внешних сил $\mathbf{f}$. Тогда потенциальные энергии $U(\varepsilon) = {}^1/_2(\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ и $U_c(\varepsilon_c) = {}^1/_2(\varepsilon_c, \lambda_c\varepsilon_c)$ исследуемой и вспомогательной сред удовлетворяют в силу теоремы о минимуме потенциальной энергии неравенствам

$$(3.9) \qquad U(\varepsilon) \leqslant U(\varepsilon_c), \quad U_c(\varepsilon_c) \leqslant U_c(\varepsilon)$$

Объединяя неравенства (3.9) и (3.7), запишем

$$(3.10) \qquad (1 - k_1)U_c(\varepsilon_c) \leqslant U(\varepsilon) \leqslant (1 + k_1)U_c(\varepsilon_c)$$

Подобным же образом неравенства (3.8) вместе с теоремой о минимуме дополнительной энергии также приводят к неравенствам вида (3.10).

Неравенства (3.7) или (3.10) можно интерпретировать в качестве ограничений, накладываемых на упругие свойства исследуемой среды при условии, что для вспомогательной среды они заданы. Поскольку обычно именно λ бывает заданным с самого начала, удобнее неравенства (3.7) и (3.8) переписать в форме ограничений, накладываемых на упругие свойства вспомогательной среды.

В соответствии с (3.7) и (3.8) параметры λ_c и μ_c должны удовлетворять неравенствам

$$(3.11) \qquad \frac{\lambda}{1 + k_1} \leqslant \lambda_c \leqslant \frac{\lambda}{1 - k_1}, \quad \frac{\mu}{1 + k_2} \leqslant \mu_c \leqslant \frac{\mu}{1 - k_2}$$

С учетом предполагаемой ограниченности λ и μ заключаем, что правые части неравенств (3.11) приводят к неравенствам $(\varepsilon_c, \lambda_c, \varepsilon_c) \leqslant C_1$ и $(\sigma_c, \mu_c\sigma_c) \leqslant C_2$, не накладывающим существенных ограничений на выбор параметров λ_c и μ_c. Напротив, левые части неравенств (3.11) определяют области значений параметров λ_c и μ_c, удовлетворяющих достаточным условиям сходимости.

Анализируя эти неравенства, приходим к заключению, что при некоторых условиях может существовать область значений параметра $\lambda_c = \mu_c^{-1}$, удовлетворяющих обоим левым неравенствам (3.11). В этом случае справедливы оба разложения и для полей $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\sigma}$ ((2.13), (2.14)). В общем случае можно лишь утверждать, что один из параметров λ_c или μ_c, связанных равенством $\lambda_c\mu_c = I$, всегда можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворялись достаточные условия сходимости одного из рядов (2.14). Нахождение одного из полей ε или σ в форме сходящегося ряда Неймана позволяет при помощи соотношений $\sigma = \lambda\varepsilon$ или $\varepsilon = \mu\sigma$ рассчитать другое из них.

Если же параметры λ_c и μ_c не связаны равенством $\lambda_c\mu_c = I$, тогда ограничения (3.11) не зависят одно от другого. В этом случае, выбирая λ_c и μ_c в соответствии с (3.11), будем иметь основания пользоваться обоими рядами (2.14).

4. Рассмотрим энергию упругих деформаций [2]

$$W = \int w dV \equiv V\{w\},\ 2w = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}$$

где фигурными скобками обозначено усреднение по объему V. Имея в виду определение скалярного произведения (2.1), отсюда запишем

$$2\{w\} = (\varepsilon, \sigma) = (\bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}) \tag{4.1}$$

Выразим энергию W через поле ε_c. С этой целью, воспользовавшись равенством $(\varepsilon', \sigma) = (\varepsilon', \sigma_c)$, перепишем (4.1) в виде

$$(\varepsilon, \sigma) = (\varepsilon_c, \sigma) + (\varepsilon', \sigma_c) \tag{4.2}$$

Принимая во внимание равенства $\sigma = \lambda\varepsilon = \lambda'\varepsilon + \lambda_c\varepsilon = \lambda'\varepsilon + \lambda_c\varepsilon' + \sigma_c$, из (4.1) и (4.2) получим

$$2\{w\} = (\varepsilon_c, \sigma_c) + (\varepsilon_c, \lambda'\varepsilon) + 2(\varepsilon', \sigma_c) \tag{4.3}$$

Первый член в правой части (4.3) представляет собой энергию упругих деформаций $2W_c/V$ в среде сравнения, в то время как последний определяется внешними воздействиями (поверхностными и объемными). Чтобы избавиться от него, введем потенциальную энергию [2]

$$U = W - \int \mathbf{ut}dS_2 - \int \mathbf{uf}dV \tag{4.4}$$

Вычитая из (4.4) потенциальную энергию U_c

$$U' \equiv U - U_c = W' - \int \mathbf{u}'\mathbf{t}dS_2 - \int \mathbf{u}'\mathbf{f}dV,\ x' \equiv x - x_c$$

и переходя здесь от поверхностного интеграла к объемному, получим

$$U' = W' - V(\varepsilon', \sigma) = W' - V(\varepsilon', \sigma_c)$$

Отсюда с учетом (4.3) находим

$$U'/V \equiv u' = {}^1/_2(\varepsilon_c, \lambda'\varepsilon) = {}^1/_2(\bar{\varepsilon}_c, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}) \tag{4.5}$$

Далее воспользуемся решением (2.13) для поля $\bar{\varepsilon}$ в форме $\bar{\varepsilon} = (I - \bar{X})^{-1}\bar{\varepsilon}_c$, справедливой и тогда, когда соответствующий ряд Неймана расходится. Подставляя его в (4.5), получим

$$2u' = (2\varepsilon_c', [\bar{Q} + \bar{q}]^{-1}\bar{\varepsilon}_0),\ \bar{q}\bar{\lambda}' = I \tag{4.6}$$

Наряду с (4.6) возможно представление энергии u' через поле $\bar{\sigma}_c$. Вместо (4.3) аналогичным путем найдем

$$2\{w\} = (\varepsilon_c, \sigma_c) + (\sigma_c, \mu'\sigma) + 2(\varepsilon_c, \sigma') \tag{4.7}$$

Преобразуя потенциальную энергию (4.4) к виду

$$U = \int \mathbf{ut}dS_1 - W$$

и используя формулу (4.7), придем к равенству

$$u' = -{}^1/_2(\sigma_c, \mu'\sigma) = -{}^1/_2(\bar{\sigma}_c, \bar{\mu}'\bar{\sigma}) \tag{4.8}$$

Подставляя в (4.8) решение (2.13) для поля $\bar{\sigma}$ в форме $\bar{\sigma} = (I - \bar{Y})^{-1}\bar{\sigma}_c$, справедливой в общем случае, вместо (4.6) будем иметь

$$(4.9) \qquad 2u' = -(\bar{\sigma}_c, [\bar{p} + \bar{P}]^{-1}\bar{\sigma}_c), \quad \bar{p}\bar{\mu}' = I$$

Формулы (4.6) и (4.9) дают возможность рассчитывать энергию u' двумя эквивалентными путями. Сравнивая (4.6) и (4.9), замечаем, что

$$(4.10) \qquad -(\bar{p} + \bar{P}) = \bar{Q} + \bar{q}$$

Равенство (4.10), с другой стороны, вытекает из (2.10) и соотношения $\bar{p} + \bar{q} = -I$, которое может быть легко установлено.

5. Пусть выполняются условия сходимости рядов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда из (4.5) и (4.8) с учетом (2.13) и (2.14) соответственно получим

$$(5.1) \qquad 2u' = \sum_0^\infty l_k, \quad l_k \equiv (\varepsilon_c, \lambda'\varepsilon_k) = (\bar{\varepsilon}_c, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}_k), \quad \bar{\varepsilon}_k \equiv \bar{X}^k\bar{\varepsilon}_c$$

$$(5.2) \qquad 2u' = -\sum_0^\infty m_k, \quad m_k \equiv (\sigma_c, \mu'\sigma_k) = (\bar{\sigma}_c, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_k), \quad \bar{\sigma}_k \equiv \bar{Y}^k\sigma_c$$

$$(\varepsilon_k = \lambda_c^{-1/2}\bar{\varepsilon}_k, \quad \sigma_k = \mu_c^{-1/2}\bar{\sigma}_k)$$

Представление потенциальной энергии в форме сходящихся числовых рядов (5.1) и (5.2) позволяет получить приближенные решения для u', а также границы $u_\pm'$, внутри которых лежит значение u'.

Проведем сначала исследование знакоопределенности рядов (5.1) и (5.2). Симметричность используемых операторов, а также свойства (2.11) проектирующих операторов $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ дают возможность записать

$$(5.3) \qquad \bar{Q}\bar{X} = \bar{X}, \quad \bar{X}^+ = -\bar{\lambda}'\bar{Q}, \quad \bar{P}\bar{Y} = \bar{Y}, \quad \bar{Y}^+ = -\bar{\mu}'\bar{P}$$

При помощи равенств (5.3), определения (2.2) и (5.1) можно показать, что

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} &(\bar{\varepsilon}_p, \bar{\lambda}, \bar{\varepsilon}_q) = (\bar{\varepsilon}_{p-1}, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}_{q+1}) = \ldots = (\bar{\varepsilon}_c, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}_{p+q}) \\ &-(\bar{\varepsilon}_{p+1}, \bar{\varepsilon}_{q+1}) = (\bar{\varepsilon}_p, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}_{q+1}) = (\bar{\varepsilon}_c, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}_{p+q+1}); \quad p, q \geqslant 0 \end{aligned}$$

Равенства (5.3), определение (2.2) и (5.2) соответственно дают

$$(5.5) \qquad \begin{aligned} &(\bar{\sigma}_p, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_q) = (\bar{\sigma}_{p-1}, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_{q+1}) = \ldots = (\bar{\sigma}_c, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_{p+q}) \\ &-(\bar{\sigma}_{p+1}, \bar{\sigma}_{q+1}) = (\bar{\sigma}_p, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_{q+1}) = (\bar{\sigma}_c, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_{p+q+1}); \quad p, q \geqslant 0 \end{aligned}$$

Функционалы l_k и m_k, определенные согласно (5.1) (5.2), с помощью (5.4) и (5.5) могут быть также представлены в виде

$$(5.6) \qquad l_{2k} = (\bar{\varepsilon}_k, \bar{\lambda}'\bar{\varepsilon}_k), \quad l_{2k-1} = -(\bar{\varepsilon}_k, \bar{\varepsilon}_k), \quad m_{2k} = (\bar{\sigma}_k, \bar{\mu}'\bar{\sigma}_k); \quad m_{2k-1} = -(\bar{\sigma}_k, \bar{\sigma}_k)$$

Из (3.6) следует, что функционалы l_{2k-1} и m_{2k-1} отрицательны, в то время как знаки функционалов l_{2k} и m_{2k} определяются значением параметров λ_c и μ_c. Пусть λ_c и μ_c таковы, что $\lambda' \gtrless 0$ и $\mu' \lessgtr 0$. При этом в общем случае λ_c и μ_c могут и не быть связанными равенством $\lambda_c\mu_c = I$. Тогда из (5.6) имеем $l_{2k} \gtrless 0$ и $m_{2k} \lessgtr 0$, т. е. ряды (5.1) и (5.2) будут обладать противоположной знакоопределенностью.

Для получения границ для u' понадобятся вспомогательные неравенства, вывод которых основан на формулах (5.6) с учетом их знаков. Ввиду положительности скалярных произведений вида (f, f) справедливы неравенства

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} &l_{2k-1} + 2l_{2k} + l_{2k+1} < 0, \quad f \equiv \bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{k+1}, \bar{\varepsilon}_k \neq 0 \\ &m_{2k-1} + 2m_{2k} + m_{2k+1} < 0, \quad f \equiv \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_{k+1}, \sigma_k \neq 0 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, используя неравенства $(f, \bar{\lambda}'f) \gtrless 0$ и $(f, \bar{\mu}'f) \gtrless 0$, запишем

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} &l_{2k} + 2l_{2k+1} + l_{2k+2} \gtrless 0, \quad \lambda' \gtrless 0 \\ &m_{2k} + 2m_{2k+1} + m_{2k+2} \gtrless 0, \quad \mu' \gtrless 0 \end{aligned}$$

Суммируя неравенства (5.7) и (5.8) по k от n до ∞, получим

(5.9) $$2\sum_{2n-1}^{\infty} l_k < l_{2n-1} < 0, \quad 2\sum_{2n-1}^{\infty} m_k < m_{2n-1} < 0, \quad n \geqslant 1$$

(5.10) $$2\sum_{2n}^{\infty} l_k \geqslant l_{2n} \geqslant 0, \ \lambda' \geqslant 0; \quad 2\sum_{2n}^{\infty} m_k \geqslant m_{2n} \geqslant 0, \ \mu' \geqslant 0; \ n \geqslant 0$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda' > 0$ и $\mu' < 0$, когда ряд (5.1) знакопеременный, а (5.2) знакопостоянный. Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k + \sum_{k=n}^{\infty} x_k$$

и неравенства (5.9) и (5.10), из (5.1) и (5.2) соответственно найдем

(5.11) $$\frac{1}{2} l_{2n} < 2u' - \sum_{0}^{2n-1} l_k < -\frac{1}{2} l_{2n-1}, \quad -2u' < \sum_{0}^{n} m_k$$

Таким образом, использование первого разложения из (2.14) приводит к двусторонним границам, а второго — лишь к нижней границе для энергии u'. В нулевом, первом и втором приближениях из (5.11) будем иметь

(5.12) $$\begin{aligned} &{}^1/_2 l_0 < 2u' < l_0, \quad -2u' < m_0 \\ &l_0 + l_1 < 2u' < l_0 + {}^1/_2\, l_1, \quad -2u' < m_0 + m_1 \\ &l_0 + l_1 + {}^1/_2 l_2 < 2u' < l_0 + l_1 + l_2, \quad -2u' < m_0 + m_1 + m_2 \end{aligned}$$

Пусть теперь $\lambda' < 0$ и $\mu' > 0$. В этом случае ряд (5.1) будет знакопостоянным, а (5.2) — знакопеременным. Используя неравенства (5.9) и (5.10), из (5.1) и (5.2) получим

(5.13) $$2u' < \sum_{0}^{n} l_k, \quad \frac{1}{2} m_{2n} < -2u' - \sum_{0}^{2n-1} m_k < -\frac{1}{2} m_{2n-1}$$

Отсюда следует, что первое разложение из (2.14) приводит лишь к верхней границе, а второе — к двусторонним границам для энергии u'. В нулевом, первом и втором приближениях из (5.13) найдем

(5.14) $$\begin{aligned} &2u' < l_0, \quad {}^1/_2 m_0 < -2u' < m_0 \\ &2u' < l_0 + l_1, \quad m_0 + m_1 < -2u' < m_0 + {}^1/_2 m_1 \\ &2u' < l_0 + l_1 + l_2, \quad m_0 + m_1 + {}^1/_2 m_2 < -2u' < m_0 + m_1 + \\ &+ m_2 \end{aligned}$$

Из (5.11)—(5.14) видно, что в любом случае имеем двусторонние границы для энергии u'. При этом для их получения необходимо использовать первое разложение из (2.14), если $\lambda' > 0$, и второе, если $\mu' > 0$.

Если выбор параметров λ_c и μ_c не ограничен требованием знакоопределенности λ' и μ', то вместо (5.11) и (5.13) будем иметь границы

(5.15) $$-\sum_{0}^{2n-1} m_k + \frac{1}{2} m_{2n-1} < 2u' < \sum_{0}^{2n-1} l_k - \frac{1}{2} l_{2n-1}$$

построенные на основе неравенств (5.7), справедливых в общем случае.

6. Неравенства, аналогичные (3.10), могут быть установлены в задаче об оценке погрешности, обусловленной заменой решения задачи (1.1) решением u_c задачи, полученной из (1.1) заменой L на L_c [8]. В предположении положительной определен-

ности и «полусходности» операторов L и L_c оказываются справедливыми неравенства [7, 8]

(6.1) $$\alpha |\mathbf{u}|_c^2 \leqslant |\mathbf{u}|^2 \leqslant \beta |\mathbf{u}|_c^2, \ |\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{u}, L\mathbf{u}), \ |\mathbf{u}|_c^2 = (\mathbf{u}_c, L_c\mathbf{u}_c)$$

где поля $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_c$ удовлетворяют однородным граничным условиям. Величины α и β находятся из решения обобщенной задачи на собственные числа оператора L вида $L\mathbf{u} - \varkappa L_c\mathbf{u} = 0$ и равны соответственно $\alpha = \inf \varkappa'$, $\beta = \sup \varkappa''$, где $\varkappa'$ — минимальное, а $\varkappa''$ — максимальное из собственных чисел [7]. При этом никаких ограничений на α и β и, следовательно, L и L_c не накладывается.

В отличие от (6.1) неравенства (3.10) учитывают тот факт, что первый ряд (2.14), в котором оператор Q построен с помощью L_c, сходится. В силу этого α и β уже не могут быть произвольными, но должны удовлетворять определенным ограничениям. В частности, из (3.10) вытекают неравенства

(6.2) $$0 < 1 - k \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 + k < 2, \qquad k \equiv k_1$$

Следует также указать на возможность другого подхода к решению задачи (1.1), а именно применения метода итераций непосредственно к расчету поля смещений $\mathbf{u}$. При этом, однако, учет граничных условий в форме (1.2) существенно усложняет построение. В частном случае первой краевой задачи (задачи Дирихле) решение для поля $\mathbf{u}$ можно представить в виде

(6.3) $$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + ML'\mathbf{u}, \ L' = L - L_c$$

где M — оператор, ядро которого — тензор Грина G. Уравнение (6.3) по форме совпадает с уравнениями (1.13) и (2.9), как и они, являясь неоднородным интегральным уравнением второго рода. Решая его методом итераций, аналогично (1.15) и (2.14) запишем

(6.4) $$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} (ML')^k \mathbf{u}_c$$

Ряд (6.4) сходится при условии $\| ML' \| \leqslant k < 1$, которое может быть записано в виде

(6.5) $$\| ML' \| \leqslant \| M \| \| L' \| < k < 1$$

Неравенства, аналогичные (6.5), использовались [8] для нахождения критерия устойчивости приближенного решения уравнения типа (1.1). Условия сходимости (6.5) ряда (6.4) не удается, однако, преобразовать к виду (3.7), а тем более (3.8). Для получения же неравенств типа (6.5), но содержащих податливости μ и μ_c, необходимо перейти от уравнения равновесия (1.1) к уравнению несовместности [1, 2]. Приведенные соображения находятся в согласии с замечанием С. Г. Михлина [7] о переходе в уравнении (1.1) от постоянных коэффициентов λ к переменным. В нем указывалось, что подобный переход создает серьезные трудности при использовании таких методов, как метод интегральных уравнений или метод функций Грина, в особенности при отыскании элементарных частных решений.

В публикуемой работе предложен метод решения достаточно широкого класса линейных краевых задач, имеющих форму (1.1), (1.2). Его основой служат именно упомянутые выше методы: функций Грина и интегральных уравнений. Некоторые из возникающих при этом трудностей преодолеваются путем введения проектирующих операторов $\overline{P}$ и $\overline{Q}$. Использование вспомогательной среды делает возможным решение таких задач, которые не могут быть решены (или их решение весьма затруднено) прямыми методами. Это имеет место, в частности, в случае неоднородных и анизотропных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит. 1963, 247 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974, 832 с.
4. *Фокин А. Г.* Эффективные модули упругости неоднородных сред в случае потенциальных и бивихревых тензорных полей.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 143—149.
5. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979, 587 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
8. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.IV.1981