Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 539.3

О ЗАКОНЕ ГУКА

Рыхлевский Я.

Предлагается новый метод описания упругой анизотропии, основанный на понятии собственного упругого состояния. Раскрыта структура тензора жесткости. В частности, показано, что набор из 21 константы, непрерывно описывающий многообразие упругих тел, состоит из трех различных подсистем: 6 истинных модулей жесткости, 12 безразмерных дистрибуторов жесткости и 3 неинвариантных параметров, задающих ориентацию описываемого тела относительно лабораторной системы координат. Доказано, что для произвольного анизотропного тела закон Гука однозначно записывается в виде нескольких законов прямой пропорциональности соответствующих частей тензора напряжений и тензора деформаций. Построение этих частей иллюстрируется на примере трансверсально-изотропного тела.

1. Будем считать, что деформации отсчитываются от ненапряженного, естественного состояния и малы, влияние температуры и других полей несущественно, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ симметричен и является линейной обратимой функцией тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{1.1}$$

Упругое поведение целиком описывается материальным тензором жесткости $\mathbf{C}$ или тензором податливости S. Они взаимно обратны, т. е.

$$\mathbf{C}\circ\mathrm{S} = \mathrm{S}\circ\mathbf{C} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\alpha} \tag{1.2}$$

Закон (1.1) открыт в своей основе Гуком [1]. Вид тензора C для изотропного тела был выяснен в первой четверти прошлого века [2]

$$\mathbf{C} = \lambda 1 \otimes 1 + 2\,\mu\mathbf{I} \tag{1.3}$$

К началу нашего века был в основном выяснен вид $\mathbf{C}$ для всех кристаллических классов [3, 4]. С результатами работы по определению упругих констант конкретных материалов, выявлению качественных особенностей поведения анизотропных упругих тел, расчету эффективных констант сложных тел можно познакомиться по монографиям [5—12].

В то же время для многих новых материалов, в первую очередь композитных, характерна глубокая анизотропия упругих свойств, вплоть до полного отсутствия их симметрии. В последнем случае, соответствующем также триклинным кристаллам, теории групп «не за что зацепиться» и существующий подход не дает никакой информации о тензоре жесткости. Теория обрекает здесь экспериментатора на перспективу замера 21 компоненты C_{ijkl} в случайном базисе.

Нерешенным остается кардинальный вопрос об эффективном построении полной системы 18 инвариантов тензора жесткости. Иначе говоря, нет общего алгоритма идентификации двух тензоров жесткости по наборам их компонент, измеренных в двух разных лабораториях. Изящное предложение выбирать собственные базисы по сверткам C_{ijkk} или C_{ikjk} [13], существенно продвигает этот вопрос, но не пригодно, когда эти тензоры обладают осью симметрии или вообще изотропны.

Как ни важна симметрия, закономерности проявляются не только через нее. Покажем, что закон Гука таит в себе совсем другие возможности описания структуры произвольного линейно-упругого тела.

2. Назовем тензор $\mathbf{C}$ для выразительности (в смысле, который легко уточнить) упругим телом $\mathbf{C}$. Существо предлагаемого способа описания упругих свойств состоит в следующем. Возьмем произвольное упругое

тело $\mathbf{C}$ и рассмотрим такие исключительные его состояния, когда тензоры напряжений и деформаций не только соосны, но и строго пропорциональны

(2.1) $$\sigma = \lambda \varepsilon$$

Определение. Параметр λ с размерностью напряжения будем называть истинным модулем жесткости упругого тела $\mathbf{C}$, если существует симметричный тензор второго ранга ω, удовлетворяющий уравнению

(2.2) $$\mathbf{C}\cdot\omega = \lambda\omega$$

Тензор ω будем называть собственным упругим состоянием тела $\mathbf{C}$ соответствующим истинному модулю жесткости λ.

Из (1.2) следует, что при $\lambda \neq 0$ уравнение (2.2) эквивалентно уравнению

(2.3) $$\mathrm{S}\cdot\omega = \frac{1}{\lambda}\omega$$

Собственное упругое состояние ω можно, по желанию, интерпретировать либо как специальное деформированное, либо как специальное напряженное состояние.

Естественно ожидать как с математической, так и с физической точки зрения, что набор всех истинных модулей жесткости и соответствующих им собственных упругих состояний полностью и глубоко раскрывает поведение упругого тела. Это и покажем. Потребуется лишь перевод на тензорный язык нескольких фактов теории линейных операторов.

3. Обозначим через $Э$ исходное трехмерное векторное пространство, а через $O = O(3)$ — группу его ортогональных преобразований. Пространство симметричных тензоров второго ранга над $Э$ обозначим Σ, а его тензорный квардат — T

(3.1) $$\Sigma \equiv \operatorname{sym} Э \otimes Э, \quad T \equiv \Sigma \otimes \Sigma$$

Итак, по определению, для любого $\alpha \in \Sigma$ имеем $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, а для любого $\mathbf{L} \in T$ будет $L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk}$. Ясно, что $\mathbf{C} \in T$.

Введем в Σ обычное (энергетическое) скалярное произведение

(3.2) $$(\alpha, \beta) \to \alpha\cdot\beta \equiv \alpha_{ij}\beta_{ij}$$

Оно согласовано с евклидовой тензорной структурой в Σ, т. е. инвариантно относительно группы O. Множество Σ с операциями суммирования тензоров, умножения тензора на число и скалярного умножения (3.2) является 6-мерным евклидовым пространством.

Далее будут использоваться ортонормированные базисы в этом пространстве, т. е. шестерки тензоров

(3.3) $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6, \quad \omega_K\cdot\omega_L = \delta_{KL} \equiv \begin{cases} 1 & K = L \\ 0 & K \neq L \end{cases}$$

Здесь и дальше индексы из латинских заглавных букв K, L, ... пробегают значения *1*, *2*, . . ., *6*; эйнштейновское правило суммирования к ним не относится. Разложение произвольного тензора α по элементам базиса (3.3) будем записывать в виде

(3.4) $$\alpha = \alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_6\omega_6, \quad \alpha_K = \alpha\cdot\omega_K$$

Любой тензор $\mathbf{L} \in T$ можно идентифицировать с линейным оператором

(3.5) $$\alpha \to \mathbf{L}\cdot\alpha$$

преобразующим в себя пространство Σ. Из (3.4) следует

$$\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\alpha_I\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_I+\ldots+\alpha_6\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_6=(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_I\otimes\boldsymbol{\omega}_I+\ldots+\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_6\otimes\boldsymbol{\omega}_6)\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{3.6}$$

для любого $\alpha\in\Sigma$.

Отсюда (только потому, что оба тензора четвертого ранга в (3.6) принадлежат тензорному подпространству T) следует фундаментальное тензорное тождество: для любого тензора $\mathbf{L}\in T$ и любого ортонормированного базиса $\boldsymbol{\omega}_K$

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_I\otimes\boldsymbol{\omega}_I+\ldots+\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_6\otimes\boldsymbol{\omega}_6 \tag{3.7}$$

Оно явно выражает линейный оператор (3.5) через его значения на базисе (3.3). Это тождество равносильно следующему:

$$\mathbf{I}=\boldsymbol{\omega}_I\otimes\boldsymbol{\omega}_I+\ldots+\boldsymbol{\omega}_6\otimes\boldsymbol{\omega}_6 \tag{3.8}$$

Действительно, из (3.7) следует (3.8), поскольку $\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ для любого $\boldsymbol{\alpha}\in\Sigma$. Обратно, из (3.8) следует (3.7), поскольку $\mathbf{L}\circ\mathbf{I}=\mathbf{I}\circ\mathbf{L}=\mathbf{L}$ для любого $\mathbf{L}\in T$.

По определению тензорного произведения линейных пространств, набор 36 тензоров $\boldsymbol{\omega}_K\otimes\boldsymbol{\omega}_L$ составляет базис в $T\equiv\Sigma\otimes\Sigma$. Поэтому любой тензор $\mathbf{L}\in\mathrm{T}$ однозначно записывается в виде

$$\mathbf{L}=\sum_{K,L=1}^{6}L_{KL}\boldsymbol{\omega}_K\otimes\boldsymbol{\omega}_L,\quad L_{KL}\equiv\boldsymbol{\omega}_K\cdot\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}_L \tag{3.9}$$

Решающую роль в дальнейшем играют ортогональные проекторы. Рассмотрим подпространство $\Pi\subset\Sigma$ и его ортогональное дополнение $\Pi^\perp$. Формула

$$\Sigma=\Pi\oplus\Pi^\perp \tag{3.10}$$

означает, как обычно, что для любого тензора $\boldsymbol{\alpha}\in\Sigma$ существуют в точности два тензора $\boldsymbol{\alpha}_\Pi$ и $\boldsymbol{\alpha}_{\Pi^\perp}$, такие, что

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_\Pi+\boldsymbol{\alpha}_\Pi^\perp,\quad \boldsymbol{\alpha}_\Pi\cdot\boldsymbol{\alpha}_\Pi^\perp=0,\quad \boldsymbol{\alpha}_\Pi\in\Pi \tag{3.11}$$

Тензор $\boldsymbol{\alpha}_\Pi$ — ортогональная проекция $\boldsymbol{\alpha}$ на Π. Тензор $\mathbf{P}\in T$, однозначно определенный условием

$$\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_\Pi,\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in\Sigma \tag{3.12}$$

называем ортогональным проектором на подпространство Π. Если часть $M\equiv(\boldsymbol{\omega}_{U+1},\ldots,\boldsymbol{\omega}_{U+V})$ базиса $\omega_I,\ldots,\boldsymbol{\omega}_6$ расположена в Π, то $\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\omega}_S=\boldsymbol{\omega}_S$ для $\boldsymbol{\omega}_S\in M$ и $\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\omega}_S=0$ для $\boldsymbol{\omega}_S\notin M$ и, согласно (3.9), получаем

$$\mathbf{P}=\boldsymbol{\omega}_{U+1}\otimes\boldsymbol{\omega}_{U+1}+\ldots+\boldsymbol{\omega}_{U+V}\otimes\boldsymbol{\omega}_{U+V} \tag{3.13}$$

Отсюда $V=\dim\Pi=P_{ijij}$.

Два ортогональных проектора, $\mathbf{P}_1$ на Π_1 и $\mathbf{P}_2$ на Π_2, называем взаимно ортогональными, если подпространства Π_1, Π_2 взаимно ортогональны. Это эквивалентно тензорному равенству

$$\mathbf{P}_1\circ\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\circ\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

Система попарно взаимно ортогональных проекторов $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_\rho$, называется ортогональным разложением единицы, если

$$\mathbf{I}=\mathbf{P}_1+\ldots+\mathbf{P}_\rho \tag{3.14}$$

Любое разложение единицы можно получить, выбрав соответствующий базис $\boldsymbol{\omega}_K$ и соответствующим образом группируя слагаемые в (3.8). Разложению единицы (3.14) взаимно однозначно соответствует разложение пространства Σ в прямую сумму подпространств $\Pi_\alpha \equiv \operatorname{Im} \mathbf{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \ldots, \rho$.

4. Будем рассматривать только гиперупругие тела. Иначе говоря, предполагаем, что тело $\mathbf{C}$ обладает упругим потенциалом

$$2\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi \tag{4.1}$$

Это эквивалентно условию симметрии относительно скалярного произведения (3.2)

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Sigma \tag{4.2}$$

Итак, имеем дело с линейным симметричным оператором $\boldsymbol{\alpha} \to \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, действующим в конечномерном пространстве со скалярным произведением. (Строго говоря, нужно отнести напряжения к фиксированному эталону; читатель может предполагать, что так это и сделано.) Эта ситуация изучена с исчерпывающей полнотой, и, остается лишь перевести имеющуюся информацию на язык механики.

Спектральная теорема принимает вид следующей основной структурной теоремы.

Теорема 1. Для любого упругого тела $\mathbf{C}$ существует в точности одно ортогональное разложение пространства симметричных тензоров второго ранга

$$\Sigma = \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_\rho, \quad \Pi_\alpha \perp \Pi_\beta \text{ для } \alpha \neq \beta, \ \rho \leqslant 6 \tag{4.3}$$

и в точности один набор истинных модулей жесткости

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho, \quad \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \text{ для } \alpha \neq \beta \tag{4.4}$$

такие, что

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho \tag{4.5}$$

где $\mathbf{P}_\alpha$ является ортогональным проектором на Π_α, $\alpha = 1, \ldots, \rho$.

Доказательство можно восстановить, соответствующим образом меняя терминологию, по [14—16] и др.

Механический смысл слагаемых Π_α ясен: подпространство Π_α состоит из всех собственных упругих состояний, соответствующих модулю жесткости λ_α. В самом деле, для любого $\boldsymbol{\omega} \in \Pi_\alpha$ имеем

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho) \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega} \tag{4.6}$$

Итак, указана формула, явно выражающая тензор жесткости через набор его истинных модулей жесткости и собственных упругих состояний.

Приведем другие эквивалентные формулировки основной структурной теоремы, которые, быть может, покажутся более привычными.

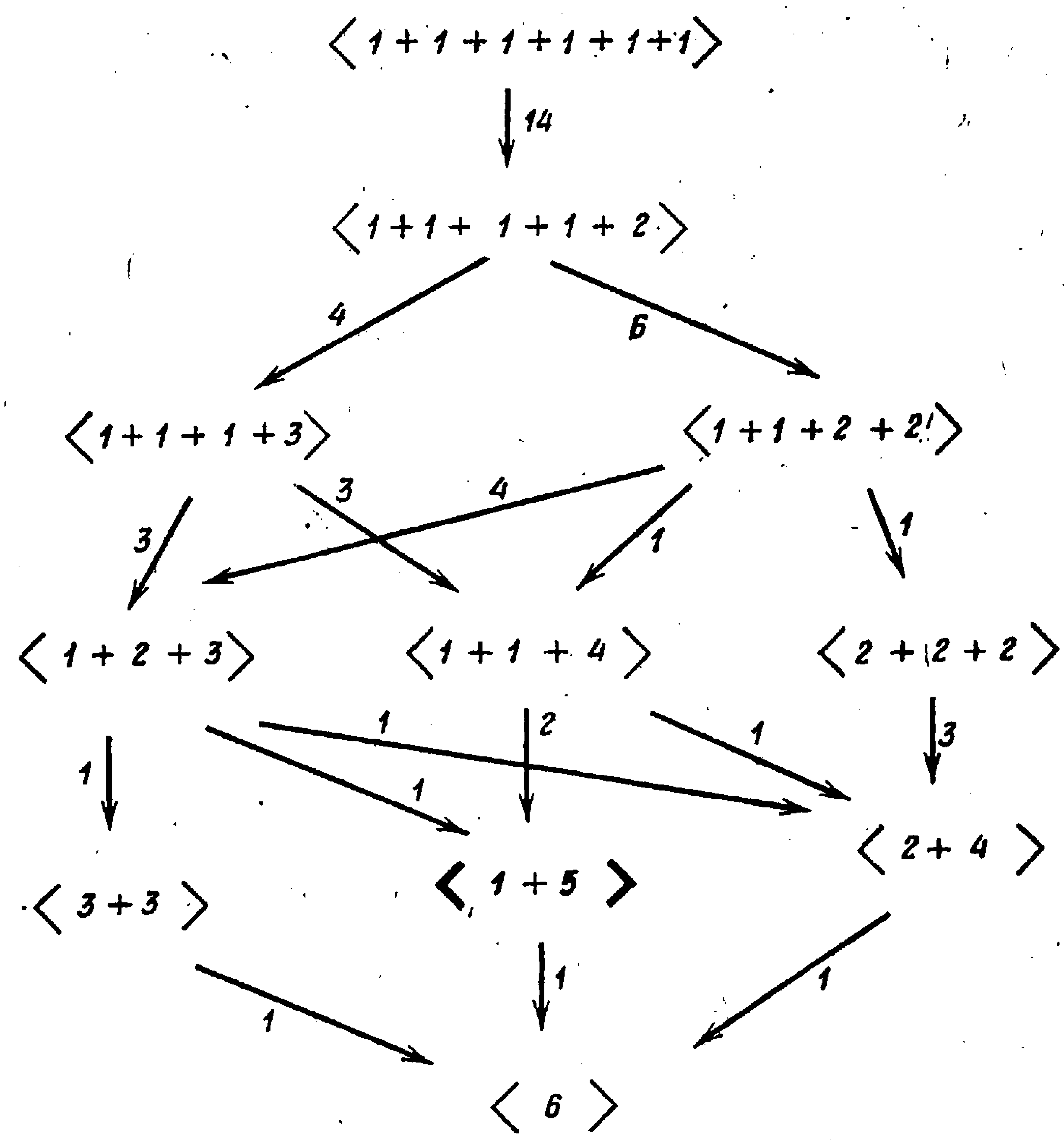
1°. Для любого упругого тела $\mathbf{C}$ существует по крайней мере один ортонормированный базис $\boldsymbol{\omega}_K$ в Σ, состоящий из собственных упругих состояний этого тела

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_K = \lambda_K \boldsymbol{\omega}_K, \quad K = 1, \ldots, 6 \tag{4.7}$$

2°. Для любого упругого тела $\mathbf{C}$ существует по крайней мере один ортонормированный базис $\boldsymbol{\omega}_K$ в Σ и шесть параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$, таких, что [1]

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \boldsymbol{\omega}_1 \otimes \boldsymbol{\omega}_1 + \ldots + \lambda_6 \boldsymbol{\omega}_6 \otimes \boldsymbol{\omega}_6 \tag{4.8}$$

[1] Представленная идея излагалась в курсе лекций, которые с конца 60-х гг. автор читал в ряде научных центров Польши и СССР. Частный случай формулы (4.8) был эффективно использован в [17]. (См. также: *Рыхлевский Я.* Математическая структура упругих тел. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, М., 1983, № 217. 114 с.)



Фиг. 1

3°. Для любого упругого тела **C** существует по крайней мере один ортонормированный базис $\boldsymbol{\omega}_K$ в Σ, такой, что матрица

$$(4.9)\qquad C_{KL}\equiv \boldsymbol{\omega}_K\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}_L$$

диагональна.

Полезно проследить эквивалентность представлений (4.5), (4.8). Формула (4.8) следует из (4.5) ввиду (3.13). Обратно, если в (4.8) учесть все совпадения λ_K, то на основе (3.13) приходим к (4.5) при однозначности всех членов суммы. Для $\rho=6$ формулы (4.5), (4.8) просто тождественны, с одномерными проекторами

$$(4.10)\qquad \mathbf{P}_1=\boldsymbol{\omega}_1\otimes\boldsymbol{\omega}_1,\ \ldots,\ \mathbf{P}_6=\boldsymbol{\omega}_6\otimes\boldsymbol{\omega}_6$$

Формулу (4.5) или (4.8) назовем основной структурной формулой упругого тела. Любой ортонормированный набор собственных состояний $\boldsymbol{\omega}_K$ тензора **C** будем называть тензорным материальным репером рассматриваемого тела.

Разложению (4.3) соответствует разбиение числа шесть на положительные целые слагаемые

$$(4.11)\qquad q_\alpha\equiv\dim\Pi_\alpha=P_{(\alpha)ijij}$$

(или, если угодно, схема Юнга [18]). Будем записывать это разбиение в виде

$$(4.12)\qquad \langle q_1+\ldots+q_\rho\rangle,\qquad q_1\leqslant\ldots\leqslant q_\rho$$

и называть первым структурным индексом рассматриваемого тела **C**.

Назовем упругим видом совокупность всех упругих тел с одинаковым первым структурным индексом. Будем говорить, что упругий вид $\langle k_1+\ldots+k_t\rangle$ подчинен упругому виду $\langle m_1+\ldots+m_u\rangle$, если $t<u$, причем k_i или равны некоторым из m_i, или являются их суммами. Схема подчинения всех 11 возможных упругих видов показана на фиг. 1. Один вид

подчинен другому, если из последнего можно спуститься к первому по указанным стрелкам. Каждый этаж схемы составляют все упругие тела с одинаковым числом попарно различных истинных модулей жесткости. Переход с k-го на $(k-1)$-й этаж осуществляется отождествлением двух модулей. На стрелках указано число возможностей отождествления.

Подчеркнем, что упругие тела одного упругого вида могут резко различаться по характеру собственных упругих состояний и по симметрии, поскольку первый структурный индекс учитывает всего лишь размерность пространств собственных состояний.

5. Обращение тензора жесткости, заданного в виде (4.5) или (4.8), получается немедленно. Согласно (1.2), собственные элементы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ одинаковы, а собственные значения обратны. Структурная формула для тензора податливости, следовательно, имеет вид

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1+\ldots+\frac{1}{\lambda_\rho}\mathbf{P}_\rho=\frac{1}{\lambda_I}\boldsymbol{\omega}_I\otimes\boldsymbol{\omega}_I+\ldots+\frac{1}{\lambda_6}\boldsymbol{\omega}_6\otimes\boldsymbol{\omega}_6 \tag{5.1}$$

Величины λ_α^{-1} — истинные модули податливости.

6. Если тензор жесткости $\mathbf{C}$ задан компонентами C_{ijkl} в каком-то базисе, то нахождение модулей жесткости λ_α и собственных упругих состояний проходит следующим образом. Возьмем в Σ произвольный ортонормированный базис $\boldsymbol{\tau}_P$, $\boldsymbol{\tau}_P\cdot\boldsymbol{\tau}_Q=\delta_{PQ}$. Введем матрицу

$$C_{PQ}\equiv\boldsymbol{\tau}_P\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\tau}_Q=\tau_{(P)ij}C_{ijkl}\tau_{(Q)kl} \tag{6.1}$$

Модули жесткости будут, согласно (2.2), корнями уравнения шестой степени

$$\det\left(C_{PQ}-\lambda\delta_{PQ}\right)=0 \tag{6.2}$$

Можно показать, что коэффициенты этого уравнения не зависят от выбора базиса $\boldsymbol{\tau}_K$, т. е. являются инвариантами тензора $\mathbf{C}$[2].

Кратность корня λ_α равна размерности q_α пространства Π_α.

Проекторы структурной формулы (4.6) также находятся стандартным путем [14]

$$\mathbf{P}_\alpha=\frac{1}{\Delta}\left[(\mathbf{C}-\lambda_1\mathbf{I})\circ\ldots\circ(\mathbf{C}-\lambda_{\alpha-1}\mathbf{I})\circ(\mathbf{C}-\lambda_{\alpha+1}\mathbf{I})\circ\ldots\circ(\mathbf{C}-\lambda_\rho\mathbf{I})\right] \tag{6.3}$$

$$\Delta\equiv(\lambda_\alpha-\lambda_1)\ldots(\lambda_\alpha-\lambda_{\alpha-1})(\lambda_\alpha-\lambda_{\alpha+1})\ldots(\lambda_\alpha-\lambda_\rho) \tag{6.4}$$

$$1\leqslant\alpha\leqslant\rho$$

Отметим формулы

$$\lambda_\alpha=\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}_\alpha=C_{ijkl}P_{(\alpha)ijkl} \tag{6.5}$$

Впрочем, пользоваться формулами (6.2) и (6.3) придется, по-видимому, не так уж часто. В принципе можно сразу определять упругое тело набором модулей жесткости и собственных упругих состояний, т. е. формулой (4.5) или (4.8).

7. Разложим тензоры напряжений и деформаций по пространствам собственных упругих состояний рассматриваемого тела

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_1+\ldots+\boldsymbol{\sigma}_\rho,\quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha\equiv\mathbf{P}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma}\in\Pi_\alpha\\&\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\ldots+\boldsymbol{\varepsilon}_\rho,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_\rho\equiv\mathbf{P}_\alpha\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\in\Pi_\alpha\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha\cdot\boldsymbol{\sigma}_\beta=0,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\beta=0,\quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\beta=0 \text{ для } \alpha\neq\beta \tag{7.2}$$

---

[2] Собственные числа матрицы C_{PQ}, при некотором выборе $\boldsymbol{\tau}_K$, исследовались в работе: *Александров К. С.* Упругие свойства анизотропных сред: Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: Ин-т кристаллографии АН СССР, 1967. 37 с.

Основная структурная теорема может быть высказана в следующей форме: для любого упругого тела **C** закон Гука можно единственным образом разложить в систему $\rho \leqslant 6$ независимых, взаимно ортогональных законов прямой пропорциональности

$$\sigma_1 = \lambda_1 \varepsilon_1, \ldots, \sigma_\rho = \lambda_\rho \varepsilon_\rho \tag{7.3}$$

В самом деле, подставляя в (1.1) разложения (7.1) и структурную формулу (4.5), получаем (7.3). Обратно суммируя (7.3), получим (4.5).

Уравнение (7.3) с номером α равносильно, разумеется, q_α скалярным уравнениям. Для $\rho = 6$ все $q_\alpha = 1$ (корни (6.2) — простые) и закон Гука можно записать в виде шести скалярных уравнений

$$\sigma_I = \lambda_I \varepsilon_I, \ldots, \sigma_6 = \lambda_6 \varepsilon_6 \tag{7.4}$$
$$\sigma_K \equiv \sigma \cdot \omega_K, \; \varepsilon_K = \varepsilon \cdot \omega_K$$

Закон Гука в виде (7.3), а в еще большей степени в виде (7.4) как бы возвращен к первоначальной формулировке самого автора, данной им в знаменитой анаграмме ceiiinosssttuv (ut tensio sic vis) [1].

Введем интенсивности

$$s_\alpha \equiv |\sigma_\alpha| = (\sigma \cdot \mathbf{P}_\alpha \cdot \sigma)^{1/2}, \quad e_\alpha \equiv |\varepsilon_\alpha| \tag{7.5}$$

так, что

$$|\sigma|^2 = s_1^2 + \ldots + s_\rho^2, \quad |\varepsilon|^2 = e_1^2 + \ldots + e_\rho^2 \tag{7.6}$$

Из (7.3) следуют пропорциональности интенсивностей

$$s_1 = \lambda_1 e_1, \ldots, s_\rho = \lambda_\rho e_\rho \tag{7.7}$$

Разложение (7.3) обобщает приводимое в учебниках представление закона Гука для изотропного тела в виде двух тензорных уравнений: закона пропорциональности шаровых и закона пропорциональности девиаторных частей тензоров σ, ε (см. ниже §15).

8. Обратимся к упругой энергии. Подставляя в (4.1) разложения (7.1), получим

$$2\Phi = s_1 e_1 + \ldots + s_\rho e_\rho$$

Видим, что если s_α трактовать как обобщенную термодинамическую силу, то e_α будет соответствующей ей обобщенной термодинамической координатой. Подставляя сюда (7.3), получим

$$2\Phi = \lambda_1 e_1^2 + \ldots + \lambda_\rho e_\rho^2 = \frac{1}{\lambda_1} s_1^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_\rho} s_\rho^2$$

Отсюда следует

Теорема 2. Упругая энергия тела **C** положительна для любого состояния деформаций $\varepsilon \neq 0$ тогда и только тогда, когда его истинные модули жесткости положительны, $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_\rho > 0$.

Отметим простой вид этих условий.

Если использовать какой-то материальный тензорный репер ω_K, то

$$2\Phi = \lambda_I \varepsilon_I^2 + \ldots + \lambda_6 \varepsilon_6^2 = \frac{1}{\lambda_I} \sigma_I^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_6} \sigma_6^2$$

Это представление упругой энергии допускает следующую геометрическую трактовку: изоэнергетическая поверхность $2\Phi(\sigma) = 1$ является 6-мерным эллипсоидом в Σ, причем оси эллипсоида направлены по собственным упругим состояниям ω_K, а длины полуосей равны корням из истинных модулей жесткости $\sqrt{\lambda_K}$.

9. Рассмотрим вопрос об определении системы независимых скалярных параметров, непрерывно описывающей многообразие упругих тел.

Согласно основной структурной формуле (4.8), любой набор

(9.1) $(\lambda_I, \ldots, \lambda_{6};\ \boldsymbol{\omega}_I, \ldots, \boldsymbol{\omega}_6)$

состоящий из положительных λ_K и ортонормированного базиса $\boldsymbol{\omega}_K$, определяет некое теоретически возможное упругое тело, для которого λ_K будут истинными модулями жесткости, а $\boldsymbol{\omega}_K$ — материальным тензорным базисом. (Опыт показывает, что упругие константы удовлетворяют дополнительным естественным феноменологическим ограничениям, не вытекающим из термодинамики, типа ограничений на коэффициент Пуассона и т. п.; оставляем здесь этот интересный вопрос в стороне.)

Вопрос сводится к определению набора свободных параметров, непрерывно описывающего многообразие ортонормированных базисов в Σ.

В качестве системы 36 параметров, непрерывно описывающих в общем случае шесть симметричных тензоров ω_K относительно лабораторной системы координат, возьмем, например, следующий набор:

(9.2) $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_K,\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_K^2,\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_K^3,\ \ \theta_K,\ \varphi_K,\ \psi_K$

Через θ_K, φ_K, ψ_K обозначены эйлеровы углы главных осей тензора $\boldsymbol{\omega}_K$ относительно лабораторной системы координат.

Шесть условий нормировки $\boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_K \equiv \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_K^2 = 1$ исключают $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_K^2$. На остальные 30 параметров наложено 15 условий ортогональности: $\boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = 0$ для $K \neq L$. В систему 15 независимых параметров можно включить три угла θ_L, φ_L, ψ_L для некоторого L. Остальные 12 независимых параметров $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12}$ будут составлять систему независимых инвариантов набора $\boldsymbol{\omega}_I, \ldots, \boldsymbol{\omega}_6$.

Получен следующий результат:

многообразие упругих тел, обладающих упругим потенциалом, непрерывно описывается, в общем случае, системой из 21 параметра, состоящей из следующих, резко различных между собой подсистем:

6 инвариантов тензора жесткости

(9.3) $\lambda_I, \ldots, \lambda_6$

имеющих размерность напряжений, и положительных. Они определяют степень общей жесткости тела и названы истинными модулями жесткости: им соответствуют истинные модули податливости

(9.4) $\lambda_I^{-1}, \ldots, \lambda_6^{-1}$

12 безразмерных инвариантов тензора жесткости

(9.5) $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12}$

составляющих функционально полную и неприводимую систему инвариантов тензорного материального репера $\boldsymbol{\omega}_K$. Они одинаковы для тензора жесткости и тензора податливости. Будем называть эти константы дистрибуторами жесткости;

3 неинвариантных параметра, например углы Эйлера θ, φ, ψ, фиксирующие рассматриваемое упругое тело относительно лабораторной системы координат.

Систему 18 инвариантов тензора жесткости

$$(\lambda_I, \ldots, \lambda_6, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12})$$

можно называть системой материальных упругих констант. (Заметим, что не верно, в общем случае, называть упругими константами компоненты C_{ijkl} в случайном базисе.)

Подбирая систему независимых инвариантов $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{12}$, следует учитывать, что между инвариантами (9.2) имеются связи, например связь

$$(\operatorname{tr} \omega_I)^2 + \ldots + (\operatorname{tr} \omega_6)^2 = 3 \tag{9.6}$$

следующая сразу из (3.8).

Так обстоит дело в «общем» случае, т. е. в окрестности должным образом подобранного $\mathbf{C} \in T$. Для частного семейства упругих тел число попарно различных модулей жесткости равно ρ, дистрибуторов жесткости — k, ориентирующих параметров — f. Символ

$$[\rho + k + f], \quad \rho \leqslant 6, \; k \leqslant 12, \; f \leqslant 3 \tag{9.7}$$

назовем вторым структурным индексом этого семейства.

10. Выразим через набор (9.1) некоторые характерные упругие параметры.

Из (4.8) получаем сразу следующие изящные формулы:

$$\operatorname{Tr} \mathbf{C} \equiv C_{ijij} = \lambda_I + \ldots + \lambda_6 = q_1\lambda_1 + \ldots + q_\rho\lambda_\rho \tag{10.1}$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} \equiv C_{ijkl}C_{ijkl} = \lambda_I^2 + \ldots + \lambda_6^2 = q_1\lambda_1^2 + \ldots + q_\rho\lambda_\rho^2 \tag{10.2}$$

Итак, инвариант $\operatorname{Tr} \mathbf{C}/6$ имеет смысл среднего модуля жесткости, а инвариант $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})^{1/2}/\sqrt{6}$ — среднего квадратичного модуля жесткости.

Модуль всестороннего сжатия K определяется выражением

$$\frac{1}{K} = \frac{(\operatorname{tr} \omega_I)^2}{\lambda_I} + \ldots + \frac{(\operatorname{tr} \omega_6)^2}{\lambda_6} \tag{10.3}$$

Модуль Юнга в направлении $\mathbf{n}$, $E(\mathbf{n})$ определяется выражением

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = \frac{(\mathbf{n}\omega_I\mathbf{n})^2}{\lambda_I} + \ldots + \frac{(\mathbf{n}\omega_6\mathbf{n})^2}{\lambda_6} \tag{10.4}$$

Коэффициент Пуассона $\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ в направлении $\mathbf{m}$ при растяжении — сжатии в направлении $\mathbf{n}$ равен

$$-\frac{\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{E(\mathbf{n})} = \frac{(\mathbf{n}\omega_I\mathbf{n})(\mathbf{m}\omega_I\mathbf{m})}{\lambda_I} + \ldots + \frac{(\mathbf{n}\omega_6\mathbf{n})(\mathbf{m}\omega_6\mathbf{m})}{\lambda_6} \tag{10.5}$$

Модуль сдвига $G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$, $\mathbf{nm} = 0$ при простом сдвиге в плоскости содержащей $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, определяется выражением

$$\frac{1}{4G(\mathbf{n}, \mathbf{m})} = \frac{(\mathbf{n}\omega_I\mathbf{m})^2}{\lambda_I} + \ldots + \frac{(\mathbf{n}\omega_6\mathbf{m})^2}{\lambda_6} \tag{10.6}$$

11. Если тело, скажем композит, устроено так, что один из модулей λ_ν значительно больше других, то можно использовать идеализацию жесткой связи

$$\lambda_\nu^{-1} = 0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \rho \tag{11.1}$$

В этом случае $\varepsilon_\nu \equiv \mathbf{P}_\nu\cdot\varepsilon = 0$ и правая часть ν-го уравнения закона Гука (7.3) представляет неопределенность типа $\infty\cdot 0$. Поэтому часть σ_ν тензора напряжений имеет характер реакции и законом Гука не определяется. Тензоры жесткости и податливости следует брать в виде

$$\mathbf{C} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_{\nu-1}\mathbf{P}_{\nu-1} + \lambda_{\nu+1}\mathbf{P}_{\nu+1} + \ldots + \lambda_\rho\mathbf{P}_\rho \tag{11.2}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1 + \ldots + \frac{1}{\lambda_{\nu-1}}\mathbf{P}_{\nu-1} + \frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\mathbf{P}_{\nu+1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_\rho}\mathbf{P}_\rho \tag{11.3}$$

Они взаимно обратны в обобщенном смысле [16].

12. Основная структурная формула (4.5) открывает принципиально новые возможности построения классификаций упругих тел. Формула (4.5) сводит эту задачу к задаче построения разумных классификаций ортогональных разложений пространства Σ.

13. Предлагаемый подход позволяет обобщить известное энергетическое условие упругого поведения Губера — Мизеса — Генки на анизотропные тела. Введем энергию ν-х собственных упругих состояний

$$(13.1)\qquad 2E_\nu \equiv \frac{s_\nu^2}{\lambda_\nu} = \frac{\sigma\cdot\mathbf{P}_\nu\cdot\sigma}{\lambda_\nu}$$

$$(13.2)\qquad E_1 + \ldots + E_\rho = \Phi$$

Энергетическое условие упругого поведения предлагаем в виде

$$(13.3)\qquad F(E_1, \ldots, E_\rho) \leqslant 0$$

Отметим два частных случая. Первый:

$$(13.4)\qquad a_1E_1 + \ldots + a_\rho E_\rho \leqslant k_0^2$$

где $k_0\sqrt{\lambda_\nu/a_\nu}$ имеет смысл предела прочности для ν-х собственных упругих состояний. Второй:

$$(13.5)\qquad E_1 \leqslant t_1, \ \ldots, \ E_\rho \leqslant t_\rho$$

где t_ν характеризует конец упругого поведения в подпространстве Π_ν. Вообще говоря, для $E_\nu = t_\nu$ в остальных подпространствах $\Pi_1, \ldots$ $\ldots, \Pi_{\nu-1}, \Pi_{\nu+1}, \ldots, \Pi_\rho$ может оставаться справедливым закон Гука (7.3).

Отметим, что при существующих обобщениях условия Губера — Мизеса — Генки (см., например, [19—21]) сохраняется его квадратичный вид, но теряется энергетический смысл [3].

14. Соединение предлагаемого подхода по собственным упругим состояниям с подходом по симметрии приводит к усилению обоих.

Назовем, как обычно, группой симметрии тензора $\mathbf{L} \in T$ подгруппу $O(\mathbf{L}) \subset O$, состоящую из всех ортогональных преобразований $\mathbf{X} \to Q{*}\mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \in O$, сохраняющих этот тензор

$$(14.1)\qquad O(\mathbf{L}) \equiv \{\mathbf{Q} \in O \mid \mathbf{Q}{*}\mathbf{L} = \mathbf{L}\}$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор второго ранга, а линейная операция $\mathbf{Q}{*}$ определена на разложимых тензорах по формуле

$$\mathbf{Q}{*}(\mathbf{a}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{a}_4) \equiv \mathbf{Q}\mathbf{a}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{Q}\mathbf{a}_4$$

Используя структурную формулу (4.5), получим следующую основную теорему об упругой симметрии.

Теорема 3. Группа симметрии упругого тела $O(\mathbf{C})$ равна пересечению групп симметрии его проекторов

$$(14.2)\qquad O(\mathbf{C}) = O(\mathbf{P}_1) \cap \ldots \cap O(\mathbf{P}_\rho)$$

Доказательство. Если $\mathbf{Q}{*}\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha$ для всех $\alpha = 1, \ldots, \rho$, то и

$$(14.3)\qquad \mathbf{Q}{*}\mathbf{C} = \mathbf{Q}{*}(\lambda_1\mathbf{P}_1 + \ldots) = \lambda_1\mathbf{Q}{*}\mathbf{P}_1 + \ldots = \mathbf{C}$$

Пусть, наоборот, $\mathbf{Q}{*}\mathbf{C} = \mathbf{C}$. Тогда

$$(14.4)\qquad \lambda_1\mathbf{Q}{*}\mathbf{P}_1 + \ldots = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \ldots$$

[3] Энергетический смысл любого квадратичного условия текучести выяснен в работе в журнале «Успехи механики», 1984, № 3.

Поскольку $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_\rho$ — ортогональное разложение единицы, то ортогональным разложением единицы является и $\mathbf{Q}*\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{Q}*\mathbf{P}_\rho$, так как $\mathbf{Q}*\mathbf{I} = \mathbf{I}$ для всех $\mathbf{Q} \in O$. Согласно единственности структурной формулы (4.6), получаем $\mathbf{Q}*\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \rho$.

Теорема 3 дает возможность разыскать все собственные упругие состояния упругого тела, симметричного относительно заданной подгруппы $G \subset O$. В самом деле, это эквивалентно отысканию всех разложений единицы (3.14), в которых слагаемые симметричны относительно G. А это означает, в свою очередь, что необходимо найти все разложения пространства симметричных тензоров второго ранга Σ (4.3), в которых все слагаемые инвариантны относительно группы G. Решение этой задачи приводит к весьма простой теории упругой симметрии тел произвольного строения.

15. Рассмотрим два простейших примера.

Изотропное упругое тело. Собственные упругие состояния изотропного тела прекрасно и давно известны: это любой шаровой тензор и любой девиатор.

Разложение (4.3) имеет стандартный вид

$$\Sigma = \Pi \oplus \Delta \tag{15.1}$$

где Π — 1-мерное пространство шаровых тензоров, а Δ — 5-мерное пространство девиаторов. Разложение (15.1) можно получить сразу из теоремы о симметрии, поскольку Π и Δ — единственные подпространства, инвариантные относительно всей ортогональной группы 0. Эта фраза является, пожалуй, рекордно коротким выводом вида закона Гука для изотропного тела (ср., например, [22])). Проекторы на Π и Δ таковы:

$$\mathbf{I}_\Pi = {}^1\!/_3\, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{I}_\Delta = \mathbf{I} - {}^1\!/_3\, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

Основная структурная формула (4.6) принимает вид

$$\mathbf{C} = \lambda_\Pi \mathbf{I}_\Pi + \lambda_\Delta \mathbf{I}_\Delta$$

Это совпадает с (1.3), причем

$$\lambda_\Pi = 3K = 3\lambda + 2\mu, \quad \lambda_\Delta = 2\mu$$

Итак, для изотропного тела истинными модулями жесткости (9.3) являются простой модуль λ_Π (утроенный модуль объемной жесткости) и 5-кратный модуль λ_Δ (удвоенный модуль сдвига). Дистрибуторы жесткости (9.5) и ориентирующие углы отсутствуют, поскольку в теле нет ни одного выделенного волокна. Структурные индексы семейства изотропных упругих тел таковы

$$\langle 1 + 5 \rangle, \quad [2 + 0 + 0]$$

Ортогональное разложение (7.3) закона Гука принимает вид

$$\sigma_\Pi = \lambda_\Pi \varepsilon_\Pi, \quad \sigma_\Delta = \lambda_\Delta \varepsilon_\Delta$$

где, конечно

$$\sigma_\Pi = {}^1\!/_3 (\operatorname{tr} \sigma)\, \mathbf{1}, \quad \varepsilon_\Pi = {}^1\!/_3 (\operatorname{tr} \varepsilon)\, \mathbf{1}$$
$$\sigma_\Delta = \sigma - \sigma_\Pi, \quad \varepsilon_\Delta = \varepsilon - \varepsilon_\Pi$$

— шаровые части и девиаторы.

Формула (13.2) представляет разделение упругой энергии на энергию изменения объема E_Π и энергию формоизменения E_Δ

$$\Phi = E_\Pi + E_\Delta$$
$$2E_\Pi = \frac{1}{\lambda_\Pi} \sigma \cdot \mathbf{I}_\Pi \cdot \sigma = \frac{s_\Pi^2}{\lambda_\Pi} = \frac{1}{6\lambda_\Pi} (\operatorname{tr} \sigma)^2$$
$$2E_\Delta = \frac{1}{\lambda_\Delta} \sigma \cdot \mathbf{I}_\Delta \cdot \sigma = \frac{s_\Delta^2}{\lambda_\Delta} = \frac{1}{\lambda_\Delta} \left[\sigma \cdot \sigma - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \sigma)^2 \right]$$

Положив в (13.5) $t_\Pi = \infty$, получаем условие упругого поведения Губерта — Мизеса — Генки $E_\Delta \leqslant t_\Delta$.

Интересно отметить, что само определение изотропного тела можно дать без явного упоминания о его симметрии. Дело в том, что справедлива *теорема*: упругое тело **C** изотропно тогда и только тогда, когда любой простой сдвиг

$$\omega = \tau(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}), \quad \mathbf{mn} = 0 \tag{15.2}$$

является его собственным упругим состоянием. Нетривиальность предложения состоит в том, что равенство модулей жесткости на сдвиги (15.2) заранее не предполагается. Доказательство дано в [23].

Специфическое семейство составляют изотропные упругие тела с коэффициентом Пуассона, равным нулю

$$\nu \equiv \frac{\lambda_\Pi - \lambda_\Delta}{2\lambda_\Pi + \lambda_\Delta} = 0$$

Назовем их идеальными упругими телами. Для них $\lambda_\Pi = \lambda_\Delta = \lambda$ и закон Гука имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I}, \quad \text{т. е.} \quad \sigma = \lambda\varepsilon$$

Любое состояние является собственным упругим состоянием идеального материала. Структурные индексы предельны

$$\langle 6 \rangle, \ [1 + 0 + 0] \tag{15.3}$$

Рассмотрим несколько более интересный пример.

Трансверсально-изотропное упругое тело. Пусть упругое тело симметрично относительно группы вращений $R_\mathbf{k}$ вокруг орта **k**, т. е. $O(\mathbf{C}) \supset R_\mathbf{k}$. Согласно (14.2), нужно разыскать все разложения (4.3), в которых слагаемые будут устойчивы относительно группы $R_\mathbf{k}$. Выберем декартов базис так, чтобы третья ось была направлена по **k**. Решение таково:

$$\Sigma = \Pi_1 \oplus \Pi_2 \oplus \Pi_3 \oplus \Pi_4 \tag{15.4}$$

Здесь Π_1 — 1-мерное пространство осесимметричных тензоров вида

$$\alpha_1 \sim p \begin{Vmatrix} \cos\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\sin\varkappa \end{Vmatrix} \tag{15.5}$$

Π_2 — 1-мерное пространство осесимметричных тензоров вида

$$\alpha_2 \sim q \begin{Vmatrix} \sin\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\cos\varkappa \end{Vmatrix} \tag{15.6}$$

Π_3 — 2-мерное пространство простых сдвигов вида

$$\alpha_3 \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ u & v & 0 \end{Vmatrix} \tag{15.7}$$

Π_4 — 2-мерное пространство простых сдвигов вида

$$\alpha_4 \sim \begin{Vmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{15.8}$$

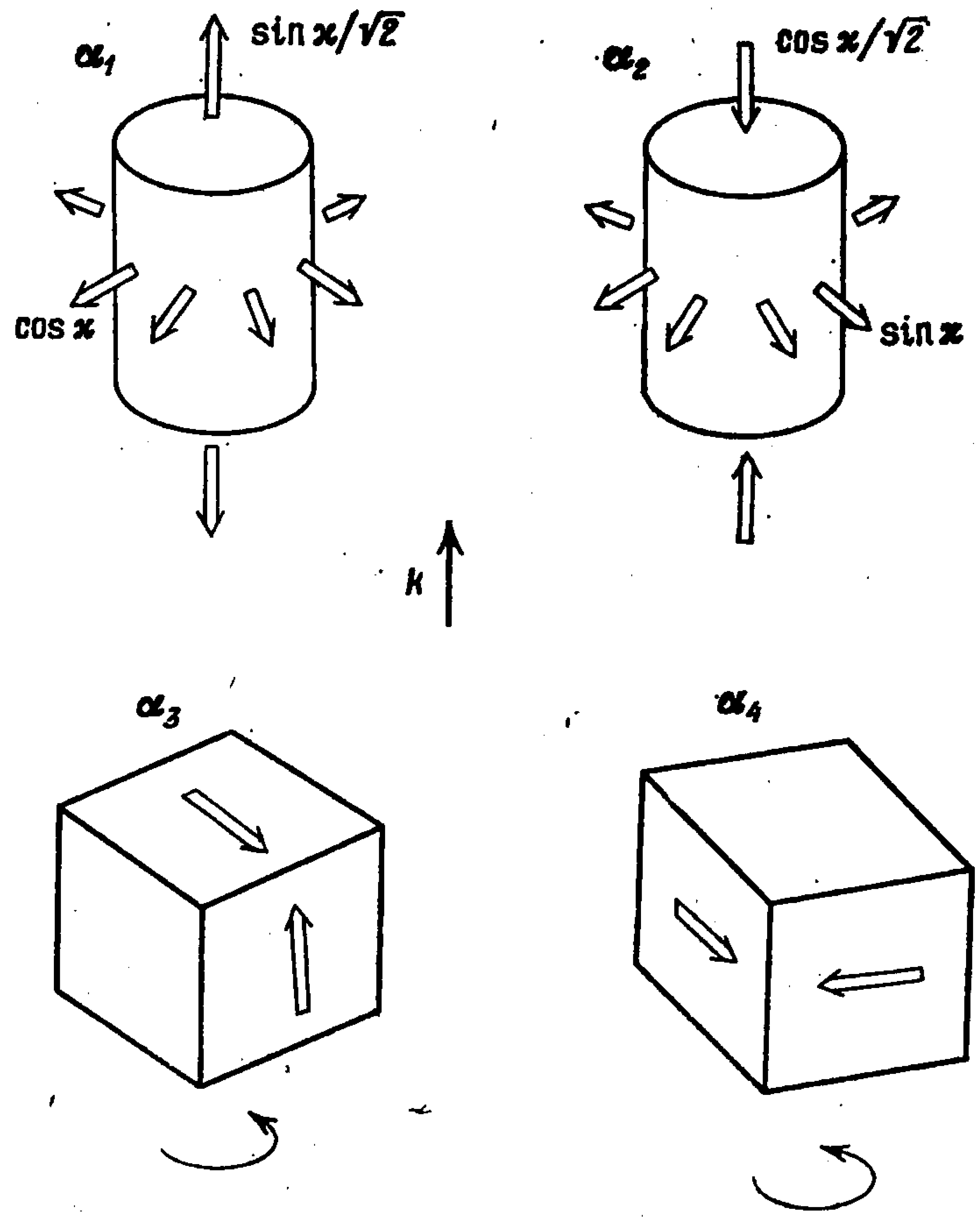
Формула

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

выражает произвольный тензор α через шесть параметров: p, q, u, v, x, y.

Собственные упругие состояния трансверсально-изотропного тела α_1, α_2, α_3, α_4 показаны на фиг. 2. Предлагаем убедиться, что $\alpha_\nu \cdot \alpha_\mu = 0$ при $\nu \neq \mu$, а после произвольного вращения вокруг орта k любой тензор $\alpha_\nu \in \Pi_\nu$ остается в Π_ν.

Разложение (15.14) интуитивно весьма понятно. Представим себе трансверсально-изотропное тело в виде изотропной матрицы, армированной волокнами в направлении **k**. Первое знакомство с сопротивлением материалов при малых деформациях достаточно, чтобы утверждать, что простые сдвиги (15.7) и (15.8) будут собственными упругими состояниями нашего тела. В самом деле, при сдвигах (15.7), (15.8) работает только изотропная матрица. Таким образом, проясняется присутствие в (15.4) двумерных слагаемых Π_3, Π_4. Что же касается пары Π_1, Π_2 с переменным $\varkappa$, то она



Фиг. 2

является произвольным ортогональным разложением двумерного пространства $(\Pi_3 \oplus \Pi_4)^{\perp}$.

Проекторы $P_1(\varkappa, \mathbf{k})$, $P_2(\varkappa, \mathbf{k})$, $P_3(\mathbf{k})$, $P_4(\mathbf{k})$ можно выписать по формуле (3.13). Закон Гука имеет вид

$$\sigma_1 = \lambda_1 \varepsilon_1, \ldots, \sigma_4 = \lambda_4 \varepsilon_4$$

Система упругих параметров, определяющих конкретное трансверсально-упругое тело, состоит из:

1) 4 истинных модулей жесткости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, причем λ_3, λ_4 имеют смысл модулей сдвига;

2) дистрибутора жесткости $\varkappa$, $0 < \varkappa \leqslant \pi/2$;

3) двух углов θ, φ, определяющих положение оси симметрии относительно лабораторной системы координат.

Структурные индексы таковы:

(15.9) $\quad \langle 1 + 1 + 2 + 2 \rangle, \quad [4 + 1 + 2]$

Можно выразить упругие константы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \varkappa$ через пять отличных от нуля и разных компонент C_{ijkl} в использованном декартовом базисе.

Справедлива следующая *теорема*: упругое тело трансверсально изотропно тогда и только тогда, когда можно указать такой орт $\mathbf{k}$, что простые сдвиги

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{ak} = 0$$
$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{ab} = \mathbf{ak} = \mathbf{bk} = 0$$

являются его собственными упругими состояниями. Последние две теоремы указывают на замечательную роль, которую в вопросах упругого поведения при малых деформациях играют простые сдвиги.

Рассмотрим совершенно отличный пример.

Некоторое полностью несимметричное упругое тело. Возьмем ортонормированную тройку осесимметричных девиаторов

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1 - 3\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1)$$

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1 - 3\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2)$$

$$\tau_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1 - 3\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3)$$

где $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ — тройка равнонаклоненных ортов

$$\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_3\mathbf{t}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Можно убедиться, что и в самом деле $\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Введем ортогональный двумерный проектор

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - (\boldsymbol{\tau}_1\otimes\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2\otimes\boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3\otimes\boldsymbol{\tau}_3)$$

Рассмотрим семейство упругих тел

$$\mathbf{C} = \frac{\lambda}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \mu_1\boldsymbol{\tau}_1\otimes\boldsymbol{\tau}_1 + \mu_2\boldsymbol{\tau}_2\otimes\boldsymbol{\tau}_2 + \mu_3\boldsymbol{\tau}_3\otimes\boldsymbol{\tau}_3 + \mu_4\mathbf{P}$$

структурные индексы которого

$$\langle 1+1+1+1+2\rangle, \quad [5+0+3]$$

Если истинные модули жесткости λ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 попарно различны, то из теоремы (14.2) можно получить, что

$$O(\mathbf{C}) = O(\boldsymbol{\tau}_1\otimes\boldsymbol{\tau}_1) \cap O(\boldsymbol{\tau}_2\otimes\boldsymbol{\tau}_2) \cap O(\boldsymbol{\tau}_3\otimes\boldsymbol{\tau}_3) = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$$

т. е. тело предельно несимметрично (триклинная сингония). В то же время тела (15.10) обладают отчетливо выраженной (математической) структурой. Во-первых, они объемно изотропны, т. е. шаровой деформации $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\mathbf{1}$ соответствует гидростатическое напряженное состояние $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = (\lambda\varepsilon)\mathbf{1}$. Во-вторых, тензорный материальный репер содержит здесь уникальную конфигурацию трех осесимметричных девиаторов.

Этот несколько искусственный пример был приведен как иллюстрация богатства возможностей упругого поведения, содержащихся в найденных структурных формулах.

16. Все представленное относится к поведению линейно-упругих тел. Простой, но весьма обширный и, по-видимому, важный для приложений класс нелинейно-упругих тел будут описывать определяющие уравнения типа

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$

где «тензор жесткости» $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon})$ — некоторая функция деформаций вида

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \ldots + \lambda_\rho(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{P}_\rho(\boldsymbol{\varepsilon})$$

причем для любого $\boldsymbol{\varepsilon}$ система $\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\varepsilon}), \ldots, \mathbf{P}_\rho(\boldsymbol{\varepsilon})$ является ортогональным разложением единицы

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \ldots + \mathbf{P}_\rho(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{I} \\ &\mathbf{P}_\alpha(\boldsymbol{\varepsilon})\circ\mathbf{P}_\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{P}_\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathbf{P}_\beta(\boldsymbol{\varepsilon})\circ\mathbf{P}_\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad \alpha \neq \beta \end{aligned} \tag{16.1}$$

а $\lambda_\alpha(\boldsymbol{\varepsilon})$ — инварианты некоторой подгруппы $G \subset O$.

В частности, можно рассмотреть ситуацию, когда разложение (16.1) постоянно, а от деформаций зависят только «модули жесткости»

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{P}_\rho$$

Пример такой зависимости

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_\Pi\mathbf{I}_\Pi + \lambda_\Delta(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}_\Delta$$

Если $\lambda_\Delta(\boldsymbol{\varepsilon})$ — инвариант, то тело изотропно. Этот случай служит основой теории малых упругопластических деформаций [24].

17. В работе описано, как математически устроено упругое тело. Полученные результаты не «отменяют» привычной формы (1.1) закона упругости; напротив, в ряде ситуаций она незаменима по простоте.

Разработка подходов, связывающих раскрытую математическую структуру любого линейно-упругого тела с физическим строением конкретного тела (кристалла, поликристалла, композита, сплава, пластика, стекла, и т. п.), равно как и разработка экспериментальных процедур, ориентированных на определение истинных модулей жесткости и собственных упругих состояний,— интересные и непростые задачи, требующие отдельных исследований.

Предварительное изложение представленных результатов дано в [25]. В [26] этот подход применен в термоупругости, а в работе, указанной в сноске 3,— в теории прочности.

В заключение подчеркнем, что представленные результаты ограничены в точности теми же рамками, но и имеют в точности ту же общность, что и сам закон (1.1). Мы лишь шлифовали новые грани кристалла, найденного Робертом Гуком.

Автору приятно выразить глубокую признательность руководству Академии наук СССР и ее Института проблем механики за предоставление условий, в которых эта работа могла быть завершена. Результаты обсуждались на семинарах в Институте основных проблем техники Польской академии наук и Институте проблем механики АН СССР, на кафедрах теории упругости и теории пластичности Московского государственного университета, в Институте кристаллографии, Институте теоретической физики и Институте машиноведения АН СССР, Институте гидродинамики и Институте горного дела СО АН СССР, на кафедре теории упругости Ленинградского государственного университета, на кафедре механики и процессов управления Ленинградского политехнического института, в Пражском политехническом институте, в Центральном институте математики и механики АН ГДР. Автор благодарит участников этих обсуждений за доброжелательные замечания.

Приложение. Приведем список сопоставлений, позволяющих немедленно переписать любую формулу этой работы на индексный декартов язык

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}, \mathbf{1}, \mathbf{n} \leftrightarrow \alpha_{ij}, C_{ijkl}, \delta_{ij}, n_i \\
\mathbf{nm}, \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \leftrightarrow n_i m_i, n_i m_j \\
\boldsymbol{\alpha\beta}, \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} \leftrightarrow \alpha_{ik}\beta_{kj}, \alpha_{ij}\beta_{kl} \\
\boldsymbol{\alpha}^2, \boldsymbol{\alpha}^3 \leftrightarrow \alpha_{ik}\alpha_{kj}, \alpha_{ik}\alpha_{kl}\alpha_{lj} \\
\operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}, |\boldsymbol{\alpha}| \leftrightarrow \alpha_{ii}, (\alpha_{ij}\alpha_{ij})^{1/2} \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}, \mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{m} \leftrightarrow \alpha_{ij}\beta_{ij}, \alpha_{ij}n_i m_j \\
\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta} \leftrightarrow C_{ijkl}\alpha_{kl}, C_{ijkl}\alpha_{ij}\beta_{kl} \\
\mathbf{C} \circ \mathbf{S}, \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \leftrightarrow C_{ijpq}S_{pqkl}, C_{ijkl}L_{ijkl} \\
\mathbf{Q} * \mathbf{C} \leftrightarrow Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}C_{pqrs} \\
\mathbf{I}_{ijkl} = {}^1/_2 (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj})
\end{gathered}$$

В качестве примеров перепишем три главные формулы

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1.1}$$

$$C_{ijkl} = \lambda_1 P_{(1)\,ijkl} + \ldots + \lambda_\rho P_{(\rho)\,ijkl} \tag{4.6}$$

$$C_{ijkl} = \lambda_I \omega_{(I)\,ij}\, \omega_{(I)\,kl} + \ldots + \lambda_6 \omega_{(6)\,ij}\, \omega_{(6)\,kl} \tag{4.9}$$

Примечание при корректуре. В библиотеке Ягеллонского университета автору посчастливилось обнаружить Philosophical Transaction of the Royal Society of London за 1856 г. со статьей будущего лорда Кельвина: *Thomson W.* Elements of a Mathematichal Theory of Elasticity, p. 481—498. Кельвин вводит собственные упругие состояния, называя их the Six Principal Strain-Types of the body. Получить структурные формулы с помощью существующих в то время математических средств он не мог. Далее обнаружилось, что эта работа была в конце прошлого века скептически прореферирована в трактате [2] и ... прочно забыта. Как бы то ни было, предлагаю называть истинные модули жесткости модулями Кельвина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hooke R.* Lecture de potentia restitutiva, or of spring, explaining the power of springing bodies to which are added some collections. L.: Martin, 1678. 56 p.
2. *Todhunter I., Pearson K.* A history of the theory of elasticity. V. 1. Cambridge: Univ. press, 1886. 924 p.
3. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Lepzig — B.: Teubner, 1910. 964 p.
4. *Шафрановский И. И.* История кристаллографии. Т. 2. XIX век. Л.: Наука, 1980. 323 с.
5. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
6. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 385 с.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
8. *Hearmon R. F. S.* An introduction to applied anisotropic elasticity. L.: Oxford Univ. press, 1961. 136 p.
9. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
10. *Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Бакута С. А.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наук. думка, 1982. 286 с.
11. *Беликов Б. П., Александров К. С., Рыжова Т. В.* Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород. М.: Наука, 1970. 276 с.
12. *Simmons G.* Single cristall elastic constants and calculated aggregate properties.— J. Grad. Res. Centr., 1965, v. 34, No. 1—2, p. 1—269.
13. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
14. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Гостехиздат, 1956. 340 с.
15. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963. 262 с.
16. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969. 475 с.
17. *Лурье К. А.* Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 86—93.
18. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применения в физике. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
19. *Mises R.* Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen.— Z. augew. Math. und Mech., 1928, B. 8, H. 3, S. 161—185.
20. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
21. *Olszak W., Urbanowski W.* The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies.— Arch. Mech. Stosowanej, 1956, v. 8, No. 4, p. 671—694.
22. *Gurtin M. E.* A short proof of the representation theorem for isotropic, linear stress-strain relations.— J. Elast., 1974, v. 4, No. 3, p. 243—245.
23. *Рыхлевский Я.* Об одном замечательном свойстве изотропного упругого материала. Ciencias técnicas, fizicas y matematicas, 1983, No 4.
24. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 247 с.
25. *Rychlewski J.* Dinh luat Hookè bang cach mo ta moi, Bao cao tai, HOI THAO QUOC CO HOC, Hanoi, 1983.
26. *Rychlewski J.* On thermoelastic constants.— Arch. Mech. Stosowanej, 1984, v. 36, No. 1.

Варшава — Москва

Поступила в редакцию
22.XI.1983