Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 533.6.011.35

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕК ОБРАЩЕНИЯ В НУЛЬ ОДНОЙ ИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ

Куликовский А.Г., Слободкина Ф. А.

Анализируется устойчивость стационарных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных при наличии точки, где обращается в нуль одна из характеристических скоростей. Искомые функции предполагаются зависящими от координаты и времени, число искомых функций произвольно.

Исследование устойчивости, проведенное ниже, основано на результатах [1, 2], согласно которым при любом числе уравнений исходной системы поведение нестационарных возмущений вблизи критической точки описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, записанным относительно функции, аналогичной инварианту Римана, связанному с обращающейся в нуль характеристической скоростью.

Ниже при помощи этого уравнения разбираются все возможные случаи непрерывных решений произвольной гиперболической системы уравнений с непрерывными и разрывными правыми частями и формулируются условия, при которых рост возмущений в окрестности критической точки, в которой обращается в нуль одна из характеристических скоростей, приводит к неустойчивости всего решения в целом. Исследование проводится с учетом возникновения и развития возмущений, связанных с другими характеристическими скоростями, знакопостоянными в рассматриваемой области.

1. Рассмотрим гиперболическую систему из произвольного числа уравнений, искомые функции которой зависят от пространственной координаты x и времени t

$$l_j^i(u_k, x)\left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + c^i(u_k, x)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right] = f^i(u_k, x) \tag{1.1}$$

Система (1.1) записана в характеристической форме, $c^i(u_k, x)$ — характеристические скорости системы; по повторяющимся нижним латинским индексам ведется суммирование от 1 до n.

Элементы матрицы l_j^i и функции c^i предполагаются непрерывными и дифференцируемыми функциями своих аргументов, а правые части уравнений (1.1) считаются кусочно-непрерывными и могут терпеть разрыв первого рода на некоторых плоскостях $x = \text{const}$. Частные производные первого порядка от $f^i(u_k, x)$ по всем аргументам будем считать существующими и непрерывными всюду, где определены $f^i(u_k, x)$, за исключением точек, принадлежащих пове рхностям разрыва этих функций.

Будем изучать решение системы (1.1) на конечном отрезке по x. На концах отрезка $x = -L_1$ и $x = L_2$ заданы граничные условия.

Предположим, что в рассматриваемой области изменения переменных u_k, x одна из однократных характеристических скоростей системы уравнений (1.1), например $c^1(u_k, x)$, обращается в нуль, а остальные (c^2, c^3, . . ., c^n) остаются знакопостоянными.

Выберем некоторое стационарное решение $u_j = U_j(x)$ системы (1.1), которое имеет общую точку с поверхностью $c^1(u_k, x)=0$ и непрерывно в малой ее окрестности. Эту точку назовем критической и примем ее за начало отсчета координаты x и величин u_j. В силу этого выбора будем иметь в критической точке $x = 0$, $U_j = 0$ и $c^1 (0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Для существования непрерывного и однозначного решения $U_j (x)$ функция f^1, стоящая в правой части первого уравнения, должна менять знак в критической точке либо непрерывным образом, либо разрывным [1, 2]. В первом случае критические точки представляют собой особые точки стационарных уравнений системы (1.1), во втором случае производные dU_j/dx обращаются в бесконечность при $x = 0$.

Как было показано в [1, 2] для непрерывной и разрывной функции f^1, поведение как стационарного, так и нестационарного решения в достаточно малой окрестности $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ критической точки приближенно описывается одним дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{\partial c}{\partial t} + [c + \varphi(t)] \frac{\partial c}{\partial x} = \gamma + \alpha c + \beta x + F(t) \tag{1.2}$$

Здесь α, β, γ — постоянные, определяемые видом исходной системы уравнений (1.1), $c (x, t)$ — искомая функция, величина которой считается малой в рассматриваемой области. Возмущения величины $c (x, t)$, как видно из уравнения, распространяются с характеристической скоростью $c + \varphi$.

Величины φ и F линейно выражаются через «проходящие» возмущения v_μ, связанные с другими характеристиками системы (1.1), скорость которых не обращается в нуль в рассматриваемой области.

Для решения уравнения (1.2) нужно знать функции $F (t)$ и $\varphi (t)$ и граничные условия, задающие c на концах отрезка $[-\delta, \delta]$, в тех случаях, когда характеристики уравнения (1.2) входят внутрь отрезка.

В работе [2] для v_μ получено выражение

$$v_\mu = d_\mu \int_0^x c^* (\xi, t)\, d\xi + p_\mu (t), \quad \mu = 2, 3, \ldots, n \tag{1.3}$$

Здесь d_μ — постоянная, зависящая от исходной системы (1.1), p_μ — произвольная функция времени, $c^* (x, t) = c (x, t) - C (x)$ — возмущение стационарного решения $C (x)$ уравнения (1.2). При малых δ первый член в правой части выражения (1.3) мал, и поэтому величины v_μ можно считать функциями, зависящими только от времени. Это соображение определяет и величины φ и F, которые линейно с постоянными коэффициентами a_μ и b_μ выражаются через p_μ

$$\varphi = \varphi (t) = \sum_\mu a_\mu p_\mu (t), \quad F = F (t) = \sum_\mu b_\mu p_\mu (t) \tag{1.4}$$

Как следует из (1.3), наличие возмущения $c^* (x, t)$ на отрезке $[-\delta, \delta]$ может порождать возмущения v_μ, которые оказывают обратное влияние на решение уравнения (1.2) через функции $\varphi (t)$ и $F (t)$. Кроме того, возмущения v_μ, распространяясь во всей области, где изучается решение исходной системы уравнений (1.1), будут отражаться от границ этой области и от неоднородностей решения, исследуемого на устойчивость. Отражения порождают в общем случае возмущения c^*. Если эти возмущения приходят к границам отрезка $[-\delta, \delta]$, то они задают граничные условия для уравнения (1.2).

Исследование взаимодействия возмущения c^* и проходящих возмущений v_μ и его влияния на поведение нестационарного решения в окрестности критической точки и на устойчивость стационарных решений является целью настоящей работы.

Из равенств (1.3) видно, что проходящие возмущения v_μ изменяются на отрезке $[-\delta, \delta]$ на величину, пропорциональную

$$S(t) = \int_{-\delta}^{\delta} c^*(x, t)\, dx$$

Как показано в [1, 2] на основании уравнения (1.2), величина $S(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{dS}{dt} = \alpha S + q, \quad q = q_1 + q_2 \tag{1.5}$$

$$q_1 = -\int_0^{c^*(\delta)} [C(\delta) + \xi]\, d\xi = -\left[Cc^* + \frac{1}{2} c^{*2}\right]_{x=\delta}$$

$$q_2 = \left[Cc^* + \frac{1}{2} c^{*2}\right]_{x=-\delta}$$

Величины q_1 и q_2 представляют собой притоки (или, если они отрицательны,— оттоки) площади через границы отрезка $[-\delta, \delta]$. При заданных $C(\pm\delta)$ они определяются значениями $c^*(\delta)$ и $c^*(-\delta)$.

2. Как было сказано, для исследования поведения возмущений необходимо знать величины φ, F и q_i. Величину q_i надо задавать только тогда, когда характеристики уравнения (1.2) приходят извне к соответствующей границе отрезка $[-\delta, \delta]$. Оценим φ, F и q_i при некоторых общих естественных предположениях.

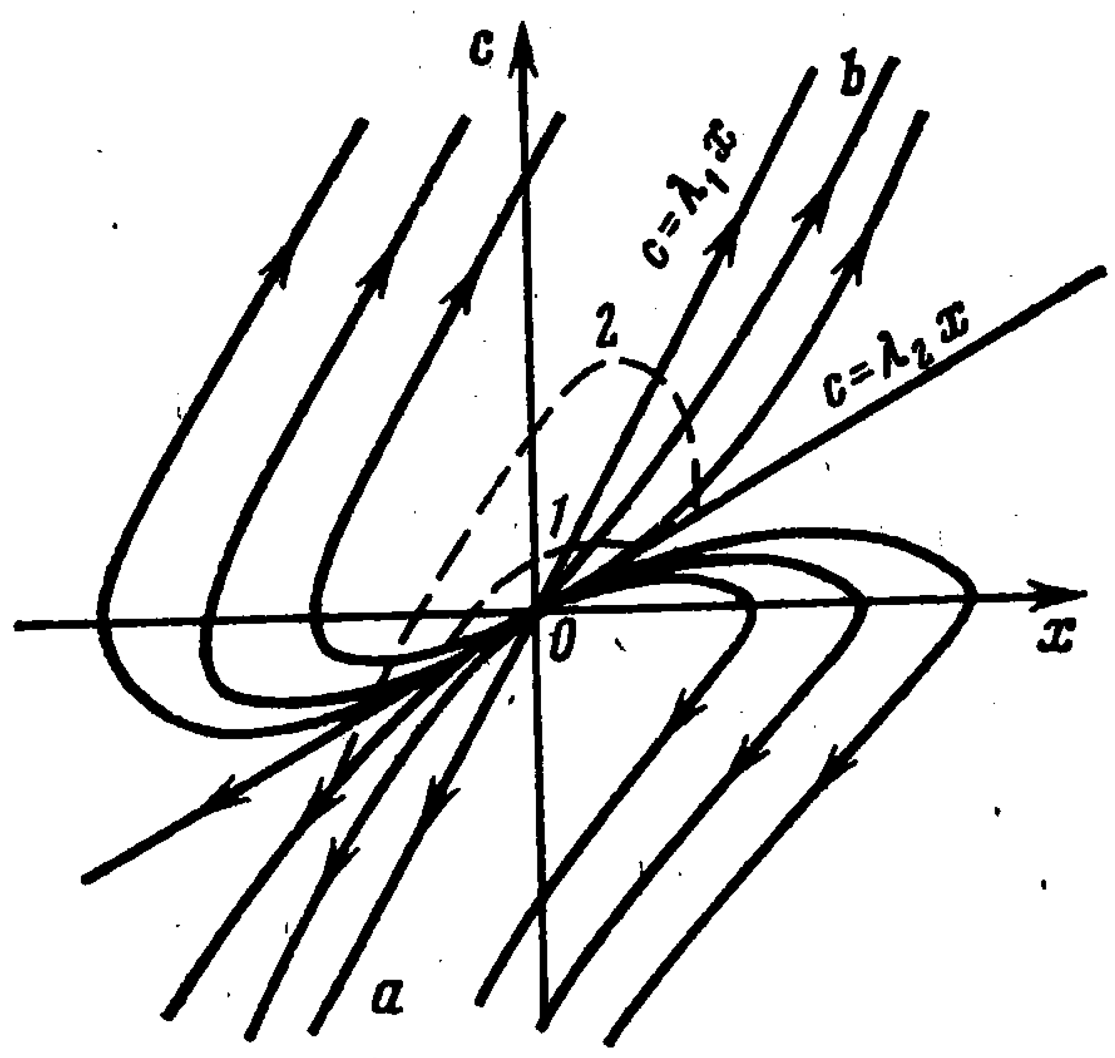
Пусть проходящие возмущения v_μ порождаются только наличием возмущения $c^*(x, t)$ на отрезке $[-\delta, \delta]$, и система (1.1) вне отрезка $[-\delta, \delta]$ устойчива. Тогда получим, что v_μ и, следовательно, $p_\mu(t)$ по порядку величины равны S, т. е. не превосходят $\delta \max |c^*|$. Функции $F(t)$ и $\varphi(t)$, представляющие собой линейные комбинации $p_\mu(t)$, также по порядку величины равны S и, в силу малости δ, будут много меньше характерной величины c^*. Таким образом, при сделанных предположениях в уравнении (1.2) можно пренебречь функциями $\varphi(t)$ и $F(t)$ по сравнению с остальными членами, т. е. считать, что

$$F(t) = 0, \quad \varphi(t) = 0 \tag{2.1}$$

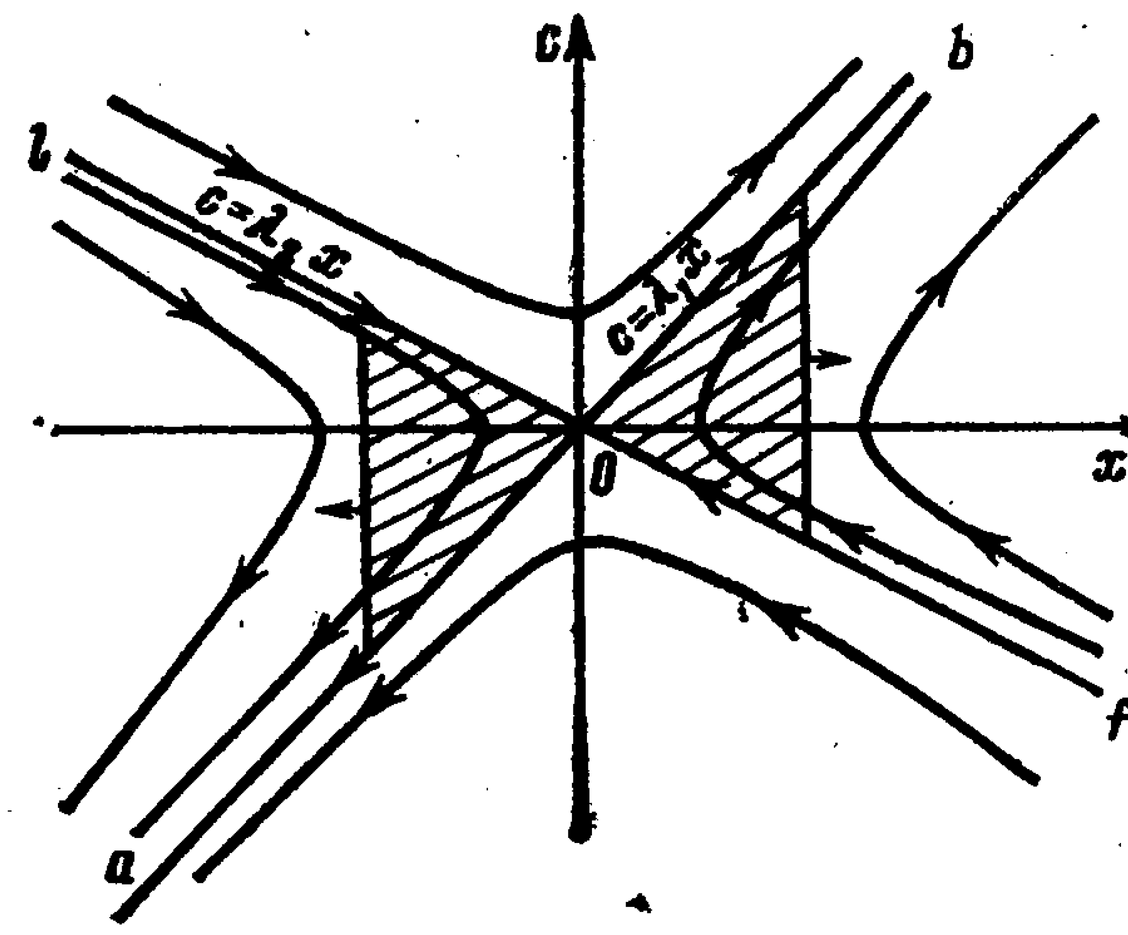
Если в начальный момент времени отсутствуют все возмущения, кроме c^* на отрезке $[-\delta, \delta]$, то приток площади q будет определяться отражением возмущений v_μ, имеющих порядок S, от границ отрезка $x = -L_1$ и $x = L_2$ и от неоднородностей основного решения.

Если коэффициенты отражения порядка единицы и отражение происходит на конечном расстоянии, где скорость распространения возмущений, связанных с характеристиками первого семейства, имеет порядок единицы, то поток площади отраженного возмущения будет по порядку величины равен его амплитуде.

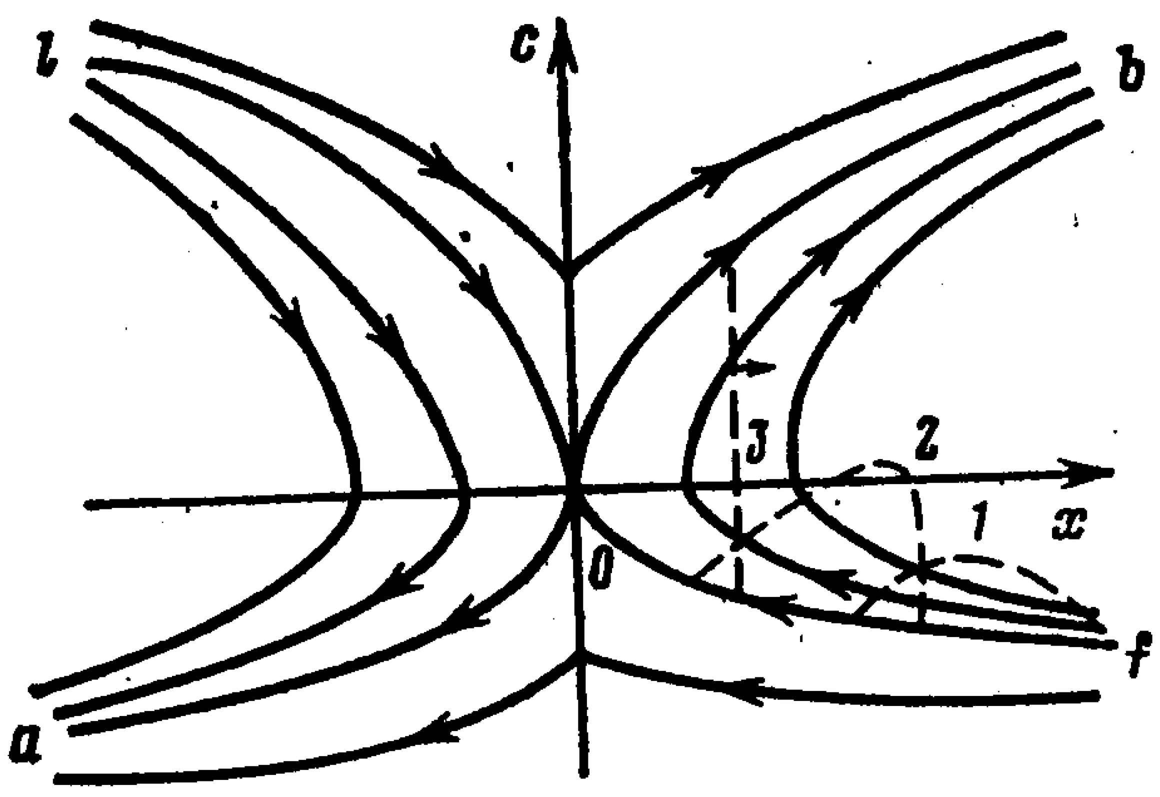
Это означает, что q_i можно считать линейным функционалом от $S(t)$, таким, что $q_i(t)$ не превосходит по порядку величины значения $\max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} S(\tau) \exp \alpha(t - \tau)$, где учтено, что возмущения, приходящие к границам отрезка $[-\delta, \delta]$, меняют вблизи него свою площадь как $\exp \alpha t$. При этом оказывается, что $q \sim \alpha S$, и в уравнении (1.5) знак правой части может быть произвольным, т. е. каких-либо общих заключений о поведении S сделать нельзя.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Тем не менее будет показано, что все выводы о неустойчивости, сделанные в [1] без учета q, остаются справедливыми и при учете этого члена в принятых здесь предположениях.

Заметим, что принятые предположения не являются единственно возможными. В некоторых случаях приток площади q может оказаться много меньше величины αS, например при малых коэффициентах отражения возмущений v_μ или при малых значениях $C(x)$ в точках отражения. Тогда при исследовании устойчивости можно не учитывать притоков площади, как это было сделано в [1].

3. Как уже отмечалось, во всех случаях, когда возмущение c^* покидает отрезок $[-\delta, \delta]$, граничные условия на его концах для c^* задавать не нужно и исследование поведения возмущений в окрестности критической точки совпадает с проведенным в работе [1].

В частности, справедливо заключение о неустойчивости решения, соответствующего любой интегральной кривой, проходящей через особую точку типа узла с положительными собственными направлениями в плоскости x, c (см. фиг. 1). Этот случай возникает при $\gamma = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Характеристики первого семейства расходятся от критической точки. На фиг. 1 (также и на фиг. 2 и 3) стрелками указано направление изменения величин c и x с ростом t.

Возмущение стационарного решения, которое в начальный момент времени $t = 0$ отлично от нуля при $x = 0$ (см. фиг. 1), никогда не покинет окрестность критической точки, и при $t \to \infty$ производная по x от решения будет стремиться к бо́льшему собственному значению особой точки, т. е. к λ_1. Разрывы, если они возникают в решении, будут двигаться от особой точки влево или вправо.

Рассмотрим стационарные решения системы (1.1) при наличии особой точки типа седла. В этом случае в уравнении (1.2) величины $\gamma = 0$, $\beta > 0$, величина α может быть любого знака.

При $\alpha > 0$ решение, соответствующее сепаратрисе седла с характеристиками, сходящимися к критической точке, остается неустойчивым и при учете q в рамках сделанных в п. 2 предположений. Действительно, выберем возмущение c^* решения lof при $t = 0$ таким образом, чтобы суммарная площадь S (0) $= 0$, а площади, расположенные по разные стороны от критической точки, были бы отличны от нуля (см. фиг. 2). Каждая из площадей слева и справа от $x = 0$ будет расти со временем, как $\exp \alpha t$, а суммарная площадь и вместе с ней q будут оставаться равными нулю. Наличие таких растущих возмущений означает неустойчивость выбранного стационарного решения.

Интересно отметить, что решение, аналогичное полученному выше при ряде предположений для нелинейной системы, имеется также у линейной гиперболической системы уравнений общего вида, если одно семейство характеристик сходится к критической точке.

Рассмотрим теперь поведение возмущений стационарных решений при $\gamma \neq 0$. Для существования непрерывного и однозначного по x стационарного решения уравнения (1.2) в окрестности точки $x = 0$, $c = 0$ необходимо, чтобы величина γ принимала разные значения слева и справа от критической точки, причем $\gamma_- < 0$ при $x < 0$, $\gamma_+ > 0$ при $x > 0$ [2]. Стационарным решениям на плоскости x, c соответствуют интегральные кривые в окрестности сжатого по оси x седла (фиг. 3), сепаратрисы которого в окрестности начала координат в первом приближении описываются формулами: $C(x) = \pm\sqrt{2\gamma_\pm x}$. В общем случае надо считать, что $\alpha_- \neq \alpha_+$, и ввиду разрывности коэффициентов γ и α уравнение (1.2) необходимо рассматривать отдельно — слева и справа от критической точки, что помечается соответственно индексами минус и плюс. При $\gamma \neq 0$ членом βx в уравнении (1.2) можно пренебречь по сравнению с членами γ и αc.

Возмущения c^* решения aob, вдоль которого характеристики расходятся, покидают δ-окрестность критической точки за время порядка $\sqrt{\delta}$.

Решение lof со сходящимися характеристиками неустойчиво, если $\alpha_- = \alpha_+ > 0$. При этом, так же как и для седла с положительным значением α, можно построить растущее решение, не порождающее приходящих возмущений. Если значения α различны слева и справа от критической точки, то нельзя сделать общих заключений об устойчивости, основанных только на развитии возмущений в окрестности критической точки. Нельзя также сделать заключений об устойчивости стационарных решений lob и aof при любых $\alpha_\pm$, так как для них отсутствуют симметричные решения в окрестности критической точки с суммарной площадью, равной нулю.

Однако можно указать еще и другие случаи, когда рост площади возмущения S вблизи критической точки приведет к неустойчивости всего решения lof, lob или aof в целом.

Рассмотрим для определенности поведение возмущений решения lof. Пусть все характеристические скорости c^μ ($\mu = 2, 3, \ldots, n$) одного знака, например положительны, и $\alpha_- > 0$. Тогда площадь отрицательного возмущения решения lof, заключенного между интегральной кривой aol и разрывом слева, будет расти как $\exp \alpha_- t$, в то время как возмущения, связанные с характеристиками c^μ, будут уходить вдоль решения lof к концу $x = L_2$, порождая возмущения c^*. Однако пройти через критическую точку смогут только отрицательные возмущения c^*. Положительные возмущения величины c, которые могли бы компенсировать рост отрицательного возмущения, будут оставаться справа от точки $x = 0$. Таким образом, приток площади q может приводить при $x < 0$ лишь к еще более быстрому росту возмущения решения lof, т. е. к неустойчивости. При тех же условиях неустойчиво и решение lob.

Если все характеристические скорости c^μ ($\mu = 2, 3, \ldots, n$) отрицательны и $\alpha_+ > 0$, решения lof и aof также будут неустойчивыми по аналогичным причинам.

Неустойчивость решения lof будет развиваться при тех же условиях и тогда, когда критическая точка типа седла или деформированного седла совпадает с правым концом отрезка по x, т. е. на решении lo при $c^\mu > 0$, $\alpha_- > 0$.

Таким образом, наличие критической точки в стационарном решении как при расходящихся, так и при сходящихся к критической точке характеристиках может приводить к неустойчивости в случае положительного коэффициента α в уравнении (1.2). В п. 3 перечислены решения, которым свойственна специфическая неустойчивость, связанная с наличием критической точки.

Результаты могут быть распространены на решения параболически вырожденных систем уравнений, если имеется характеристическая скорость, обращающаяся в нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 593—602.
2. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* О поведении малых возмущений одномерных стационарных трансзвуковых течений.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 6, с. 979—988.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1983