Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 532.5 : 532.135

# О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ

Кондауров В. И.

Рассматриваются нелинейные уравнения сплошной упругой среды с тремя дополнительными степенями свободы, связанными с локальным вращением. Такая упругая среда называется микрополярной [1]. Для нее предполагается существование упругого потенциала; тепловыми эффектами пренебрегается.

Цель работы — изучение некоторых качественных свойств уравнений, тесно связанных с понятием гиперболичности. Полная система уравнений представляется в виде системы локальных законов сохранения, замыкаемых конечными соотношениями, задающими реологию материала. Возможность такого представления основана [2, 3] на том, что в качестве меры деформации используются градиенты перемещения и угла поворота частицы. Для них формулируются достаточно простые по своей структуре локальные законы сохранения совместности полей деформаций и скоростей.

Изучаются скорости распространения характеристических поверхностей динамических уравнений для общего случая рассматриваемого материала. Существование вещественных скоростей — необходимое условие гиперболичности — приводит к ограничению на вид функции упругого потенциала, которое является аналогом *SE*-неравенства [4] в классической теории нелинейно-упругих сред.

Система изучаемых нелинейных уравнений посредством замены вектора решения приводится к симметричной форме. Необходимое условие такого преобразования [5] — существование дополнительного, следующего из рассматриваемой системы закона сохранения энергии. Симметричная форма уравнений позволяет сформулировать достаточное условие гиперболичности — условие выпуклости упругого потенциала по своим аргументам. Получена оценка роста решений задачи Коши и следующая из нее теорема единственности. Наличие симметричной формы системы позволяет получить общий вид транспортного уравнения, определяющего скорость изменения слабого разрыва вдоль бихарактеристики.

**1. Основные уравнения.** Пусть $\mathbf{X}$ — радиус-вектор материальной частицы тела в отсчетной конфигурации $\varkappa$. Предположим, что на $\varkappa$ определен вектор перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ и вектор поворота $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$. Это предположение соответствует микрополярной среде [1], представляющей собой простейший случай континуума с микроструктурой [6]. Частицы такой среды обладают дополнительными по сравнению с классической сплошной средой степенями свободы, связанными с вращением частицы как жесткого целого. Это вращение не определяется в общем случае полем перемещений $\mathbf{u}$.

Обозначим $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ — радиус-вектор частицы в актуальной конфигурации, $\mathbf{v} = (\partial \mathbf{x}/\partial t)|_X$ — массовую скорость, $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}$, $\boldsymbol{\Phi} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$ — градиенты перемещений и поворота, такие, что $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$, $d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Phi} d\mathbf{X}$, причем

$$\boldsymbol{\varphi}^{\cdot} \equiv (\partial \boldsymbol{\varphi}/\partial t)|_X = \boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

— вектор угловой скорости.

Если отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ и $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ дважды непрерывно дифференцируемые всюду, кроме, быть может, сингулярных поверхностей, причем $\Delta = \det \mathbf{F} \neq 0$, то в переменных $\mathbf{X}$, $t$ имеют место соотношения совместности полей деформаций и скоростей

$$(\partial \mathbf{F}/\partial t)\,|_X - \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (\partial \boldsymbol{\Phi}/\partial t)\,|_X - \nabla \boldsymbol{\omega} = 0$$

которые могут быть записаны в виде

$$(1.2) \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mathrm{Div}\,(\mathbf{v} \otimes \mathbf{I}) = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} - \mathrm{Div}\,(\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{I}) = 0$$

где символ Div означает дивергенцию в переменных $\mathbf{X}$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Дивергентная форма соотношений (1.2) в эйлеровых переменных $\mathbf{x}$, $t$ будет следующей (div — дивергенция в переменных $\mathbf{x}$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\mathbf{F}\right)\Big|_x + \mathrm{div}\left(\frac{1}{\Delta}\mathbf{F} \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{\Delta}\mathbf{v} \otimes \mathbf{F}^T\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{\Phi}\right)\Big|_x + \mathrm{div}\left(\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{\Phi} \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{\Delta}\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{F}^T\right) = 0$$

Определим матрицы компонент тензоров несовместности деформаций первого и второго рода выражениями

$$(1.3) \qquad K_{ij}{}^m(X^a, t) = \nabla_j F_i{}^m - \nabla_i F_j{}^m, \quad H_{ij}{}^m(X^a, t) = \nabla_j \Phi_i{}^m - \nabla_i \Phi_j{}^m$$

Для непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ и $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}, t)$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, t)$ имеют место соотношения

$$(1.4) \qquad K_{ij}{}^m(X^a, t) = 0, \quad H_{ij}{}^m(X^a, t) = 0$$

Действительно, дифференцируя соотношения (1.2), записанные в декартовой прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial F_i{}^m(X^a, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^m(X^a, t)}{\partial X^i} = 0, \quad \frac{\partial F_j{}^m(X^a, t)}{\partial t} - \frac{\partial v^m(X^a, t)}{\partial X^j} = 0$$

соответственно по $X^j$ и $X^i$, и вычитая их одно из другого, получим с учетом гладкости поля $v^m(X^a, t)$

$$(1.5) \qquad \partial K_{ij}{}^m(X^a, t)\,/\,dt = 0$$

Так как при $t = 0$ градиент $F_i{}^m(X^a, t) = \delta_i{}^m$ и, следовательно, $K_{ij}{}^m(X^a, 0) = 0$, то из единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (1.5) с нулевым начальными данными следует первое из соотношений (1.4).

Аналогично показывается справедливость второго равенства (1.4), если тензор несовместности $H_{ij}{}^m(X^a, 0) = 0$.

В частности, отсюда следует, что соотношения (1.4), которые являются соотношениями совместности деформаций, сформулированными в терминах градиентов $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\Phi}$, не являются независимыми уравнениями по отношению к (1.2).

Как видно, из определения (1.3), матрицы компонент $K_{ij}{}^m$ и $H_{ij}{}^m$ антисимметричны по индексам $i$, $j$ и существует только девять независимых компонент. Матрицы этих независимых компонент, записанные в виде

$$B_F^{mi} = e^{ijk}\nabla_k F_j{}^m, \quad B_\Phi^{mi} = e^{ijk}\nabla_k \Phi_j{}^m$$

где $e^{ijk}$ — единичный антисимметричный тензор, будем называть матрицей компонент тензора Бюргерса первого и второго рода.

Таким образом, условия совместности деформаций следуют из условий совместности деформаций и скоростей и формулируются как условия равенства нулю тензоров несовместности или тензоров Бюргерса.

Пусть $\rho_0$, $\rho$ — плотность массы тела в отсчетной и актуальной конфигурациях. Закон сохранения массы для микрополярной среды может быть записан в виде [1]

$$(1.6) \qquad \rho\Delta = \rho_0, \quad \Delta = \det \mathbf{F}$$

Обозначим $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{J} = \mathbf{J}^T$ — симметричный положительно-определенный тензор плотности момента инерции микрополярной среды Для него предполагаем, что

$$(1.7) \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right|_X = \mathbf{\Omega J} - \mathbf{J\Omega} \quad (\Omega_{ij} = e_{ikj}\omega^k)$$

Это предположение — аналог соотношения для скорости изменения момента инерции абсолютно твердого тела

$$\mathbf{J} = \int \{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\,\mathbf{I} - \mathbf{y}\otimes\mathbf{y}\}\, d^3\mathbf{y}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$—радиус-вектор точки в системе отсчета, связанной с центром масс рассматриваемого объема, $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Если $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ — ортогональный тензор ($\mathbf{RR}^T = \mathbf{I}$), описывающий вращение тела и являющийся аналогом аксиального вектора $\varphi$, то $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{y}_0$, где $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$, и $\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{R}^{\cdot}\mathbf{y}_0 = \mathbf{R}^{\cdot}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{y}_0 = \mathbf{\Omega y}$, $\mathbf{J}^{\cdot} - \mathbf{\Omega J} + \mathbf{J\Omega} = 0$.

Дивергентная форма локального закона сохранения плотности момента инерции в эйлеровых переменных $\mathbf{x}$, $t$ записывается в виде

$$\left.\frac{\partial(\rho\mathbf{J})}{\partial t}\right|_x + \operatorname{div}(\rho\mathbf{J}\otimes\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{\Omega J} - \mathbf{J\Omega})$$

Пусть $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}, t)$ — вектор напряжений, а $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}, t)$ — вектор момента, определенные на кусочно-гладкой поверхности $\psi(\mathbf{X}, t) = 0$ с нормалью $\boldsymbol{\nu} = \nabla\psi / |\nabla\psi|$. Векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{m}$ характеризуют плотность взаимодействия частей тела, разделенных рассматриваемой поверхностью. Фундаментальная теорема Коши определяет тензор напряжений Пиола — Кирхгофа первого рода и тензор моментов

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t)\,\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{X}, t)\,\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{T} \neq \mathbf{T}^T, \quad \mathbf{M} \neq \mathbf{M}^T$$

Обозначим $\mathbf{b}$, $\mathbf{l}$ — плотность массовых сил и моментов. Тогда локальные законы сохранения импульса и момента импульса для микрополярной среды в переменных $\mathbf{X}$, $t$ имеют вид

$$(1.8) \qquad \rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{Div}\mathbf{T} = \rho_0\mathbf{b}, \quad \rho_0\frac{\partial(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})}{\partial t} - \operatorname{Div}\mathbf{M} = \rho_0\boldsymbol{\zeta} + \rho_0\mathbf{l}$$

Вектор $\boldsymbol{\zeta}$ в уравнении момента импульса является сопутствующим [7] тензору напряжений Коши $\Delta^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^T$, так что $\rho_0\zeta_i = e_{ijk}T^{ka}F_a{}^j$.

Далее предполагаем, что рассматриваемый материал гиперупругий и, для простоты, однородный, т. е. существует упругий потенциал $W$, такой, что

$$(1.9) \qquad W = W(\mathbf{F}, \boldsymbol{\Phi}, \varphi)$$

$$\mathbf{T} = \rho_0\frac{\partial W}{\partial\mathbf{F}}, \quad \mathbf{M} = \rho_0\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\Phi}}, \quad \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\partial W}{\partial\varphi}$$

Тепловыми эффектами при деформировании такой среды пренебрегаем. На потенциал $W$ накладываются ограничения

$$W(\mathbf{QF}, \det\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q\Phi}, \det\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}\varphi) = W(\mathbf{F}, \boldsymbol{\Phi}, \varphi)$$

$$e_{ijk}\frac{\partial W}{\partial F_{ka}}F_a{}^j + \frac{\partial W}{\partial\varphi^i} = 0, \quad \mathbf{QQ}^T = \mathbf{I}$$

Первое из них представляет собой свойство объективности — условие инвариантности упругого потенциала относительно ортогональных преобразований актуальной конфигурации. Второе из ограничений следует из выражения $\rho_0\zeta_i = e_{ijk}T^{ka}F_a{}^j$ и соотношений (1.9). Заметим, что в случае бесконечно малых деформаций из второго ограничения вытекает

$$W = W(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\Phi}), \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F} - \mathbf{e}\varphi$$

Таким образом, полная система уравнений для изучаемой среды может быть записана в виде системы дифференциальных законов сохранения (1.1), (1.2), (1.7), (1.8) и конечных реологических соотношений (1.9). В декартовой прямоугольной системе координат систему дифференциальных уравнений можно представить в форме

$$(1.10)\qquad \frac{\partial \varphi_\alpha{}^\circ}{\partial t}+\frac{\partial \varphi_\alpha{}^m}{\partial X^m}=f_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,33,\quad m=1,2,3$$

$$\varphi_\alpha{}^\circ=\{\rho_0 v^i,\ \rho_0 J^{ia}\omega_a,\ \varphi^i,\ F_a{}^i,\ \Phi_a{}^i,\ J_{ij}\}$$

$$\varphi_\alpha{}^m=\{T^{im},\ M^{im},\ 0,\ v^i\delta_a{}^m,\ \omega^i\delta_a{}^m,\ 0\}$$

$$f_\alpha=\{\rho_0 b^i,\ \rho_0(l^i+\zeta^i),\ \omega^i,\ 0,\ 0,\ \Omega_{ia}J_j{}^a-J_i{}^a\Omega_{aj}\}$$

Квазилинейная система (1.10) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$(1.11)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}=\omega_i,\quad \frac{\partial F_j{}^i}{\partial t}-\frac{\partial v^i}{\partial X^j}=0,\quad \frac{\partial \Phi_j{}^i}{\partial t}-\frac{\partial \omega^i}{\partial X^j}=0$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}-\frac{\partial^2 W}{\partial F_m{}^i\partial F_n{}^j}\frac{\partial F_n{}^j}{\partial X^m}-\frac{\partial^2 W}{\partial F_m{}^i\partial \Phi_n{}^j}\frac{\partial \Phi_n{}^j}{\partial X^m}-\frac{\partial^2 W}{\partial F_m{}^i\partial \varphi_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial X^m}=b_i$$

$$J_i{}^a\frac{\partial \omega_a}{\partial t}-\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_m{}^i\partial F_n{}^j}\frac{\partial F_n{}^j}{\partial X^m}-\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_m{}^i\partial \Phi_n{}^j}\frac{\partial \Phi_n{}^j}{\partial X^m}-$$

$$-\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_m{}^i\partial \varphi_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial X^m}=l_i+\zeta_i+e_{iab}J_j{}^a\omega^b\omega^j$$

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial t}=e_{iba}\omega^b J_j{}^a-e_{abj}J_i{}^a\omega^b$$

Для дальнейшего удобно пользоваться (1.11) в матричной форме

$$(1.12)\qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+B^m_{\alpha\beta}(u_\gamma)\frac{\partial u_\beta}{\partial X^m}=f_\alpha(u_\gamma)$$

$$u_\alpha=\{v_i,\ \omega_i,\ \varphi_i,\ F^i{}_j,\ \Phi^i{}_j,\ J_{ij}\}$$

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,33;\ i,j,m=1,2,3$$

**2. Условия гиперболичности.** Исследуем вопрос о гиперболичности уравнений (1.12), которая тесно связана с корректностью задачи Коши. По определению [8], система (1.12) — гиперболическая, если все собственные числа матрицы $\nu_m B_{\alpha\beta}{}^m$, где $\nu_m$ — произвольный единичный вектор, действительные, а число соответствующих им линейно-независимых левых собственных векторов этой матрицы равно числу уравнений в (1.12) для любого заданного $\nu_m$.

Получим уравнение для собственных чисел или, иными словами, для скоростей распространения характеристических поверхностей. Пусть $\psi(\mathbf{X},\ t)=0$ — уравнение такой поверхности, которая одновременно является поверхностью возможных слабых разрывов [8], $c=-\partial\psi/\partial t/|\nabla\psi|$, $\boldsymbol{\nu}=\nabla\psi/|\nabla\psi|$ — скорость распространения и единичная нормаль. Тогда, пользуясь геометрическими и кинематическими условиями совместности [9], получим на поверхности слабого разрыва

$$(2.1)\qquad c\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu}\right]=0,\quad c\left[\frac{\partial F_j{}^i}{\partial \nu}\right]+\left[\frac{\partial v^i}{\partial \nu}\right]\nu_j=0$$

$$c\left[\frac{\partial \Phi_j{}^i}{\partial \nu}\right]+\left[\frac{\partial \omega^i}{\partial \nu}\right]\nu_j=0$$

$$c\left[\frac{\partial v^i}{\partial \nu}\right]+\nu_m\frac{\partial^2 W}{\partial F_m{}^i\partial F_n{}^j}\left[\frac{\partial F_n{}^j}{\partial \nu}\right]+\nu_m\frac{\partial^2 W}{\partial F_m{}^i\partial \Phi_n{}^j}\left[\frac{\partial \Phi_n{}^j}{\partial \nu}\right]+$$

$$+\nu_m\frac{\partial^2 W}{\partial F_m{}^i\partial \varphi_j}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu}\right]=0$$

$$
cJ_i^a\left[\frac{\partial\omega_a}{\partial\nu}\right]+\nu_m\frac{\partial^2W}{\partial\Phi_m{}^i\partial F_n{}^j}\left[\frac{\partial F_n{}^j}{\partial\nu}\right]+\nu_m\frac{\partial^2W}{\partial\Phi_m{}^i\partial\Phi_n{}^j}\left[\frac{\partial\Phi_n{}^j}{\partial\nu}\right]+
$$
$$
+\nu_m\frac{\partial^2W}{\partial\Phi_m{}^i\partial\varphi_j}\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial\nu}\right]=0,\quad c\left[\frac{\partial J_{ij}}{\partial\nu}\right]=0
$$

где $[\partial u_\alpha/\partial\nu]$ — скачок нормальной производной решения, определяемой формулой $\partial u_\alpha/\partial\nu=\nu_i\partial u_\alpha/\partial X^i$.

Нетривиальное решение $[\partial u_\alpha/\partial\nu]$ однородной линейной системы (2.1) существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю, т. е.

$$
\det\|-c\delta_{\alpha\beta}+\nu_m B_{\alpha\beta}{}^m\|=0 \tag{2.2}
$$

Непосредственно из (2.1) видно, что $c=0$ — кратный корень уравнения (2.2). Если $c\neq 0$, то из (2.1) следует

$$
\det\left\|c^2\delta_{\lambda\mu}-\nu_m\frac{\partial^2W}{\partial p_m{}^\lambda\partial p_n{}^\mu}\nu_n\right\|=0 \tag{2.3}
$$
$$
p_m{}^\lambda=\{F_m{}^i,\Phi_m{}^i\},\quad \lambda,\mu=1,2,\ldots,6;\quad i,m,n=1,2,3
$$

условие разрешимости которого

$$
\left(\nu_m\frac{\partial^2W}{\partial p_m{}^\lambda\partial p_n{}^\mu}\nu_n\right)a^\lambda a^\mu>0 \tag{2.4}
$$

для всех направлений распространения, определяемых нормалью $\nu_m$, и всех $a^\lambda\neq 0$.

Ограничение (2.4) на вид упругого потенциала $W$ служит необходимым условием гиперболичности и аналогом $SE$-условия в нелинейной теории упругости [4, 7].

Если неравенство (2.4) справедливо, то система уравнений (1.11) обладает действительными скоростями распространения характеристических поверхностей. Но сказать что-либо о существовании и линейной независимости собственных векторов матрицы $\nu_m B_{\alpha\beta}{}^m$, используя только (2.4), не представляется возможным.

Сформулируем достаточное условие гиперболичности. Для этого, как и в работах [2, 3], приведем систему (1.10) к симметричной форме.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенств ($E$ — плотность полной энергии)

$$
\begin{aligned}
&v_\alpha f_\alpha=\rho_0(b^iv_i+l^i\omega_i),\quad v_\alpha d\varphi_\alpha{}^\circ=d(\rho_0E)\\
&v_\alpha d\varphi_\alpha{}^m=d(T^{im}v_i+M^{im}\omega_i)\\
&(E=W+v_iv^i/2+J^{ij}\omega_i\omega_j/2)
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Здесь

$$
v_\alpha=\{v_i,\ \omega_i,\ -\rho_0\zeta_i,\ T_{ij},\ M_{ij},\ -{}^1/_2\rho_0\omega_i\omega_j\} \tag{2.6}
$$

Переписывая второе и третье равенства (2.5) в форме

$$
\begin{aligned}
dL^\circ&=d(v_\alpha\varphi_\alpha{}^\circ-\rho_0E)=\varphi_\alpha{}^\circ dv_\alpha\\
dL^m&=d(v_\alpha\varphi_\alpha{}^m-T^{im}v_i-M^{im}\omega_i)=\varphi_\alpha{}^m dv_\alpha
\end{aligned}
$$

запишем систему (1.10) в виде

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^\circ}{\partial v_\alpha}-\frac{\partial}{\partial X^m}\frac{\partial L^m}{\partial v_\alpha}=f_\alpha \tag{2.7}
$$
$$
\left(\varphi_\alpha{}^\circ=\frac{\partial L^\circ}{\partial v_\alpha},\ \varphi_\alpha{}^m=\frac{\partial L^m}{\partial v_\alpha}\right)
$$

Если обозначить

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha\beta}{}^\circ&=\partial^2L^\circ/\partial v_\alpha\partial v_\beta,\quad L_{\alpha\beta}{}^\circ=L_{\beta\alpha}{}^\circ\\
L_{\alpha\beta}{}^m&=\partial^2L^m/dv_\alpha dv_\beta,\quad L_{\alpha\beta}{}^m=L_{\beta\alpha}{}^m
\end{aligned}
$$

то из (2.7) следует искомая симметричная система

$$L^{\circ}_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial t}-L^{m}_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial X^m}=f_\alpha \tag{2.8}$$

с вектором решения $v_\alpha$, связь которого с вектором $u_\alpha$ определяется формулами (2.6).

Заметим теперь, что если матрица $L_{\alpha\beta}{}^{\circ}$ положительно определена, то существует невырожденное преобразование, одновременно приводящее к диагональному виду две симметричные матрицы $L_{\alpha\beta}{}^{\circ}$ и $\nu_m L_{\alpha\beta}{}^{m}$, где $\nu_m$ — вектор нормали. В этом случае система (2.8) заведомо гиперболическая.

Положительная определенность $L_{\alpha\beta}{}^{\circ}$ эквивалентна выпуклости функции $L^{\circ}$ по аргументам $v_\beta$. Преобразование Лежандра произвольной выпуклой функции $M(v_\alpha)$ имеет вид $H(z_\alpha)=z_\alpha v_\alpha - M(v_\alpha)$, $z_\alpha=\partial M/\partial v_\alpha$ и само является выпуклой функцией. Для функции $L^{\circ}$ оно равно $H(\varphi_\alpha{}^{\circ}) = \rho_0 E$. В силу $\rho_0>0$ и положительной определенности тензора $J^{ij}$ полная энергия $E$ будет выпуклой функцией при условии выпуклости упругого потенциала $W=W(F_a{}^i,\ \Phi_a{}^i,\ \varphi^i)$, т. е.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\pi_\varkappa\partial\pi_\mu}\lambda^\varkappa\lambda^\mu>0,\quad \forall\lambda^\varkappa\neq 0 \tag{2.9}$$
$$\pi_\varkappa=\{F_a{}^i,\ \Phi_a{}^i,\ \varphi^i\}$$

Из выпуклости $W(\pi_\varkappa)$ следует также, что преобразование исходной системы (1.12) в симметричную систему (2.8), связанное с заменой вектора решения $u_\alpha=\{v_i,\ \omega_i,\ \varphi_i,\ F_j{}^i,\ \Phi_j{}^i,\ J_{ij}\}$ вектором (2.6), невырожденное, т. е.

$$\det\|\partial u_\alpha/\partial v_\beta\| = \det\|\partial u_\alpha/\partial\varphi_\gamma{}^{\circ}\|\det\|\partial\varphi_\gamma{}^{\circ}/\partial v_\beta\|\neq 0$$

Сравнивая достаточное условие (2.9) с необходимым условием (2.4), можно видеть, что (2.9) заведомо сильнее (2.4).

**3. Оценка роста решений задачи Коши.** Пусть симметричная гиперболическая система (2.8) определена в четырехмерной открытой области $\Omega$ переменных $\mathbf{X}$, $t$. Граница $\partial\Omega$ состоит из трехмерной области $\omega(0)$, лежащей в плоскости $t=0$, и из расположенной при $t>0$ кусочно-гладкой поверхности $\Gamma(\mathbf{X},\ t)=0$. Будем считать, что $\nabla\Gamma\neq 0$, внутри области $\Gamma<0$, а вне ее $\Gamma>0$. Предположим также, что

$$v_\gamma(\mathbf{X},\ t),\ L_{\alpha\beta}{}^{\circ}(v_\gamma(X,\ t)) \tag{3.1}$$
$$L_{\alpha\beta}{}^{m}(v_\gamma(\mathbf{X},\ t)),\ f_\alpha(v_\gamma(\mathbf{X},\ t))\in C_1(\bar\Omega)$$

Пусть в любой точке $(\mathbf{X},\ t)\in\Gamma$ нормаль к поверхности $\Gamma=0$ лежит внутри конуса нормалей к характеристической поверхности, соответствующей максимальному по модулю $c=c(v\ (\mathbf{X},\ t),\ \boldsymbol{\nu})$, $\boldsymbol{\nu}=\nabla\Gamma/|\nabla\Gamma|$, т. е. имеет место неравенство Гамильтона — Якоби [8]

$$G(\mathbf{X},t)\geqslant|c(v_\gamma(\mathbf{X},t),\boldsymbol{\nu})|,\qquad G=\frac{1}{|\nabla\Gamma|}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}>0 \tag{3.2}$$

Тогда для любого другого решения $v_\gamma{}'(\mathbf{X},\ t)\in C_1(\bar\Omega)$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|_t{}^2\leqslant Ne^{tN}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|_0{}^2,\quad N=\text{const}>0 \tag{3.3}$$
$$\|\mathbf{v}\|_t{}^2=\int\limits_{\omega(t)} v_\alpha \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta} v_\beta\, d\omega$$

где $\omega(t)$ — сечение $t=\text{const}$ области $\Omega$.

Для доказательства неравенства (3.3) рассмотрим решения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ двух задач Коши для системы (2.8) с начальными данными

$$\mathbf{v}(\mathbf{X},0)=\mathbf{v}_0(\mathbf{X}),\quad \mathbf{v}'(\mathbf{X},0)=\mathbf{v}_0'(\mathbf{X}),\quad \mathbf{X}\in\omega(0)$$

Вычтем из (2.8), соответствующего $\mathbf{v}'$, уравнение (2.8) для решения $\mathbf{v}$ и обозначим $\mathbf{w}(\mathbf{X},t)=\mathbf{v}'(\mathbf{X},t)-\mathbf{v}(\mathbf{X},t)$. Умножив результат скалярно на $2\mathbf{w}$ и воспользовавшись симметрией матриц $\mathbf{L}^\circ$, $\mathbf{L}^m$, придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{wL^\circ w})+\frac{\partial}{\partial X^m}(\mathbf{wL}^m\mathbf{w})=\mathbf{wRw} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{R}=2\mathbf{R}_1+\partial\mathbf{L}^\circ(\mathbf{v}(\mathbf{X},t))/\partial t+\partial\mathbf{L}^m(\mathbf{v}(\mathbf{X},t))/\partial X^m.$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v}')-\mathbf{f}(\mathbf{v})+(\mathbf{L}^\circ(\mathbf{v}')-\mathbf{L}^\circ(\mathbf{v}))\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t}+(\mathbf{L}^m(\mathbf{v}')-\mathbf{L}^m(\mathbf{v}))\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial X^m}$$

Проинтегрировав (3.4) по области $\Omega_t$, представляющей собой часть области $\Omega$, заключенную между плоскостями $t=0$ и $t=\mathrm{const}>0$, и применив теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$\int\limits_{\omega(t)}\mathbf{wL^\circ w}\,d\omega-\int\limits_{\omega(0)}\mathbf{wL^\circ w}\,d\omega+\int\limits_{\Gamma(t)}\mathbf{w}(G\mathbf{L}^\circ+\nu_m\mathbf{L}^m)\mathbf{w}\,d\Gamma=\int\limits_0^t\int\limits_{\omega(t')}\mathbf{wRw}\,d\omega\,dt' \tag{3.5}$$

где $\Gamma(t)$ — часть границы $\Gamma$ между плоскостями $t=0$ и $t=\mathrm{const}$.

Утверждается, что

$$\mathbf{w}(G\mathbf{L}^\circ+\nu_m\mathbf{L}^m)\mathbf{w}>0 \tag{3.6}$$

Действительно, как уже указывалось в п. 2, существует матрица $\mathbf{S}=\mathbf{S}(\mathbf{v})$. $\det\mathbf{S}\neq0$, такая, что $\mathbf{L}^\circ=\mathbf{S\Lambda S}^T$, $\nu_m\mathbf{L}^m=\mathbf{SDS}^T$, $\mathbf{\Lambda}>0$, где $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{D}$ — диагональные матрицы. Причем из характеристического уравнения $\det\|-c\mathbf{L}^\circ+\nu_m\mathbf{L}^m\|=0$ следует, что $D_{\alpha\alpha}=c_\alpha\Lambda_{\alpha\alpha}$ (по $\alpha$ не суммировать). Но тогда, обозначая $\mathbf{w}^*=\mathbf{S}^T\mathbf{w}$, получим с учетом (3.2)

$$\mathbf{w}(G\mathbf{L}^\circ+\nu_m\mathbf{L}^m)\mathbf{w}=\mathbf{w}^*(G\mathbf{\Lambda}+\mathbf{D})\mathbf{w}^*=\sum_\alpha(G+c_\alpha)w_\alpha{}^*\Lambda_{\alpha\alpha}w_\alpha{}^*>0$$

Далее, предположения гладкости (3.1) и условие (2.9) положительной определенности $\mathbf{L}^\circ$ обеспечивают неравенства

$$m|\mathbf{w}|^2\leqslant\mathbf{wL^\circ w}\leqslant M|\mathbf{w}|^2,\quad m>0$$

$$|\mathbf{wRw}|\leqslant N_1|\mathbf{w}|^2\leqslant N\mathbf{wL^\circ w},\quad N=N_1/m$$

которые вместе с (3.6) позволяют получить из (3.5)

$$\|\mathbf{w}\|_t^2\leqslant\|\mathbf{w}\|_0^2+N\int\limits_0^t\|\mathbf{w}\|_\tau^2d\tau$$

Отсюда, используя лемму об интегральном неравенстве ([10], стр. 123), получаем оценку (3.3).

Из (3.3) непосредственно следует единственность в классе $C_1$ решения задачи Коши внутри любой области, подчиняющейся условию (3.2).

Требуя большую гладкость решения, коэффициентов и правой части уравнения (2.8) и используя продолженную систему, можно аналогично оценить рост первых и более высоких производных решения.

**4. Транспортное уравнение.** Рассмотрим уравнения изменения во времени амплитуды слабых разрывов, распространяющихся по движущимся ($c\neq0$) характеристическим поверхностям. Для его вывода продифференцируем по времени при $\mathbf{X}=\mathrm{const}$ симметричную систему (2.8). Обозначая

$$q_\beta=\frac{\partial v_\beta}{\partial t},\qquad p_\beta{}^m=\frac{\partial v_\beta}{\partial X^m},\qquad \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma}$$

$$L^m_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial L^m_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma},\qquad f_{\alpha\beta}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\beta}$$

и пользуясь тем, что $\partial^2 v_\beta/\partial X^i\partial t = \partial^2 v_\beta/\partial t\partial X^i$ для $v_\beta \in C_2$, что и будем предполагать вне поверхности разрыва, получим

$$(4.1)\qquad \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial t} + \overset{m}{L}_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial X^m} = f_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\beta q_\gamma - \overset{m}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma p_\beta{}^m$$

На сингулярной поверхности $\psi^{(\lambda)}(X, t) = 0$, соответствующей собственному числу $c^{(\lambda)}$, из (4.1) следует уравнение для скачков

$$(4.2)\qquad \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial t}\right] + \overset{m}{L}_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial X^m}\right] = f_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}[q_\beta q_\gamma] - \overset{m}{L}_{\alpha\beta\gamma}[q_\gamma p_\beta{}^m]$$

Воспользуемся условиями совместности [9] на поверхности $\psi^{(\lambda)} = 0$ слабого разрыва

$$\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial t}\right] = -c^{(\lambda)}\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial \nu}\right] + \frac{\delta[q_\beta]}{\delta t^{(\lambda)}}$$

$$\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial X^i}\right] = \left[\frac{\partial q_\beta}{\partial \nu}\right]\nu_i + g^{AB}\frac{\partial[q_\beta]}{\partial y^A_{(\lambda)}}\frac{\partial X^i}{\partial y^B_{(\lambda)}}$$

где $g^{AB}$ — метрический тензор криволинейной системы координат $y^A_{(\lambda)}$ $(A = 1,2)$, введенной на поверхности $\psi^{(\lambda)} = 0$ таким образом, что $\partial X/\partial t\,|_{y^A_{(\lambda)}} = c^{(\lambda)}\nu$, а величина $\delta q_\beta/\delta t^{(\lambda)} \equiv \partial q_\beta/\partial t\,|_{y^A_{(\lambda)}}$ — производная вдоль бихарактеристики. С учетом соотношений

$$(4.3)\qquad [q_\gamma q_\beta] = q_\beta^-[q_\gamma] + q_\gamma^-[q_\beta] + [q_\gamma][q_\beta]$$

$$[p_\beta{}^m] = -\frac{\nu_m}{c^{(\lambda)}}[q_\beta]$$

где знаком минус помечены величины непосредственно перед фронтом волны, уравнение (4.2) приводим к виду

$$(4.4)\qquad (-c^{(\lambda)}\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta} + \nu_m\overset{m}{L}_{\alpha\beta})\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial \nu}\right] + \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}\frac{\delta[q_\beta]}{\delta t^{(\lambda)}} +$$

$$+ g^{AB}\overset{m}{L}_{\alpha\beta}\frac{\partial X^m}{\partial y^B_{(\lambda)}}\frac{\partial[q_\beta]}{\partial y^A_{(\lambda)}} = a_{\alpha\beta}[q_\beta] - b_{\alpha\beta\gamma}[q_\beta][q_\gamma]$$

$$a_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - 2\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma^- + \frac{\nu_m}{c^{(\lambda)}}\overset{m}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma^- - \overset{m}{L}_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma^{m-}$$

$$b_{\alpha\beta\gamma} = \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{\nu_m}{c^{(\lambda)}}\overset{m}{L}_{\alpha\beta\gamma}$$

Уравнение (4.4) содержит скачки как первых, так и вторых производных вектора решения системы (2.8). Чтобы избавиться от величин $[\partial q_\beta/\partial\nu]$, умножим (4.4) слева на $\omega_{\lambda\alpha}$, где $\omega_{\lambda\alpha}$ — нуль-векторы симметричной матрицы $(-c^{(\lambda)}L_{\alpha\beta}{}^\circ + \nu_m L_{\alpha\beta}{}^m)$, соответствующие скорости $c^{(\lambda)}$ распространения характеристической поверхности $\psi^{(\lambda)} = 0$. В результате получим (здесь и далее по $\lambda$ не суммировать)

$$(4.5)\qquad \omega_{\lambda\alpha}\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}\frac{\delta[q_\beta]}{\delta t^{(\lambda)}} + g^{AB}\omega_{\lambda\alpha}\overset{m}{L}_{\alpha\beta}\frac{\partial X^m}{\partial y^B_{(\lambda)}}\frac{\partial[q_\beta]}{\partial y^A_{(\lambda)}} = \omega_{\lambda\alpha}a_{\alpha\beta}[q_\beta] -$$

$$-\omega_{\lambda\alpha}b_{\alpha\beta\gamma}[q_\beta][q_\gamma]$$

Пусть кратность собственного числа $c^{(\lambda)}$ равна $m$ и меньше, как следует из п. 2, числа $m^* = 33$ уравнений системы (2.8). Соотношения (4.5) представляют тогда $m$ уравнений для $m^*$ неизвестных $[q_\beta]$. Чтобы исключить часть неизвестных, воспользуемся уравнением

$$(4.6)\qquad (-c^{(\lambda)}L_{\alpha\beta}{}^\circ + \nu_m L_{\alpha\beta}{}^m)\;[q_\beta] = 0$$

которое следует из (2.8) и соотношения $[\partial v_\beta/\partial \nu] = -[q_\beta]/c^{(\lambda)}$. Для этого заметим, что матрица коэффициентов (4.6) симметрична, т.е. ее левые нуль-векторы являются одновременно и правыми нуль-векторами.

Далее из гиперболичности (2.8) следует, что матрица, строки которой — нуль-векторы $\omega_{\lambda\alpha}$, будет невырожденной. Следовательно, общее решение (4.6) можно представить в виде

(4.7) $$[q_\beta] = Q_\mu \omega_{\mu\beta};\ \mu = 1, 2, \ldots, m,\ \beta = 1, 2, \ldots, m^*$$

Подставляя (4.7) в (4.5), придем к системе $m$ уравнений относительно $m$ неизвестных

(4.8) $$A_{\lambda\mu}\frac{\delta Q_\mu}{\delta t^{(\lambda)}} + B^A_{\lambda\mu}\frac{\partial Q_\mu}{\partial y^A_{(\lambda)}} = C_{\lambda\mu}Q_\mu + D_{\lambda\mu\zeta}Q_\mu Q_\zeta$$

$$\lambda,\ \mu,\ \zeta = 1, 2, \ldots, m,\ A = 1, 2,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, 2, \ldots, m^*$$

Здесь

$$A_{\lambda\mu} = \omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta},\quad A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}$$

$$B^A_{\lambda\mu} = \omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}L^m_{\alpha\beta}g^{AB}\frac{\partial X^m}{\partial y^B_{(\lambda)}},\quad B^A_{\lambda\mu} = B^A_{\mu\lambda}$$

$$C_{\lambda\mu} = a_{\alpha\beta}\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta} - \omega_{\lambda\alpha}\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}\frac{\delta\omega_{\mu\beta}}{\delta t^{(\lambda)}} - \omega_{\lambda\alpha}L^m_{\alpha\beta}\frac{\partial X^m}{\partial y^B_{(\lambda)}}\frac{\partial\omega_{\mu\beta}}{\partial y^A_{(\lambda)}}g^{AB}$$

$$D_{\lambda\mu\zeta} = \omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\omega_{\zeta\gamma}b_{\alpha\beta\gamma}$$

Для вывода уравнения, которое описывает изменение во времени интенсивности слабого разрыва на материальной поверхности ($c \equiv 0$), следует рассмотреть продолженную систему, получающуюся из (2.8) действием оператора $\nu_i\partial/\partial X^i$. С учетом формул $\delta\nu_i/\delta t = \nu_i\partial\nu_i/\partial y^A = 0$ для $c = 0$, соотношений (4.3), условий совместности и представления (4.7) для скачка нормальных производных придем снова к системе (4.8) с матрицами коэффициентов правой части

$$C_{\lambda\mu} = \omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\{f_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma - L^m_{\alpha\beta\gamma}(p^{m-}_\gamma + \nu_i\nu_m p^{i-}_\gamma)\} -$$
$$- \omega_{\lambda\alpha}\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta}\frac{\delta\omega_{\mu\beta}}{\delta t} - \omega_{\lambda\alpha}L^m_{\alpha\beta}\frac{\partial X^m}{\partial y^B_{(\lambda)}}g^{AB}\frac{\partial\omega_{\mu\beta}}{\partial y^A_{(\lambda)}}$$

$$D_{\lambda\mu\zeta} = -\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\omega_{\zeta\gamma}L^m_{\alpha\beta\gamma}\nu_m$$

Из нелинейности правой части уравнения (4.8) следует, что интенсивность слабого разрыва решения уравнений динамики рассматриваемой среды может обратиться в бесконечность за конечный промежуток времени, т. е. слабый разрыв превратится в ударную волну или контактный разрыв.

**5. Сильные разрывы.** Сформулируем соотношения на сильных разрывах в нелинейно-упругой микрополярной среде. Пусть $\psi(X, t) = 0$ — уравнение поверхности сильного разрыва, $c = -\partial\psi/\partial t/|\nabla\psi|$, $\boldsymbol{\nu} = \nabla\psi/|\nabla\psi|$ — скорость движения и единичная нормаль соответственно. Тогда для дивергентной системы (1.10) на сильном разрыве имеют место соотношения [8]

$$-c\,[\varphi_\alpha{}^\circ] + \nu_m\,[\varphi_\alpha{}^m] = 0$$

Используя выражения для $\varphi_\alpha{}^\circ$, $\varphi_\alpha{}^m$, получим

(5.1) $$\rho_0 c\,[\mathbf{v}] + [\mathbf{T}]\,\boldsymbol{\nu} = 0,\quad c\,[\boldsymbol{\varphi}] = 0$$
$$\rho_0 c\,[\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] + [\mathbf{M}]\,\boldsymbol{\nu} = 0,\quad c\,[\mathbf{J}] = 0$$
$$c\,[\mathbf{F}] + [\mathbf{v}] \otimes \boldsymbol{\nu} = 0,\quad c\,[\boldsymbol{\Phi}] + [\boldsymbol{\omega}] \otimes \boldsymbol{\nu} = 0$$

Отсюда следует, что на ударной волне ($c \neq 0$)

$$(5.2) \qquad [\mathbf{F}] = \mathbf{h} \otimes \mathbf{v}, \quad [\mathbf{\Phi}] = \mathbf{k} \otimes \mathbf{v}, \quad \mathbf{h} = -c^{-1}[\mathbf{v}], \quad \mathbf{k} = -c^{-1}[\boldsymbol{\omega}],$$
$$[\boldsymbol{\varphi}] = 0, \quad [\mathbf{J}] = 0$$

и два первых уравнения (5.1) приобретают вид

$$(5.3) \qquad [\mathbf{T}]\,\mathbf{v} - \rho_0 c^2 \mathbf{h} = 0, \quad [\mathbf{M}]\,\mathbf{v} - \rho_0 c^2 \mathbf{k} = 0$$

Если известно состояние среды $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{\Phi}^\circ$, $\boldsymbol{\varphi}^\circ$, $\mathbf{J}^\circ$ перед фронтом ударной волны с заданной скоростью движения $c$, то для единственности решения за фронтом необходимо, чтобы скорость ударной волны отличалась от скорости характеристической поверхности. Действительно, рассматривая с учетом (5.2) соотношения (5.3) как систему уравнений относительно величин $\mathbf{h}$ и $\mathbf{k}$

$$f(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{T}(\mathbf{F}^\circ + \mathbf{h} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{\Phi}^\circ + \mathbf{k} \otimes \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}^\circ)\,\mathbf{v} -$$
$$- \mathbf{T}(\mathbf{F}^\circ, \mathbf{\Phi}^\circ, \boldsymbol{\varphi}^\circ)\,\mathbf{v} - \rho_0 c^2 \mathbf{h} = 0$$
$$g(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{M}(\mathbf{F}^\circ + \mathbf{h} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{\Phi}^\circ + \mathbf{k} \otimes \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}^\circ)\,\mathbf{v} -$$
$$- \mathbf{M}(\mathbf{F}^\circ, \mathbf{\Phi}^\circ, \boldsymbol{\varphi}^\circ)\,\mathbf{v} - \rho_0 c^2 \mathbf{k} = 0$$

получим

$$\frac{\partial(\mathbf{f}, \mathbf{g})}{\partial(\mathbf{h}, \mathbf{k})} = \det\left\| c^2 \delta_{\alpha\beta} - \nu_m \frac{\partial^2 W}{\partial p_m{}^\alpha \partial p_n{}^\beta} \nu_n \right\| \neq 0$$
$$p_m{}^\alpha = \{F_m{}^i, \Phi_m{}^i\}; \ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 6; \ m, n, i = 1, 2, 3$$

На контактном разрыве ($c \equiv 0$) из уравнений (5.1) следует непрерывность вектора напряжения и момента

$$[\mathbf{T}]\,\mathbf{v} = 0, \quad [\mathbf{M}]\,\mathbf{v} = 0$$

и непрерывность скоростей $[\mathbf{v}] = [\boldsymbol{\omega}] = 0$. Последние соотношения — следствие предположения об однозначности отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ и $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$. В более общем случае уравнения совместности (1.2) становятся неоднородными, с сингулярной правой частью, и векторы скоростей могут терпеть разрыв на контактной поверхности.

Автор признателен Н. Д. Вервейко за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Эринген А. К.* Теория микрополярной упругости.— В кн.: Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975, с. 646—751.
2. *Кондауров В. И.* О законах сохранения и симметризации уравнений нелинейной теории термоупругости.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 4, с. 819—823.
3. *Кондауров В. И.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями.— ПМТФ, 1982, № 4, с. 133—139.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
5. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
6. *Toupin R. A.* Theories of elasticity with couple-stress.— Arch. Ration. Mech. Anal., 1964, v. 17, No. 2., p. 85—112.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
10. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1983