Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 532.5 : 532.135

МОДЕЛИ ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СПЛОШНЫХ СРЕД С ВНУТРЕННИМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ МОМЕНТАМИ

Филиппов А. В., Черный Л. Т.

На основе общих методов построения моделей сплошных сред [1] получена замкнутая система уравнений для поляризирующейся сплошной среды с внутренними механическими моментами и рассмотрено распространение малых возмущений в такой среде.

1. Рассмотрим систему N материальных точек с массами m_ν и радиус-векторами $\mathbf{r}_\nu$, движение которой относительно инерциальной системы отсчета описывается следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\nu^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\nu} = \mathbf{f}_\nu \tag{1.1}$$

Здесь L — лагранжиан системы материальных точек, $\mathbf{f}_\nu$ — вектор внешней силы, действующей на ν-ю точку, t — время.

Пусть лагранжиан инвариантен относительно сдвига и поворота системы отсчета и сдвига начала отсчета времени. Примем также, что в соответствии с принципом относительности Галилея зависимость лагранжиана от скоростей $\mathbf{r}_\nu^{\cdot}$ имеет следующий вид (здесь и далее суммирование по ν от $\nu = 1$ до $\nu = N$):

$$L = \frac{1}{2}\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu^{\cdot 2} - U(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \tag{1.2}$$

(В этом случае при переходе к другой инерциальной системе отсчета лагранжиан изменяется на полную производную некоторой функции.) Тогда в замкнутой системе (т. е. при $\mathbf{f}_\nu = 0$), выполняются законы сохранения импульса $\mathbf{\Pi}$, момента импульса $\mathbf{K}$, энергии ε и массового момента системы $\mathbf{G}$.

При учете внешних сил на основании уравнений (1.1) имеем уравнения баланса

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \sum \mathbf{f}_\nu, \quad \frac{d\mathrm{E}}{dt} = \sum \mathbf{f}_\nu\cdot\mathbf{r}_\nu^{\cdot} \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{f}_\nu, \quad \frac{d\mathbf{G}}{dt} = -t\sum \mathbf{f}_\nu \\ \mathbf{\Pi} \equiv \sum m_\nu \mathbf{r}_\nu^{\cdot}, \quad \mathbf{K} \equiv \sum \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{r}_\nu^{\cdot} \\ \mathrm{E} \equiv \sum \frac{1}{2} m_\nu \mathbf{r}_\nu^{\cdot 2} + U, \quad G \equiv \sum (m_\nu \mathbf{r}_\nu - t m_\nu \mathbf{r}_\nu^{\cdot})\end{gathered} \tag{1.3}$$

Существование десяти уравнений баланса (1.3) обусловлено соответствующей указанной симметрией лагранжиана L относительно полной десятипараметрической группы преобразований Галилея.

Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор некоторой точки, связанной с системой. Выражения для величин $\mathbf{K}$, $\mathbf{G}$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\times\mathbf{\Pi} + M\mathbf{k}, \quad \mathbf{G} = M\mathbf{R} - t\mathbf{\Pi} + M\mathbf{l}, \quad M = \sum m_\nu \tag{1.4}$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{M}\sum (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{R})\times m_\nu \mathbf{r}_\nu^{\cdot}, \quad \mathbf{l} = \frac{1}{M}\sum m_\nu (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{R}) \tag{1.5}$$

Величины $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ можно рассматривать как внутренние механические характеристики системы. Если $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы, то из последнего выражения (1.5) следует, что $\mathbf{l} \equiv 0$. Отличную от нуля характеристику $\mathbf{l}$, вообще говоря, следует вводить в число определяющих параметров, если скорость механической системы определяется как скорость некоторой точки системы, не совпадающей с ее центром инерции. (Например, если скорости атомов, обладающих дипольными моментами, определяются как скорости их ядер.)

При преобразовании Галилея $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t'$, $t = t'$, $\mathbf{V} = \mathrm{const}$, величины $\mathbf{K}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + \mathbf{G}' \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{l}' \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}', \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}' \tag{1.6}$$

Далее уравнения баланса (1.3), полученные для системы материальных точек, будут обобщены на случай континуальной модели. При этом будут учтены представления (1.4), а формулы перехода (1.6) будут считаться верными для внутренних механических моментов сплошной среды.

2. Рассмотрим модель сплошной среды, обладающую внутренними механическими моментами: внутренним массовым моментом $\mathbf{l}$ и внутренним моментом количества движения $\mathbf{k}$, отнесенными к единице массы среды. Для построения модели постулируем интегральный закон сохранения массы среды, а также интегральные законы, являющиеся обобщениями уравнений баланса (1.3) для системы материальных точек. Первые три из них, т. е. уравнения импульса, энергии и момента количества движения имеют обычный вид [1], за исключением того, что импульс $\mathbf{p}$ единицы массы среды, обладающей внутренним массовым моментом $\mathbf{l}$, не равен скорости среды $\mathbf{v}$. Уравнение же, обобщающее последнее уравнение (1.3) для склошной среды, является новым и имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V d\mathbf{G} = -\int\limits_\Sigma t p^{\alpha\beta} n_\beta \mathbf{э}_\alpha \, d\Sigma + \int\limits_\Sigma Q^{\alpha\beta} n_\beta \mathbf{э}_\alpha \, d\Sigma - \int\limits_V t\mathbf{F}\, dV + \int\limits_V N\, dV$$

Здесь $d\mathbf{G}$ — массовый момент элемента среды с объемом dV; причем на основании второго соотношения (1.4) $d\mathbf{G} = (\mathbf{r} - t\mathbf{p} + \mathbf{l})\,\rho dV$; ρ — плотность массы среды, $p^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений; F — плотность внешних сил, N, $Q^{\alpha\beta}$ — величины, определяющие дополнительные притоки массового момента в объеме V и через его поверхность Σ; тензорные греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, а латинские индексы — значения 1, 2, 3, 4.

В области гладкого изменения характеристик среды указанные интегральные законы сводятся к дифференциальным уравнениям (2.1)—(2.4), причем при выводе уравнений (2.3), (2.4) для внутренних моментов $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ из соответствующих интегральных законов необходимо использовать уравнения (2.1)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \quad \rho\frac{dp^\alpha}{dt} = \nabla_\beta p^{\alpha\beta} + F^\alpha \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{de}{dt} = \nabla_\beta(p^{\alpha\beta}v_\alpha) - \nabla_\beta q^\beta + F_\alpha v^\alpha + F_4 \tag{2.2}$$

$$\rho\frac{dk^\alpha}{dt} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}p_{\alpha\beta} + \nabla_\beta q^{\alpha\beta} + \rho\,[p \times v]^\alpha + L^\alpha \tag{2.3}$$

$$\rho\frac{dl^\alpha}{dt} = \nabla_\beta Q^{\alpha\beta} + \rho\,(p^\alpha - v^\alpha) + N^\alpha \tag{2.4}$$

Здесь e — полная энергия единицы массы среды, F_4, L^α, q^α, $q^{\alpha\beta}$ — величины, определяющие дополнительные притоки энергии и момента количества движения среды соответственно в объеме V и через его поверхность Σ. При $l^\alpha \equiv Q^{\alpha\beta} \equiv N^\alpha \equiv 0$ уравнение (2.4) сводится к соотношению $\mathbf{p} = \mathbf{v}$, которое обычно используется в механике сплошной среды.

В частности, при помощи величин F^α, F_4, L^α, N^α можно описывать воздействие на сплошную среду электромагнитного поля, которое подчиняется уравнениям Максвелла

$$\text{(2.5)}\qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi q, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Здесь q, $\mathbf{j}$ — плотности электрического заряда и тока, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ — напряженность и индукция электрического поля, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ — напряженность и индукция магнитного поля, c — скорость света в вакууме.

Для задания величин F^α, F_4, L^α, N^α воспользуемся следующим рассуждением.

При отсутствии внешних воздействий уравнениям (2.1)—(2.4), записанным для системы, в которую наряду со сплошной средой включается также и электромагнитное поле, в релятивистской механике соответствуют два тензорных уравнения

$$\text{(2.6)}\qquad \nabla_k P^{ik} = 0, \quad \rho\frac{dK^{ij}}{d\tau} = P^{ij} - P^{ji} + \nabla_k q^{ijk}$$

Здесь P^{ik} — компоненты четырехмерного тензора энергии — импульса системы, $d\tau$ — дифференциал собственного времени частицы, K^{ij} — компоненты четырехмерного тензора внутреннего механического момента среды, причем в собственной системе отсчета $K^{*\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}k_\gamma{}^*$, $K^{*\alpha 4} = cl^{*\alpha}$. Выражение для компонент P^{ij} всегда можно представить в виде [2]

$$\text{(2.7)}\qquad P^{ij} = T^{ij} + S^{ij}_{(M)}, \quad S^{ij}_{(M)} = \frac{1}{16\pi}F_{pq}H^{pq}g^{ij} - \frac{1}{4\pi}F^{i}_{\cdot p}H^{jp}$$

где T^{ij} — компоненты четырехмерного тензора энергии импульса среды, $S_{(M)}{}^{ij}$ — компоненты четырехмерного тензора Минковского, F_{ij} и H_{ij} — компоненты четырехмерных тензоров электромагнитного поля. Учитывая первое равенство (2.7), запишем уравнение (2.6) в виде

$$\nabla_k T^{ik} = -\nabla_k S^{ik}_{(M)}; \quad \rho\frac{dK^{ij}}{d\tau} = T^{ij} - T^{ji} + S^{ij}_{(M)} - S^{ji}_{(M)} + \nabla_k q^{ijk}$$

Рассматривая затем электромагнитное поле как источник внешних воздействий и учитывая второе равенство (2.7) и уравнения Максвелла (2.5), получим

$$\text{(2.8)}\qquad F^\alpha = -\nabla_k S^{\alpha k}_{(M)} = qE^\alpha + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}^\alpha + \frac{1}{2}(\mathbf{P}\nabla^\alpha\mathbf{E} - \mathbf{E}\nabla^\alpha\mathbf{P} + \mathbf{M}\nabla^\alpha\mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla^\alpha\mathbf{M})$$

$$F_4 = -c\nabla_k S^{4k}_{(M)} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{M})$$

$$L_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S^{\beta\gamma}_{(M)} = \mathbf{M}\times\mathbf{B}_\alpha + \mathbf{P}\times\mathbf{E}_\alpha$$

$$N^\alpha = \frac{1}{c}(S^{\alpha 4}_{(M)} - S^{4\alpha}_{(M)}) = \frac{1}{c}\mathbf{P}\times\mathbf{B}^\alpha + \frac{1}{c}\mathbf{E}\times\mathbf{M}^\alpha$$

Выражения (2.8) выписаны в глобальном декартовом базисе пространства Минковского с метрикой $\|g_{ij}\| = \operatorname{diag}(-1, -1, -1, 1)$; через ∇_k и ∇^α обозначены соответственно четырехмерные и трехмерные ковариантные производные.

3. Далее ограничимся случаем непроводящей, незаряженной среды. Пусть также в собственной системе отсчета отсутствует намагниченность. Тогда из общих формул преобразования электромагнитных величин при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой [1] следует, что с точностью до членов порядка v^2/c^2

$$\mathbf{M} = c^{-1} \cdot \mathbf{P} \times \mathbf{v}, \ \mathbf{P} = \mathbf{P}^* \tag{3.1}$$

Звездочкой отмечаются величины в собственной системе отсчета. Для внутренних моментов на основании соотношений (1.6) имеем

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^* + \mathbf{l}^* \times \mathbf{v}, \ \mathbf{l} = \mathbf{l}^* \tag{3.2}$$

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда тензоры моментных напряжений равны нулю: $q^{\alpha\beta} = Q^{\alpha\beta} = 0$. Из уравнений (2.1)—(2.4) и соотношений (3.1), (3.2) вытекает уравнение притока тепла (в дальнейшем при преобразованиях члены порядка v^2/c^2 опускаются)

$$\rho \frac{dU}{dt} = \left(p^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P}^* g^{\alpha\beta}\right) e_{\alpha\beta} - \nabla_\beta q^\beta + \tag{3.3}$$

$$+ \rho \mathbf{E}^* \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\pi}^*}{dt} + \boldsymbol{\pi}^* \times \boldsymbol{\omega}\right) + \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} - \rho \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}\right)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta v_\alpha + \nabla_\alpha v_\beta), \ \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

$$U = e - \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\pi}^*, \ \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \tag{3.4}$$

Поскольку микроскопический массовый момент системы вводится аналогично поляризационному моменту, предположим, что имеет место связь

$$\mathbf{l}^* = \boldsymbol{\pi}^*/\gamma, \ \gamma = \text{const}$$

и ограничимся случаем изотропной среды, когда

$$U = U_0 - \frac{\partial U_0}{\partial\, d\pi^\alpha/dt} \frac{d\pi^\alpha}{dt}, \ U_0 = U_0\left(\rho, s, \pi^\alpha, \frac{d\pi^\alpha}{dt}, g_{\alpha\beta}\right)$$

Определим величины T и p следующим образом:

$$T = \partial U_0 / \partial S, \ p = \rho^2 \partial U_0 / \partial \rho$$

Тогда из уравнения притока тепла (3.3) при сделанных предположениях получим уравнение баланса энтропии

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \left[p^{(\alpha\beta)} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P}^* - p\right) g^{\alpha\beta}\right] e_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha q^\alpha + \tag{3.5}$$

$$+ \rho \mathbf{w} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}\right) + \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d}{dt}\left(\mathbf{k}^* - \frac{\partial U_0}{\partial\, d\boldsymbol{\pi}/dt} \times \boldsymbol{\pi}\right)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}^* - \frac{1}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{\pi}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U_0}{\partial\, d\boldsymbol{\pi}/dt}$$

При получении уравнения (3.5) использовалось тождество

$$\frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{\pi}} \times \boldsymbol{\pi} + \frac{\partial U_0}{\partial\, d\boldsymbol{\pi}/dt} \times \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} \equiv 0$$

которое является следствием того, что скалярная функция U_0 может зависеть от своих векторных аргументов π, $d\pi/dt$ только через свертки $\pi \cdot d\pi/dt$, π^2, $(d\pi/dt)^2$.

Если наличие внутреннего момента количества движения в собственной системе связано только с зависимостью функции U_0 от производных $d\pi^\alpha/dt$, т. е.

$$k^* = \frac{\partial U_0}{\partial\, d\boldsymbol{\pi}/dt} \times \boldsymbol{\pi}$$

то последнее слагаемое в правой части уравнения (3.5) обратится в нуль. Представляя приращение энтропии в виде [1] $ds = d_e s + d_i s$ и задавая внешний приток

$$\rho T \frac{d_e s}{dt} = -T \nabla_\beta \left(\frac{1}{T} q^\beta\right)$$

получим выражение для диссипативного функционала

$$\sigma \equiv \rho T \frac{d_i s}{dt} = \left[p^{(\alpha\beta)} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P}^* - p\right) g^{\alpha\beta}\right] e_{\alpha\beta} + T q^\beta \nabla_\beta \frac{1}{T} + \rho \mathbf{w} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}\right) \tag{3.6}$$

Предположим, что σ — квадратичная функция термодинамических потоков: $e_{\alpha\beta}$, $T\nabla_\beta (1/T)$, $\mathbf{w}$ и соответствующие силы определены соотношениями

$$p^{(\alpha\beta)} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P}^* - p\right) g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial e_{\alpha\beta}} \tag{3.7}$$
$$\rho\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial \mathbf{w}}, \quad q^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial (T\nabla_\beta (1/T))}$$

При $\gamma = e/m$ вектор $\mathbf{E}^* - \mathbf{a}/\gamma$ имеет смысл эффективного электрического поля, действующего на электроны поляризации. Воздействие сил инерции на электроны проводимости известно под названием эффекта Стюарта — Толмена и также может быть описано введением вектора эффективного электрического поля $\mathbf{E}^* - \mathbf{a}/\gamma$ [3].

Полная система уравнений модели состоит из уравнений Максвелла (2.5), неразрывности, баланса импульса (2.1), баланса внутренних моментов (2.3), (2.4), баланса энтропии (3.5) и кинетических соотношений (3.7). Заметим, что, используя уравнения (2.4), уравнения баланса импульса (2.1) и моментов (2.3) можно преобразовать к следующему виду:

$$\rho\frac{dv^\alpha}{dt} = \nabla_\beta p^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\nabla^\alpha(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{M}) + \frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{B}^\alpha + \mathbf{P}\cdot\nabla^\alpha\mathbf{E} + \mathbf{M}\cdot\nabla^\alpha\mathbf{B} - \rho\frac{d^2 l^\alpha}{dt^2} \tag{3.8}$$
$$p_{\gamma\beta} - p_{\beta\gamma} = \rho(\pi_\gamma w_\beta - \pi_\beta w_\gamma)$$

4. Рассмотрим задачу о распространении слабых возмущений в незаряженной и непроводящей среде, обладающей внутренним массовым моментом. Движение среды в этом случае описывается системой уравнений, состоящей из уравнений Максвелла (2.5) с $q = 0$, $\mathbf{j} = 0$, уравнения неразрывности и следующих уравнений:

$$\rho\frac{dv^\alpha}{dt} = -\nabla^\alpha p + \mathbf{P}\cdot\nabla^\alpha\mathbf{E} + \mathbf{M}\cdot\nabla^\alpha\mathbf{B} + \frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{B}^\alpha - \frac{\rho}{\gamma}\frac{d^2\pi^\alpha}{dt^2} + \frac{1}{2}\nabla_\beta\left\{\rho\tau\left[\pi^\alpha\left(\frac{d\pi^\beta}{dt} + \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\omega}^\beta\right) - \pi^\beta\left(\frac{d\pi^\alpha}{dt} + \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\omega}^\alpha\right)\right]\right\}, \quad \rho\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\omega}\right) = \frac{\mathbf{w}}{\tau} \tag{4.1}$$
$$\rho T\frac{ds}{dt} = \rho^2\tau\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} + \boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\omega}\right)^2, \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \frac{1}{c}\mathbf{B}\times\mathbf{v}$$
$$\mathbf{M} = \frac{1}{c}\mathbf{P}\times\mathbf{v}, \quad p = \rho^2\frac{\partial U_0}{\partial\rho}, \quad T = \frac{\partial U_0}{\partial s}$$

В уравнениях (4.1) τ — некоторая скалярная функция параметров состояния, имеющая размерность времени. Из необратимых процессов в среде учитывается только релаксация поляризации.

Предположим для простоты, что функция U_0 задается в виде

$$(4.2)\qquad U_0 = U_1(\rho, s) + \frac{1}{2\varkappa}\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{\eta}{2}\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}$$

($\varkappa$ и η — некоторые функции плотности и энтропии).

Будем считать, что слабое возмущение распространяется по однородной покоящейся среде, причем электромагнитное поле в невозмущенном состоянии отсутствует.

Линеаризуя уравнения относительно невозмущенного состояния, получаем

$$(4.3)\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\quad \rho_0\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = -a_0^2\nabla^\alpha\rho' - b_0\nabla^\alpha s' - \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{\partial^2\pi^\alpha}{\partial t^2}$$

$$E^\alpha = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\varkappa}\pi^\alpha - \eta\frac{\partial^2\pi^\alpha}{\partial t^2} + \rho_0\tau\frac{\partial\pi^\alpha}{\partial t},\quad \rho_0\frac{\partial s'}{\partial t} = 0$$

$$a_0^2 = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U_0}{\partial\rho}\right)_{|\rho_0, s_0},\quad b_0 = \frac{\partial}{\partial s}\left(\rho^2\frac{\partial U_0}{\partial\rho}\right)_{|\rho_0, s_0}$$

Через ρ' и s' обозначены возмущения плотности и энтропии среды: $\rho' = \rho - \rho_0$; $s' = s - s_0$ (ρ_0 и s_0 — значения плотности и энтропии в невозмущенном состоянии).

Будем искать решение уравнений (4.3) в виде

$$(4.4)\qquad A(x^\alpha, t) = A_1 \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right]$$

(где A — любая из функций, фигурирующая в уравнениях (4.3)). Обозначая для удобства амплитуды возмущений величин теми же буквами, что и сами возмущения, из уравнений (4.3) получаем алгебраическую систему уравнений

$$(\mathbf{E} + 4\pi\rho_0\boldsymbol{\pi})\cdot\mathbf{k} = 0,\quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{k} = 0$$

$$(4.5)\qquad \mathbf{E} + 4\pi\rho_0\boldsymbol{\pi} = -\frac{c}{\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{H},\quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}$$

$$\omega\rho' = \rho_0\mathbf{k}\cdot\mathbf{v},\quad \rho_0\omega\mathbf{v} = a_0^2\rho'\mathbf{k} + b_0 s'\mathbf{k} + \frac{\rho_0}{\gamma}\omega^2 i\boldsymbol{\pi}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\gamma}\omega\mathbf{v} + \frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{\pi} + \eta\omega^2\boldsymbol{\pi} - i\rho_0\tau\omega\boldsymbol{\pi},\quad \rho_0\omega s' = 0$$

Разрешая уравнения (4.5) относительно компонент вектора $\boldsymbol{\pi}$ (в случае $\omega \neq 0$), приходим к следующему соотношению:

$$(4.6)\qquad \left\{\frac{4\pi\rho_0 c^2}{\omega^2}\left[1 - \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\right]^{-1} - \frac{a_0^2}{\gamma^2}\left[1 - \left(\frac{a_0 k}{\omega}\right)^2\right]^{-1}\right\}(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} =$$

$$= \left\{4\pi\rho_0\left[1 - \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\right]^{-1} + \Omega\right\}\boldsymbol{\pi}$$

$$\Omega = \frac{1}{\varkappa} + \left(\frac{1}{\gamma^2} + \eta\right)\omega^2 - i\rho_0\tau\omega$$

Равенство (4.6) говорит о том, что в среде может распространяться два типа волн.

Поперечные волны: $\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{k} = 0$. Из уравнений (4.5) следует, что в этом случае векторы амплитуд возмущений $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\pi}$ ортогональны волновому вектору $\mathbf{k}$; возмущение плотности равно нулю: $\rho' = 0$. Из равенства (4.6) находим соотношение между частотой волны и волновым числом

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2\left[1 + \frac{4\pi\rho_0}{\Omega}\right]^{-1}$$

При малых частотах ($\omega \to 0$) это выражение переходит в известное дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в диэлектрике [3]

$$\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon},\quad \varepsilon = 1 + 4\pi\rho_0\varkappa$$

В пределе $\omega \to \infty$ фазовая скорость распространения поперечных волн совпадает со скоростью света в пустоте: $\omega/k = c$.

Продольные волны: $\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{k}$. В продольной волне векторы амплитуд возмущений $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{v}$ параллельны волновому вектору $\mathbf{k}$, возмущение магнитного поля равно нулю: $\mathbf{H} = 0$. Из соотношения (4.6) в этом случае можно получить

$$\frac{\omega^2}{k^2} = a_0^2 \left[1 - \frac{\omega^2}{\gamma^2 (\Omega + 4\pi\rho_0)}\right]$$

При больших частотах ($\omega \to \infty$) это соотношение принимает вид

$$\omega^2/k^2 = a_0^2\eta\gamma^2/(\eta\gamma^2 + 1)$$

В пределе при $\omega \to 0$ имеем $\omega/k = a_0$. Таким образом, величина a_0 имеет смысл «равновесной» фазовой скорости продольных звуковых волн.

В пренебрежении внутренним массовым моментом (предел $\gamma \to \infty$) из уравнений (4.3) следует, что в поперечных волнах возмущаются только электромагнитные величины ($\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$), а в продольных — только механические ($\mathbf{v}$, ρ).

Кроме рассмотренных двух типов слабых возмущений существует решение системы уравнений (4.5), соответствующее случаю $\omega = 0$. Эта волна не распространяется в пространстве и представляет собой произвольное малое отклонение в распределении энтропии от ее значения в равновесном состоянии. Из уравнений (4.5) следует, что в энтропийной волне $\boldsymbol{\pi} = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ и отличны от нуля только возмущения плотности и энтропии.

Авторы благодарны Л. И. Седову и В. В. Гогосову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. 3-е изд. М.: Наука, 1976, т. 1, 535 с.; т. 2. 573 с.
2. *Седов Л. И.* О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 4—17.
3. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1983