Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 538.4

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ГИДРОМЕХАНИКЕ ИЗОТРОПНО НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Тарапов И. Е.

На основании идей работы [1] формулируется вариационный принцип для описания движения изотропно намагничивающейся идеальной среды. Получены представления для поля скорости, магнитного поля, энтальпии через лагранжевы множители. Получены новые интегралы уравнения движения.

Система уравнений, описывающих нерелятивистское движение намагничивающихся идеальных сред, может быть записана в виде [2] (M — намагниченность среды)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0, \qquad \frac{dS'}{dt}=\frac{d}{dt}(S+S^e)=0 \\
&\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \qquad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{B}]=0 \\
&\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla p-\nabla\psi^{(\rho)}+M\nabla H+\frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H},\mathbf{B}] \\
&p=p(\rho,S), \qquad \mathbf{M}=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}-\mathbf{H})=\frac{1}{4\pi}(\mu(\rho,T,H)-1)\,\mathbf{H} \\
&\psi^{(\rho)}=-\int_0^H\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{M}{\rho}\right)dH=-\frac{H^2}{8\pi}+\frac{1}{4\pi}\int_0^H(\mu-\rho\mu_\rho)\,H\,dH \\
&S^e=\frac{1}{4\pi\rho}\int_0^H\mu_T H\,dH, \qquad \mu_\rho\equiv\frac{\partial\mu}{\partial\rho}, \qquad \mu_T\equiv\frac{\partial\mu}{\partial T}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Используя соотношение $TdS=dw-dp/\rho$, уравнение движения из системы (1) перепишем в виде (w — энтальпия среды)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]=-\nabla\left(\frac{v^2}{2}+w+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}\right)+ \\
&+T\nabla S'+\frac{1}{4\pi\rho}\left[\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu},\mathbf{B}\right] \\
&w=U+\frac{p}{\rho}, \quad \psi^{(T)}=-\int_0^H T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{M}{T}\right)dH
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Покажем, что уравнение движения среды можно получить из вариационного принципа, если остальные уравнения системы (1) рассматривать как связи, накладываемые на независимые вариации $\delta\rho$, δS, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{B}$. Вариационный принцип в такой постановке невозможно сформулировать без введения дополнительных связей, что доказывается подобно тому, как это сделано в [3] для случая нейтральной среды. В рассматриваемом случае вариационный принцип может быть записан при помощи лагранжевых множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_4, \lambda_5$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\delta\int_R\left\{\frac{\rho v^2}{2}-\rho U'+\lambda_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho S')+\operatorname{div}(\rho S'\mathbf{v})\right)+\right. \\
&+\lambda_3\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\alpha)+\operatorname{div}(\rho\alpha\mathbf{v})\right)+\lambda_4\operatorname{div}\mathbf{B}+
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$+\lambda_5\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{B}]\right)\Big\}\,dR=0$$

$$U'=U(\rho,S)+U^e,\qquad U^e=\frac{BH}{4\pi\rho}-\frac{H^2}{8\pi\rho}-\frac{\psi^{(T)}}{\rho}$$

Здесь $\alpha=\alpha(\mathbf{r},t)$ — произвольная лагранжева координата системы, так что $d\alpha/dt=0$, U' — полная внутренняя энергия, U^e — внутренняя энергия среды, определяемая магнитным полем.

В вариационном принципе (3) предполагается, что независимые вариации $\delta\rho$, δS, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{B}$ исчезают на границе четырехмерного объема R ($dR\equiv\equiv dx^3\,dt$).

Как показывают вычисления, в (3) в качестве лагранжевых множителей λ_1, λ_4, λ_5 могут быть взяты произвольные функции точки и времени, а на λ_2 и λ_3 накладываются определенные ограничения. Эти ограничения обеспечивают удовлетворение уравнения движения (2) выражениями для $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ и термодинамических величин (или для p в случае несжимаемой среды) через лагранжевы множители, причем эти выражения непосредственно следуют из вариационного принципа (3).

Действительно, варьируя (3) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta\lambda_1,\ldots,\delta\lambda_4$, $\delta\lambda_5$, получаем (в силу $d\alpha/dt=0$) первые четыре уравнения системы (1). Приравнивая теперь коэффициенты при вариациях $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{B}$, δS и $\delta\rho$ нулю, получаем последовательно

(4) $$\mathbf{v}=\nabla\lambda_1+S'\nabla\lambda_2+\alpha\nabla\lambda_3+\frac{1}{\rho}[\mathbf{B},\operatorname{rot}\lambda_5]$$

(5) $$\frac{\mathbf{H}}{4\pi}=-\frac{\partial\lambda_5}{\partial t}+[\mathbf{v},\operatorname{rot}\lambda_5]-\nabla\lambda_4$$

(6) $$(1+S_S{}^e)\left(T+\frac{d\lambda_2}{dt}\right)=0$$

(7) $$w=\frac{v^2}{2}-\frac{d\lambda_1}{dt}-S'\frac{d\lambda_2}{dt}-\alpha\frac{d\lambda_3}{dt}-\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}$$

Последнее выражение может быть записано в силу (4) в виде

(8) $$w=-\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}-S'\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}-\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}-\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}-\frac{v^2}{2}+\\+\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot[\mathbf{B},\operatorname{rot}\lambda_5]$$

Поскольку, вообще говоря

$$S_S{}^e=\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{4\pi\rho}\int_0^H\mu_T H\,dH\right)\neq-1$$

то из (6) следует, что на λ_2 нужно наложить ограничение

(9) $$d\lambda_2/dt=-T$$

Теперь можно показать, что если дополнительно считать

(10) $$d\lambda_3/dt=0$$

то уравнение движения (2) удовлетворяется, если $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$ и w имеют представления (4), (5) и (7).

Действительно, уравнение (2) при помощи (4) можно записать в виде

(11) $$\frac{\partial\mathbf{v}_H}{\partial t}-[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]=\\=-\nabla\left(\frac{v^2}{2}+w+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+S'\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\right)+\\+\frac{1}{4\pi\rho}\left[\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu},\mathbf{B}\right]+\left(T+\frac{d\lambda_2}{dt}\right)\nabla S'-\frac{dS'}{dt}\nabla\lambda_2+\frac{d\lambda_3}{dt}\nabla\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\nabla\lambda_3$$

$$\left(\mathbf{v}_H \equiv \frac{1}{\rho}[\mathbf{B}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}_5]\right)$$

В силу равенств $dS'/dt = 0$, $d\alpha/dt = 0$, уравнений (9), (10) и (7) отсюда имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}_H] - \frac{1}{4\pi\rho}\left[\operatorname{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu}, \mathbf{B}\right] + \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_H) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{b}, \mathbf{a}] - [\mathbf{v}, \operatorname{rot}[\mathbf{b}, \mathbf{a}]] - \left[\operatorname{rot}\frac{\rho\mathbf{b}}{\mu}, \mathbf{b}\right] + \nabla(\mathbf{v}\cdot[\mathbf{b}, \mathbf{a}]) = 0 \tag{12}$$

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}_5 \equiv \mathbf{a}, \ \mathbf{B}/(4\pi\rho) \equiv \mathbf{b})$$

Из (5) получаем

$$\operatorname{rot}\frac{\rho\mathbf{b}}{\mu} = -\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{a}]$$

а в силу уравнения индукции и уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ имеем

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{b}] + \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{b}$$

Тогда уравнение (12) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}&[\mathbf{a}, \operatorname{rot}[\mathbf{b}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{b}, \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{v}, \operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \\ &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\operatorname{div}\mathbf{v} + [\mathbf{v}, \mathbf{a}]\operatorname{div}\mathbf{b} + \nabla([\mathbf{a}, \mathbf{b}]\cdot\mathbf{v})\end{aligned} \tag{13}$$

Используя известные формулы векторного анализа, можно показать, что выражение (13) является тождеством.

Таким образом, уравнение движения (2) удовлетворяется представлениями (4), (5) и (7) при любых λ_1, λ_4, λ_5 и λ_2, λ_3, удовлетворяющих (9) и (10). Отсюда следует эквивалентность вариационного принципа (3) системе уравнений движения (1) при сформулированных выше ограничениях, наложенных на независимые вариации $\delta\rho$, δS, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{B}$ и множители Лагранжа λ_2 и λ_3.

Имея в виду практическое использование вариационного принципа, его формулировке (3) можно придать другой вид. При этом лагранжиан получает интересную физическую интерпретацию.

Будем считать, что вариации лагранжевых множителей также исчезают на границе объема R. Тогда, интегрируя выражения в (3) по частям, можно получить лагранжиан в виде

$$\begin{aligned}L = \frac{\rho v^2}{2} - \rho U' - \rho\frac{d\lambda_1}{dt} - \rho S'\frac{d\lambda_2}{dt} - \rho\alpha\frac{d\lambda_3}{dt} - \\ - \mathbf{B}\cdot\nabla\lambda_4 - \mathbf{B}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_5}{\partial t} - [\mathbf{v}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5]\right)\end{aligned}$$

Учитывая (5), (7), (9) и выражение для $U' = U + U^e$, получаем

$$L = p + \frac{H^2}{8\pi} + \psi^{(\rho)} = p + p^e = p'$$

где p^e — часть давления, зависящая исключительно от магнитного поля.

Таким образом, вариационный принцип может быть записан в виде

$$\delta\int_R p'(w, S, H)\,dR = 0 \qquad (p' = p(w, S) + p^e) \tag{14}$$

где p' — полное давление в среде должно быть рассматриваемо как функция w, S и H, причем при варьировании необходимо использовать представления (7), (6) и (5) при ограничениях (9) и (10).

При $\mu = \mathrm{const}$ имеем $L = p + B^2/(8\pi)$, а в отсутствие поля лагранжиан равен просто давлению, что и было показано в [1] для случая обычной гидромеханики.

Форма (14) представляет собой простую физическую интерпретацию вариационного принципа. По-видимому, проще считать в качестве основных переменных ρ, S и H. Тогда, используя выражение (8), можно записать (14) в виде

$$(15)\qquad \delta\int\limits_R \Big\{\Big(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t} + S'\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\Big)\rho + \rho U(\rho, S) - $$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^H (\mu - \mu_T T) H\,dH + \frac{\rho v^2}{2} - \mu\mathbf{v}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5, \mathbf{H}]\Big\}\,dR = 0$$

$$\mathbf{v} = \nabla\lambda_1 + S'\nabla\lambda_2 + \alpha\nabla\lambda_3 + \frac{\mu}{\rho}[\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5, \mathbf{H}]$$

$$\mu = \mu(\rho, T(\rho, S), H), \qquad S' = S + \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^H \mu_T H\,dH$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = -T(\rho, S)$$

Эта форма предпочтительна для вычислений.

В случае несжимаемой жидкости ($d\rho/dt = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) в системе (1) должно быть исключено из рассмотрения уравнение состояния $p = p(\rho, S)$ и энтропия S, а энтальпия w заменена на p/ρ.

Таким образом, для несжимаемой жидкости вариационный принцип в форме (15) имеет следующую запись:

$$(16)\qquad \delta\int\limits_R \Big\{\rho\Big(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t} + S^e\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\Big) + \frac{\rho v^2}{2} + \mu\mathbf{v}\cdot[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5] - $$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^H (\mu - T\mu_T) H\,dH\Big\}\,dR = 0$$

$$\mathbf{v} = \nabla\lambda_1 + S^e\nabla\lambda_2 + \alpha\nabla\lambda_3 - \frac{\mu}{\rho}[\mathbf{H}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5], \qquad \mu = \mu(\rho, T, H)$$

$$S^e = \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^H \mu_T H\,dH, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\lambda_3}{dt} = 0, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = -T, \qquad \delta\rho = 0$$

При $\mu = 1$ из (15) следует вариационный принцип для магнитной гидродинамики ненамагничивающейся сжимаемой среды

$$\delta\int\limits_R \Big\{\rho\Big(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t} + S\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\Big) + \rho U(\rho, S) + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{H^2}{8\pi} - $$

$$- \mathbf{v}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5, \mathbf{H}]\Big\}\,dR = 0$$

и в случае несжимаемой жидкости ($\delta\rho = 0$)

$$\delta\int\limits_R \Big\{\rho\Big(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\Big) + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{H^2}{8\pi} - \mathbf{v}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_5, \mathbf{H}]\Big\}\,dR = 0.$$

При $H = 0$ из формулировок (3) и (16) получаются выражения работы [1], а при $\mu = 1$ получаем из (3) выражение, полученное в [4], где сделано дополнительное предположение $\alpha = 0$.

Отметим, следуя [5], что уравнения движения изотропно намагничивающейся идеальной среды могут быть записаны в форме, близкой к гамильтоновой форме уравнений движения системы материальных точек.

В силу показанного выше выражение (12) представляет собой тождество, поэтому уравнение движения (11) может быть записано в виде

$$(17)\qquad \nabla\left(\frac{v^2}{2}+w+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+S'\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_H\right)= \\ =\left(T+\frac{d\lambda_2}{dt}\right)\nabla S'+\frac{d\lambda_3}{dt}\nabla\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\nabla\lambda_3$$

Эта запись предполагает только представление

$$(18)\qquad \mathbf{v}=\nabla\lambda_1+S\nabla\lambda_2+\alpha\nabla\lambda_3+\mathbf{v}_H,\quad \mathbf{v}_H=\frac{1}{\rho}[\mathbf{B},\operatorname{rot}\lambda_5']$$

Предположим теперь, что $d\lambda_2/dt=-T$. Тогда, обозначая

$$h\equiv\frac{v^2}{2}+w+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+S'\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_H$$

из (17) получаем

$$h=h(t,\alpha,\lambda_3),\qquad \frac{\partial h}{\partial\alpha}=\frac{d\lambda_3}{dt},\qquad \frac{\partial h}{\partial\lambda_3}=-\frac{d\alpha}{dt}$$

Если $\mathbf{v}$ представить в виде (18), где $\lambda_3(\mathbf{r},t)$, $\alpha(\mathbf{r},t)$, $\lambda_2(\mathbf{r},t)$ таковы, что

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\lambda_3}{dt}=0,\qquad \frac{d\lambda_2}{dt}=-T$$

то из (17) следует интеграл уравнения движения

$$(19)\qquad h=f(t)$$

В случае обычной газовой динамики этот интеграл приобретает вид

$$(20)\qquad \frac{v^2}{2}+w+\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+S\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}=f(t)$$

а в случае магнитной гидродинамики ($\mu=1$) имеем

$$(21)\qquad \frac{v^2}{2}+w+\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+S\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot[\mathbf{H},\operatorname{rot}\lambda_5]=f(t)$$

Заметим, что интегралы (19)—(21) существуют и для вихревого течения ($\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$), причем ориентация поля $\mathbf{H}$ относительно линии тока произвольна. Существенно отыскание $\lambda_1,\ldots,\lambda_5$ в (4) и (5); очевидно, что вид этих потенциалов определен не единственным образом.

В случае безвихревого движения ($\mathbf{v}=\nabla\lambda_1$) из (20) получаем обычный интеграл Лагранжа. Наконец, отметим, что для стационарного движения вдоль линий тока существует обобщенный интеграл Бернули

$$\frac{v^2}{2}+w+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}-\frac{\mu}{\rho}\mathbf{v}\cdot[\mathbf{H},\operatorname{rot}\lambda_5]=\mathrm{const}$$

где постоянная зависит, вообще говоря, от линии тока, а ориентация поля $\mathbf{H}$ произвольна. Отсюда, в случае $\mathbf{v}\parallel\mathbf{H}$ последнее слагаемое слева выпадает, а для $\mathbf{v}\perp\mathbf{H}$ оно в силу (5) обращается в $BH/(4\pi\rho)$ в полном соответствии с результатом, известным в магнитной гидродинамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Seliger R. L., Whitham G. B.* Variational principles in continuum mechanics.— Proc. Roy. Soc., ser. A. 1968, v. 305, № 1480, p. 1—25.
2. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 17. Харьков: Изд-во ХГУ, 1973, с. 221—239.
3. *Schutz B. F., Sorkin R.* Variational aspects of relativistic field theories with application to perfect fluid.— Ann. phys., 1977, v. 107, № 1—2, p. 1—43.
4. *Половін Р. В., Ахієзер І. О.* Варіаційний принцип в магнітній гідродинаміці.— Укр. фіз. ж., 1959, т. 4, № 5, с. 677—678.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Харьков

Поступила в редакцию
27.VII.1982