Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 531.38

О ВИБРАЦИОННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

Розенблат Г. М.

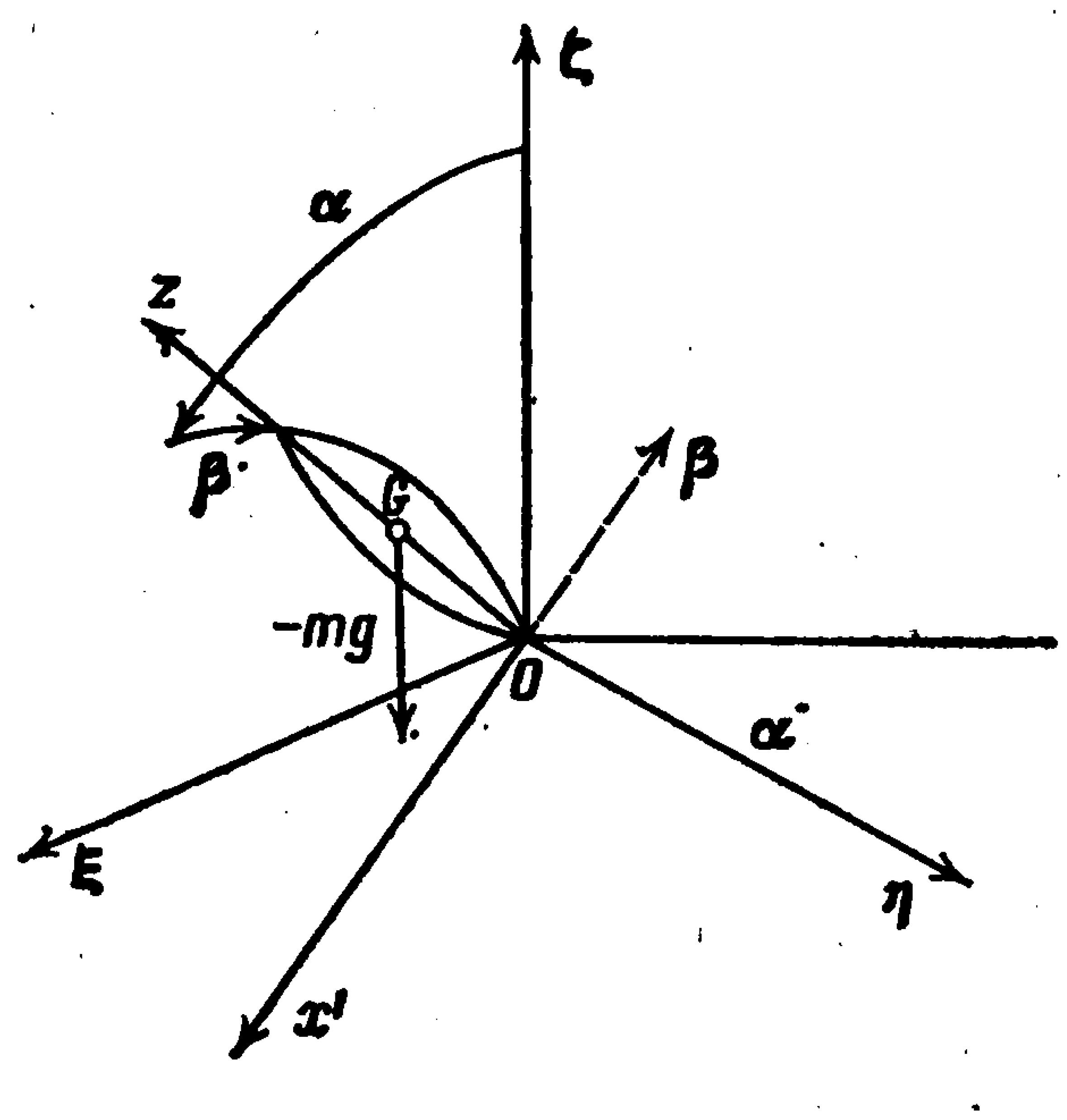
Рассматривается задача стабилизации волчка Лагранжа при помощи периодических вращений его ротора. Вращения осуществляются так, что угол поворота ротора вокруг собственной оси, в среднем, равен нулю. Получены достаточные условия стабилизируемости волчка и указаны управления, осуществляющие стабилизацию.

1. Постановка задачи. Рассматривается тяжелое твердое тело с неподвижной точкой в случае Лагранжа (фиг. 1). Пусть $O\xi\eta\zeta$ — система неподвижных осей с началом в неподвижной точке волчка, причем ось ζ направлена против силы тяжести. Линеаризованные уравнения движения волчка Лагранжа в малой окрестности вертикального положения равновесия можно записать в следующем виде [1]:

$$A\alpha^{\cdot\cdot} + C\varphi^{\cdot}\beta^{\cdot} = mgl\alpha, \quad A\beta^{\cdot\cdot} - C\varphi^{\cdot}\alpha^{\cdot} = mgl\beta \tag{1.1}$$

$$C\varphi^{\cdot\cdot} = M(t) \tag{1.2}$$

где α, β — долгота и широта вершины волчка на единичной сфере с центром в точке опоры O, для которой $\xi\zeta$ — плоскость экватора, а точка пересечения сферы с осью η — северный полюс, φ — угол поворота ротора относительно оси симметрии z, A — момент инерции ротора относительно оси, перпендикулярной z и проходящей через точку O, C — момент инерции ротора относительно оси z, $l = OG$ — расстояние от центра тяжести ротора до точки опоры, m — масса ротора, g — ускорение силы тяжести, $M(t)$ — управляющий момент двигателя, передаваемый ротору и направленный по оси z.



Фиг. 1

Рассматривается задача о выборе такого T-периодического (T — заданный период времени) управляющего момента $M(t)$, чтобы уравнение (1.2) имело ограниченное решение, а система (1.1) была устойчивой по Ляпунову относительно переменных α, $\alpha^{\cdot}$, β, $\beta^{\cdot}$. Иными словами, момент $M(t)$ требуется выбрать так, чтобы ротор, в среднем, оставался неподвижным относительно оси симметрии z, а его вертикальное положение равновесия было устойчивым.

2. Формулировка результатов. Пусть $M(t)$ — следующая T-периодическая функция:

$$M(t) = \begin{cases} -A(h_1+h_2)\,\delta(\tau), & 0 \leqslant \tau < t_1 \\ A(h_1+h_2)\,\delta(\tau - t_1), & t_1 \leqslant \tau < t_1 + t_2 = T \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\tau = t - kT, \quad k = [t/T]$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция, h_1, h_2, t_1, t_2 — положительные параметры, удовлетворяющие условиям

$$h_1 t_1 = h_2 t_2, \quad t_1 + t_2 = T \tag{2.2}$$

Теорема 1. 1°. Пусть h_1, h_2, t_1, t_2 удовлетворяют равенствам (2.2) и условию

(2.3) $$\omega_2^2 = h_2^2/4 - r > 0 \quad (r = mgl/A)$$

Тогда управление $M(t)$ из (2.1) дает решение поставленной в п. 1 задачи, если выполнено неравенство

(2.4) $$Q = \left|\lambda \cos\omega_2 t_2 + \frac{h_1 h_2 + 4r}{4\omega_1\omega_2}\mu \sin\omega_2 t_2\right| < 1$$

причем

(2.5) $$\lambda = \cos\omega_1 t_1, \quad \mu = \sin\omega_1 t_1, \quad \omega_1^2 = h_1^2/4 - r > 0$$

(2.6) $$\lambda = \operatorname{ch}\omega_1 t_1, \quad \mu = \operatorname{sh}\omega_1 t_1, \quad \omega_1^2 = r - h_1^2/4 > 0$$

2°. Пусть h_1, h_2, t_1, t_2 удовлетворяют равенствам (2.2) и условиям

(2.7) $$r - h_1^2/4 > 0, \quad r - h_2^2/4 > 0$$

Тогда управление $M(t)$ из (2.1) не может осуществить требуемую стабилизацию. Более того, если момент $M(t)$ не обеспечивает ротору угловой скорости $\omega \geqslant \omega_0 = 2\sqrt{rA/C}$, то система (1.1) не может быть устойчивой.

Теорема 2. Пусть h_1, h_2, t_1, t_2 удовлетворяют условиям (2.2) — (2.5) или (2.2) — (2.4), (2.6). Тогда существует такое $\tau_0 > 0$, что управление $M^*(t)$, определяемое соотношениями

(2.8) $$M^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \tau < t_1 \\ -M_0, & t_1 \leqslant \tau < t_1 + \tau_0 \\ 0, & t_1 + \tau_0 \leqslant \tau < t_1 + \tau_0 + t_2 \\ M_0, & t_1 + \tau_0 + t_2 \leqslant \tau < T^* \end{cases}$$

$$\tau = t - kT^*, \quad k = [t/T^*]$$

(2.9) $$M_0 = A(h_1 + h_2)/\tau_0, \quad T^* = T + 2\tau_0$$

дает решение задачи из п. 1.

Замечания. 1°. Теорема 1 дает периодическое стабилизирующее управление, имеющее два участка переключения, на каждом из которых система (1.1) стационарна. При этом в случае (2.3), (2.5) на каждом из участков стационарности система (1.1) устойчива, а в случае (2.3), (2.6) на одном из участков (первом в формуле (2.1)) неустойчива, но это сочетание неустойчивого и устойчивого режимов делает систему (1.1) в целом устойчивой. В случае (2.7) система (1.1) неустойчива на обоих участках переключения управления $M(t)$ и теорема 1 утверждает, что стабилизация в такой ситуации невозможна.

2°. Можно показать, что множество параметров $\{h_1, h_2, t_1, t_2\}$, удовлетворяющих условиям (2.2) — (2.5) или (2.2) — (2.4), (2.6), непусто.

Действительно, в случае (2.2) — (2.5) можно положить $t_1 = \pi/\omega_1$, $t_2 = h_1 t_1/h_2$, где h_1, h_2 — любые положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству (2.3) и неравенству в (2.5) и такие, что отношение $\omega_2 h_1/(\omega_1 h_2)$ не равно целому числу. Тогда (2.4) переходит в очевидное неравенство

$$|\cos[\omega_2 h_1 \pi/(\omega_1 h_2)]| < 1$$

В случае (2.2) — (2.4), (2.6) полагаем, например, $h_1 = (6\sqrt{2} - 4)\sqrt{r/7}$, $h_2 = 4\sqrt{r}$, $t_2 = 3\pi/(4\omega_2)$, $t_1 = h_2 t_2/h_1$.
Тогда неравенство (2.3) и неравенство в (2.6) устанавливаются непосредственной проверкой, а вот (2.4) переходит в очевидное неравенство

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\exp[-\tfrac{3}{4}\pi\omega_1 h_2/(\omega_2 h_1)] < 1$$

3°. Теорема 1 дает неограниченное стабилизирующее управление $M(t)$, поэтому возникает вопрос о существовании ограниченных управлений, решающих задачу стабилизации. Теорема 2 дает на него положительный ответ. В этой теореме осталось неопределенным конкретное значение величины τ_0.

Приведем без доказательства одну из возможных оценок для выбора этой величины. Обозначим

$$h_0 = {}^1/_2\,(h_1 + h_2),\ r_0 = \max\{r,\ \omega_1^2,\ \omega_2^2\}$$
$$\tau_1 = \min\{h_0^{-1},\ h_0^{1/3}(2r_0^2)^{-2/3}\}$$
$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ h_0 & 1 \end{Vmatrix},\quad U_2 = \begin{Vmatrix} 1 & \omega_2^{-1} \\ \omega_2 & 1 \end{Vmatrix}$$
$$U_1 = \begin{Vmatrix} 1 & \omega_1^{-1} \\ \omega_1 & 1 \end{Vmatrix} \text{ в случае (2.5)}$$
$$U_1 = \begin{Vmatrix} \exp(\omega_1 t_1) & {}^1/_2\omega_1^{-1}\exp(\omega_1 t_1) \\ {}^1/_2\,\omega_1\exp(\omega_1 t_1) & \exp(\omega_1 t_1) \end{Vmatrix} \text{ в случае (2.6)}$$
$$D = \begin{Vmatrix} h_0\tau_1^{1/2} + 18r_0\tau_1 h_0^{-1/2} & 2\tau_1^{1/2} + 9r_0\tau_1^{3/2}h_0^{-1} \\ h_0^{3/2} + 18r_0\tau_1^{1/2} & h_0\tau_1^{1/2} + 18r_0\tau_1 h_0^{-1/2} \end{Vmatrix}$$
$$b = \operatorname{tr}(HU_1DU_2 + DU_1HU_2 + DU_1DU_2)$$

Тогда величина τ_0, удовлетворяющая условиям теоремы 2, выбирается из соотношений

$$\tau_0 < \tau_1,\quad Q + {}^1/_2\, b\sqrt{\tau_0} < 1 \qquad (2.10)$$

3. Обоснование результатов. *Доказательство теоремы 1.*

Вводя комплексную переменную $w = \alpha + i\beta$, перепишем уравнения (1.1), (1.2) в виде

$$w^{\cdot\cdot} - ih(t)\,w^{\cdot} - rw = 0 \qquad (3.1)$$
$$h^{\cdot} = M(t)/A,\quad r = mgl/A,\quad h(t) = C\varphi^{\cdot}/A \qquad (3.2)$$

Выберем для $\varphi(t)$ начальное условие $\varphi^{\cdot}(0) = Ah_1/C$. Тогда $h(0) = h_1$ и решение уравнения (3.2) при $M(t)$ из (2.1) представляет собой следующую периодическую функцию:

$$h(t) = \begin{cases} h_1, & kT \leqslant t < kT + t_1 \\ -h_2, & kT + t_1 \leqslant t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (3.3)$$

Сделаем в (3.1) замену переменной

$$w = u\exp\left(\frac{i}{2}\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right) \qquad (3.4)$$

Тогда получим уравнение

$$u^{\cdot\cdot} + (ih^{\cdot}/2 + h^2/4 - r)\,u = 0 \qquad (3.5)$$

В силу (3.4) устойчивость уравнения (3.1) эквивалентна устойчивости уравнения (3.5). Будем искать матрицу монодромии периодического уравнения (3.5). Пусть фундаментальная матрица системы (3.5) при $h = \text{const}$ есть $U(h, t) = \| u_{ij}(h, t) \|$ $(i, j = 1, 2)$. Элементы матрицы $U(h, t)$ нетрудно вычислить, так как (3.5) при $h = \text{const}$ — уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Периодическая функция $h(t)$ из (3.3) испытывает в точках $t = t_1$ и $t = T$ скачки, по модулю равные $h_1 + h_2$. Согласно уравнению (3.1), функции w и $w^{\cdot}$ непрерывны, а скачки испытывает лишь $w^{\cdot\cdot}$. Учитывая этот факт и дифференцируя (3.4), получим

$$u(t_1 - 0) = u(t_1 + 0),\quad u(T - 0) = u(T + 0)$$
$$u^{\cdot}(t_1 + 0) = u^{\cdot}(t_1 - 0) + ih_0 u(t_1),\quad u^{\cdot}(T + 0) =$$
$$= u^{\cdot}(T - 0) + ih_0 u(T)$$

Используя последние соотношения, построим матрицу монодромии уравнения (3.5)

$$U_0(T) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -ih_0 & 1 \end{Vmatrix} U(h_2, t_2) \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ ih_0 & 1 \end{Vmatrix} U(h_1, t_1) \qquad (3.6)$$

След линейной системы (3.5) (переписанной в форме Коши) равен нулю, поэтому по теореме Лиувилля [2] имеем $\det U_0(T) = 1$. Следовательно, характеристические числа матрицы $U_0(T)$ находятся из уравнения $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$, где $a = \operatorname{tr} U_0(T)$. Условия устойчивости $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $|\lambda_{1,2}| = 1$ в данном случае эквивалентны соотношениям $|a| < 2$, $\operatorname{Im} a = 0$. Перемножая матрицы в (3.6), получим равенства

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Im} a = h_0 (u_{11}^{(1)}u_{12}^{(2)} - u_{22}^{(1)}u_{12}^{(2)} + u_{12}^{(1)}u_{22}^{(2)} - u_{12}^{(1)}u_{11}^{(2)}) \\
\operatorname{Re} a = u_{11}^{(1)}u_{11}^{(2)} + u_{22}^{(1)}u_{12}^{(2)} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(1)}u_{22}^{(2)} + h_0^2 u_{12}^{(1)}u_{12}^{(2)} \\
(u_{mn}^{(l)} = u_{mn}(h_l, t_l),\ m, n, l = 1, 2)
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Рассмотрим случай 1°. При выполнении неравенства в (2.5) получим $\operatorname{Im} a = 0$, $\operatorname{Re} a = 2Q$.

Аналогично проводятся вычисления при выполнении неравенства в (2.6).

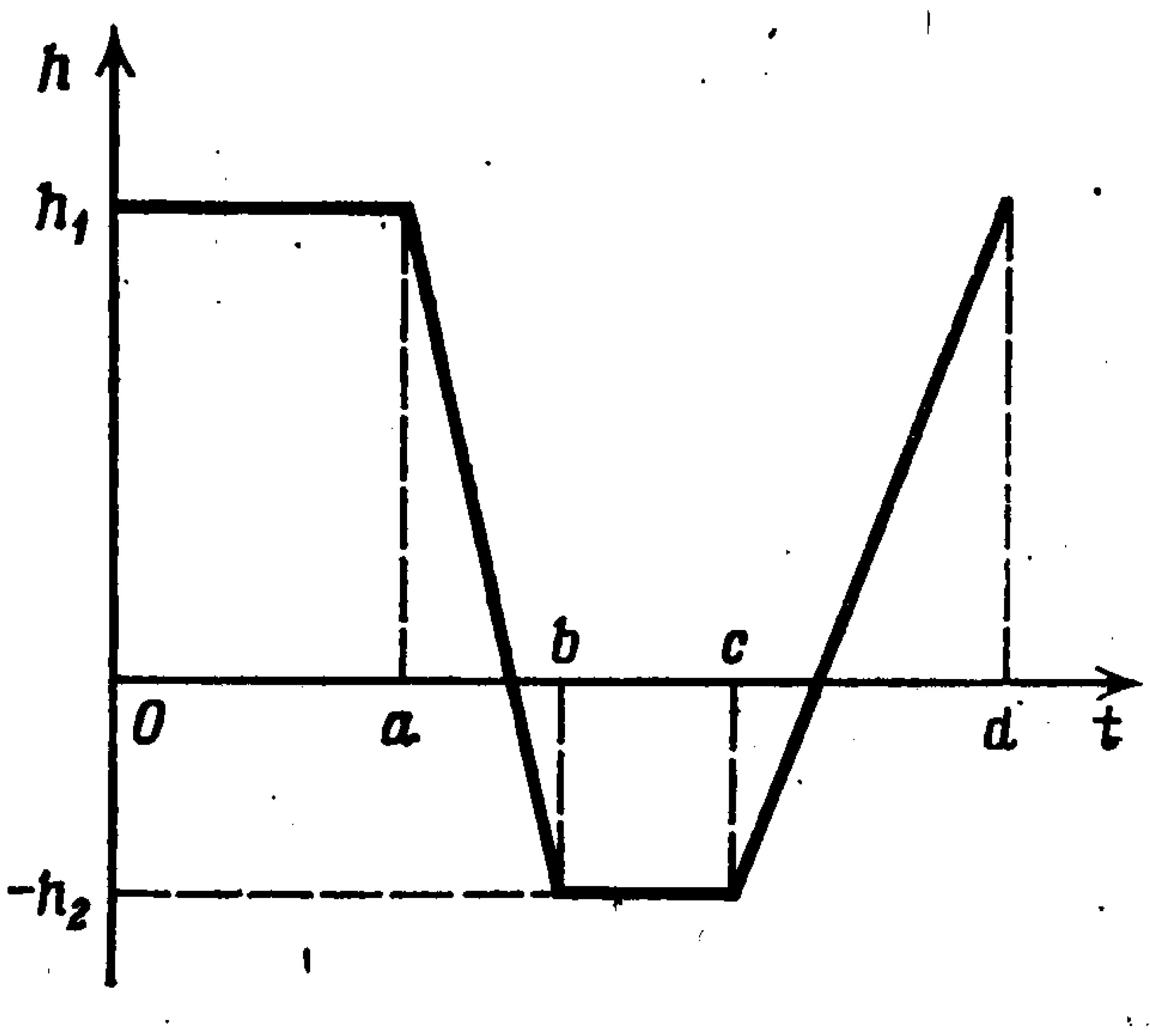
Рассмотрим случай 2°. Если момент $M(t)$ не обеспечивает угловой скорости ротора $\omega_0 = 2\sqrt{r}A/C$, то для всех t имеем неравенство $|\varphi^{\cdot}(t)| < 2\sqrt{r}A/C$, что эквивалентно неравенству $h^2(t)/4 - r < 0$. Применим к уравнению (3.5) теорему М. Г. Крейна ([3], с. 294), согласно которой при $\operatorname{Re} p(t) < 0$, $t \in [0, \infty)$ периодическое уравнение $x^{\cdot\cdot} + p(t)x = 0$ неустойчиво. Для уравнения (3.5) $p(t) = {}^1/_2 ih^{\cdot} + h^2/4 - r$ и, следовательно, $\operatorname{Re} p(t) = h^2/4 - r < 0$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Решение уравнения (3.2) в данном случае при начальном условии $\varphi^{\cdot}(0) = Ah_1/C$ будет иметь вид

$$
h(t) = \begin{cases}
h_1, & 0 \leqslant \tau < t_1 \\
h_1 - M_0 A^{-1}(\tau - t_1), & t_1 \leqslant \tau < t_1 + \tau_0 \\
-h_2, & t_1 + \tau_0 \leqslant \tau < t_1 + \tau_0 + t_2 \\
-h_2 + M_0 A^{-1}(\tau - t_1 - t_2 - \tau_0), & t_1 + \tau_0 + t_2 \leqslant \tau < T^*
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

$$
\tau = t - kT^*, \quad k = [t/T^*]
$$

При выполнении равенств (2.9) функция $h(t)$ из (3.8) непрерывна. Вид функции $h(t)$ представлен на фиг. 2. Как было показано при доказательстве теоремы 1, устойчивость уравнения (3.1) эквивалентна устойчивости уравнения (3.5).



Фиг. 2

Построим матрицу монодромии системы (3.5). Фундаментальные матрицы системы (3.5) на участках $(0, a)$ и (b, c) известны. Обозначим их, как и выше, через $U(h_1, t)$ и $U(h_2, t)$. Фундаментальную матрицу системы (3.5) на участке (a, b) обозначим через $V_1(t) = \|v_{ij}(t)\|$ $(i, j = 1, 2)$, где $v_{ij}(t)$ — некоторые комплекснозначные функции времени.

Из (3.8) получим соотношения

$$
h(kT^* + t_1 + \tau) = h[(k+1)T^* - \tau], \quad 0 \leqslant \tau < \tau_0
$$

$$
\left.\frac{dh(t)}{d\tau}\right|_{t=kT^*+t_1+\tau} = -\left.\frac{dh(t)}{d\tau}\right|_{t=(k+1)T^*-\tau}
$$

из которых вытекает следующий вывод. Уравнение (3.5) на участке (a, b) совпадает с уравнением (3.5) на участке (c, d), если последнее решать в «попятном» движении от d к c, а коэффициент при u в (3.5) заменить на комплексно-сопряженный. Используя это, получим, что фундаментальная матрица системы (3.5) на участке (c, d) имеет вид

$$V_2(t)=\begin{Vmatrix} \bar v_{22}(t) & \bar v_{12}(t) \\ \bar v_{21}(t) & \bar v_{11}(t) \end{Vmatrix} \tag{3.9}$$

(черта сверху — знак комплексного сопряжения). Таким образом, матрица монодромии системы (3.5)

$$U(T^*) = V_2(\tau_0)\, U(h_2, t_2)\, V_1(\tau_0)\, U(h_1, t_1) \tag{3.10}$$

Подставляя в (3.10) явные значения элементов матрицы $U(h, t)$ и используя соотношение (3.9), получим, что $\operatorname{Im} \operatorname{tr} U(T^*) = 0$ и $\det U(T^*) = 1$. Следовательно, условие устойчивости уравнения (3.5) эквивалентно неравенству $|\operatorname{tr} U(T^*)| < 2$.

Рассмотрим систему (3.5) на участке (a, b) и перепишем ее в форме Коши

$$x_1^{\cdot}=x_2, \quad x_2^{\cdot}=\left(i\,\frac{M_0}{2}+r-\frac{h^2}{4}\right)x_1$$

Воспользовавшись тем, что $M_0\tau_0 = A(h_1 + h_2)$, а функция $h(t)$ ограничена, получим следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} &v_{11}(\tau_0)\to 1, \quad v_{12}(\tau_0)\to 0, \quad v_{22}(\tau_0)\to 1, \\ &v_{21}(\tau_0)\to {}^1/_2 i\,(h_1+h_2) \text{ при } \tau_0\to 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Так как $U(h_1, t_1)$ и $U(h_2, t_2)$ не зависят от τ_0 и M_0, то из (3.10) и (3.11) получим $U(T^*)\to U_0(T)$ при $\tau_0\to 0$, где матрица $U_0(T)$ была определена при доказательстве теоремы 1 в (3.6). Таким образом, $\operatorname{tr} U(T^*) \to \operatorname{tr} U_0(T)$ при $\tau_0 \to 0$. Следовательно, если h_1, h_2, t_1, t_2 выбраны так же, как в теореме 1, то при всех достаточно малых τ_0 или достаточно больших M_0 будем иметь $|\operatorname{tr} U(T^*)| < 2$, и устойчивость системы (3.5) обеспечена.

Более детальный анализ уравнения (3.5) на участке (a, b) при $\tau_0 \to 0$ приводит (при помощи метода последовательных приближений) к гарантированным оценкам (2.10) (см. замечание 3°). Теорема 2 доказана.

4. Обсуждение результата. Сравним изложенный способ стабилизации волчка со стабилизацией перевернутого маятника.

Стабилизацию верхнего (неустойчивого) положения равновесия маятника без введения обратных связей можно обеспечить либо придав точке подвеса маятника вертикальное ускорение, не меньшее g и направленное вдоль силы тяжести, либо придав точке подвеса вертикальные периодические вибрации соответствующей частоты и амплитуды, которые, в среднем, оставляют подвес неподвижным [4].

Первый способ не реализуется практически, так как перемещения точки подвеса в этом случае не будут ограниченными и возрастают как квадрат времени. Однако этот способ можно сопоставить с известным методом гироскопической стабилизации волчка Лагранжа [1]. Действительно, поставим в соответствие перемещению точки подвеса маятника ξ угол поворота ротора волчка φ, а ускорению точки подвеса $\xi^{\cdot\cdot}$ — угловую скорость $\varphi^{\cdot}$. Тогда в обоих случаях величины ξ и φ возрастают с течением времени, а стабилизация этих систем происходит при достаточно больших $\xi^{\cdot\cdot}$ и $\varphi^{\cdot}$, а именно при $\xi^{\cdot\cdot} \geqslant g$, $\varphi^{\cdot} \geqslant \omega_0 = 2A\sqrt{r}/C$. Естественно возникает вопрос о существовании такой аналогии для второго способа стабилизации маятника. Иными словами, можно ли стабилизировать волчок, периодически изменяя угловую скорость $\varphi^{\cdot}$ ротора и обеспечивая нулевое среднее его углового перемещения φ? Выше было показано, что такая аналогия существует. Получены законы периодического изменения φ, обеспечивающие стабилизацию волчка и равенство нулю среднего значения $\varphi(t)$. Оказалось, что при такой стабилизации возможны режимы, когда угловая скорость ротора на части периода меньше значения ω_0, необходимого для гироскопической стабилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 401 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. *Далецкий Ю. Л. и Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
4. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1951, т. 21, вып. 5, с. 588—597.

Москва

Поступила в редакцию 24.X.1983