Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 531.38

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛИ ПРИ НАЛИЧИИ СОУДАРЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Маркеев А.П.

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с выпуклой поверхностью над абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. Движение происходит с соударениями тела о плоскость, удар считается абсолютно упругим. Исследуется устойчивость такого движения, при котором тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикали, а центр тяжести тела в промежутках между соударениями движется по параболе или по фиксированной вертикали, содержащей ось вращения тела. Для произвольных значений параметров задачи получены условия устойчивости в первом приближении. Подробно проанализированы частные случаи: невращающегося тела, тела, обладающего геометрической и динамической симметрией, тела, поверхность которого в окрестности точки контакта с плоскостью близка к сферической. Для вращающегося тела обнаружена своеобразная «квантованность» областей устойчивости и неустойчивости по высоте подскока тела над плоскостью.

Задача об устойчивости движения твердого тела, обладающего выпуклой поверхностью любой формы и произвольным тензором инерции при наличии упомянутой неудерживающей связи, еще не изучалась. В известных исследованиях в теории виброударных систем рассматривались либо материальные точки, либо однородные шары, что с динамической точки зрения в случае гладкой плоскости одно и то же.

1. Пусть твердое тело движется в поле силы тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Поверхность тела считаем выпуклой, плоскость — абсолютно гладкой. Во время движения тело может коснуться плоскости одной из точек своей поверхности. Если при этом происходит удар, то он предполагается абсолютно упругим.

Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом в точке O горизонтальной плоскости. Ось Oz направлена вертикально вверх. Координаты центра тяжести G тела обозначим через x, y, z. С телом свяжем систему координат $G\xi\eta\zeta$, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Ориентация тела относительно абсолютного пространства определяется углами Эйлера θ, φ, ψ, которые вводятся обычным образом. Через M обозначим точку поверхности тела, ближайшую к горизонтальной плоскости $z=0$. Можно показать, что координаты ξ, η, ζ точки M в системе координат $G\xi\eta\zeta$ будут функциями углов θ, φ, определяемыми по виду уравнения, задающего форму поверхности тела. Единичный вектор оси Oz в той же системе координат имеет компоненты

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta \tag{1.1}$$

Пусть m — масса тела, g — ускорение свободного падения, A, B и C — моменты инерции тела относительно осей $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ соответственно. Через p, q, r обозначим проекции абсолютной угловой скорости тела на эти оси.

Для движения тела в промежутках между ударами, когда оно совершает свободный полет над плоскостью, справедливы уравнения

$$x^{\cdot\cdot} = 0, \quad y^{\cdot\cdot} = 0, \quad z^{\cdot\cdot} = -g \tag{1.2}$$

(1.3) $$Ap^{\cdot} + (C - B)\,qr = 0,\quad Bq^{\cdot} + (A - C)\,rp = 0,\quad Cr^{\cdot} + (B - A)\,pq = 0$$

(1.4) $$p = \psi^{\cdot}\gamma_1 + \theta^{\cdot}\cos\varphi,\quad q = \psi^{\cdot}\gamma_2 - \theta^{\cdot}\sin\varphi,\quad r = \psi^{\cdot}\gamma_3 + \varphi^{\cdot}$$

Чтобы получить уравнения, описывающие движение тела на промежутке времени, включающем в себя моменты соударения тела и плоскости, систему уравнений (1.2) — (1.4) надо дополнить уравнениями, вытекающими из общей теории удара без трения [1]. Обозначая, как обычно, знаками минус и плюс кинематические характеристики движения тела до и после удара соответственно, имеем

(1.5) $$x^{\cdot+} = x^{\cdot-},\quad y^{\cdot+} = y^{\cdot-},\quad z^{\cdot+} = z^{\cdot-} + \frac{1}{m} I$$

(1.6) $$p^{+} = p^{-} + \frac{\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta}{A} I,\quad q^{+} = q^{-} + \frac{\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi}{B} I$$

$$r^{+} = r^{-} + \frac{\gamma_2\xi - \gamma_1\eta}{C} I$$

$$I = -\frac{2}{k}[z^{\cdot-} + p^{-}(\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta) + q^{-}(\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi) + r^{-}(\gamma_2\xi - \gamma_1\eta)]$$

$$k = \frac{1}{m} + \frac{(\gamma_3\eta - \gamma_2\zeta)^2}{A} + \frac{(\gamma_1\zeta - \gamma_3\xi)^2}{B} + \frac{(\gamma_2\xi - \gamma_1\eta)^2}{C}$$

Здесь I — ударный импульс; величины ξ, η, ζ, γ_1, γ_2, γ_3 не отмечены знаками минус или плюс, так как они во время удара не изменяются.

2. Пусть в точке пересечения поверхности тела и оси $G\eta$ при отрицательных η касательная плоскость к поверхности тела перпендикулярна $G\eta$. Тело может совершать такое движение, в котором

$$\theta = \pi/2,\quad \varphi = 0,\quad p = 0,\quad q = \psi^{\cdot} = \omega = \text{const},\quad r = 0$$

$$x^{\cdot} = \text{const},\quad y^{\cdot} = \text{const},\quad z^{\cdot+} = -z^{\cdot-} = \sqrt{2gH} = \text{const}$$

В этом движении ось $G\eta$ вертикальна, а тело вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω. При этом в результате соударений тело периодически подскакивает над плоскостью; наибольшее расстояние наинизшей точки M поверхности тела от плоскости равно H. Движение имеет период $\tau = 2\sqrt{2H/g}$, равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями тела и плоскости. В промежутках между соударениями центр тяжести тела движется либо по параболе, либо по заданной вертикальной прямой в зависимости от того, отлична от нуля или равна нулю постоянная величина $x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}$. Без ограничения общности будем далее рассматривать только случай $x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} = 0$.

Исследуем устойчивость этого движения по отношению к возмущениям углов θ, φ, проекций угловой скорости p, q, r и высоты подскока H. Линеаризация уравнений (1.3) — (1.5) в окрестности рассматриваемого движения показывает, что в первом приближении высота подскока H и угловая скорость $\psi^{\cdot}$ вращения тела вокруг вертикали постоянны. Если положить $\theta = \pi/2 + x_1$, $\varphi = x_2$, $p = x_3$, $r = x_4$, то из (1.3) для переменных x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) получаем такую систему уравнений первого приближения, описывающую возмущенное движение тела в промежутках между соударениями:

(2.1) $$x_1^{\cdot} = -\omega x_2 + x_3,\quad x_2^{\cdot} = \omega x_1 + x_4$$

$$x_3^{\cdot} = \frac{B - C}{A}\,\omega x_4,\quad x_4^{\cdot} = -\frac{B - A}{C}\,\omega x_3$$

Из (1.6) получаем уравнения, связывающие кинематические характеристики движения тела до и после удара в первом приближении относительно x_i

$$x_3^+ = x_3^- + \frac{mg\tau}{A}[(h-l_2)x_1 - lx_2]^- \tag{2.2}$$

$$x_4^+ = x_4^- - \frac{mg\tau}{C}[lx_1 - (h-l_1)x_2]^-$$

$$l_1 = r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha, \quad l_2 = r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha$$

$$l = (r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha$$

Здесь h — расстояние от центра тяжести тела до точки M в невозмущенном движении, r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке M, α — угол между осью $G\zeta$ и линией кривизны, соответствующей r_1; он отсчитывается от оси $G\zeta$ против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси $G\eta$, занимающей вертикальное положение в невозмущенном движении.

3. Фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ системы (2.1), удовлетворяющая условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, такова:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{Vmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & \frac{A}{B\omega}(\sin\omega t + \varkappa\sin\Omega t) & \frac{C}{B\omega}(\cos\omega t - \cos\Omega t) \\ \sin\omega t & \cos\omega t & -\frac{A}{B\omega}(\cos\omega t - \cos\Omega t) & \frac{C}{B\omega}\left(\sin\omega t + \frac{1}{\varkappa}\sin\Omega t\right) \\ 0 & 0 & \cos\Omega t & \frac{C}{A\varkappa}\sin\Omega t \\ 0 & 0 & -\frac{A\varkappa}{C}\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{Vmatrix}$$

$$\varkappa^2 = \frac{C(B-A)}{A(B-C)}, \quad \Omega^2 = \frac{(B-A)(B-C)}{AC}\omega^2$$

Пусть $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где T — знак транспонирования. Тогда, учитывая, что во время удара величины x_1 и x_2 не изменяются, перепишем соотношения (2.2) в виде $\mathbf{x}^+ = \mathbf{Y}\mathbf{x}^-$, где

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mg\tau}{A}(h-l_2) & -\frac{mg\tau}{A}l & 1 & 0 \\ -\frac{mg\tau}{C}l & \frac{mg\tau}{C}(h-l_1) & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Если через $\mathbf{x}^\circ$ обозначить значение вектора $\mathbf{x}$ перед первым соударением, то его значение $\mathbf{x}^1$ перед вторым соударением вычисляется по формуле $\mathbf{x}^1 = \mathbf{Z}\mathbf{x}^\circ$, где $\mathbf{Z} = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{Y}$, а $\mathbf{X}(\tau)$ — значение матрицы $\mathbf{X}(t)$ в момент времени, равный периоду рассматриваемого движения. Перед $(k+1)$-м соударением $\mathbf{x}^k = \mathbf{Z}\mathbf{x}^\circ$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Для устойчивости движения необходимо, чтобы характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{Z}$ не имело корней с модулями, большими единицы. При отсутствии таковых, но при наличии корней с модулями, равными единице, необходимо, чтобы в жордановой форме матрицы $\mathbf{Z}$, соответствующие этим корням клетки, имели первый порядок.

Как показывают вычисления, в рассматриваемой задаче характеристическое уравнение будет возвратным

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0 \tag{3.1}$$

$$a_1 = 2(\cos\omega\tau + \cos\Omega\tau) + \frac{mg\tau}{B\omega}\Big[(h-l_1)\left(\sin\omega\tau + \frac{1}{\varkappa}\sin\Omega\tau\right) +$$

$$+ (h-l_2)(\sin\omega\tau + \varkappa\sin\Omega\tau)\Big]$$

$$a_2 = 2 + 4\cos\omega\tau\cos\Omega\tau + \left(\frac{mg\tau}{B\omega}\right)^2\Big[2(1-\cos\omega\tau\cos\Omega\tau) +$$
$$+ \left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right)\sin\omega\tau\sin\Omega\tau\Big] + 2\,\frac{mg\tau}{B\omega}\Big[(h-l_1)\Big(\sin\omega\tau\cos\Omega\tau +$$
$$+ \frac{1}{\varkappa}\cos\omega\tau\sin\Omega\tau\Big) + (h-l_2)(\sin\omega\tau\cos\Omega\tau + \varkappa\cos\omega\tau\sin\Omega\tau)\Big]$$

Область устойчивости задается системой неравенств [2]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2-2) < a_1^2 < {}^1/_4\,(a_2+2)^2 \qquad (3.2)$$

При выполнении этих неравенств характеристическое уравнение (3.1) имеет только простые корни с модулями, равными единице. Вне области, задаваемой неравенствами (3.2), уравнение (3.1) имеет хотя бы один корень с модулем, большим единицы.

4. Анализ областей устойчивости (3.5) в зависимости от параметров задачи в общем случае сложен. Поэтому рассмотрим наиболее интересные частные случаи. Пусть $\omega = 0$, т. е. в невозмущенном движении твердое тело не вращается вокруг оси $G\eta$, совершающей движение по заданной вертикали. В этом случае при любых физически возможных соотношениях между моментами инерции A, B, C коэффициенты уравнения (3.1) становятся такими:

$$a_1 = \varkappa_1 + 4, \quad a_2 = 2\varkappa_1 + \varkappa_2 + 6$$
$$\varkappa_1 = mg\tau^2\left(\frac{h-l_1}{C} + \frac{h-l_2}{A}\right), \quad \varkappa_2 = \frac{(mg\tau^2)^2}{AC}(h-r_1)(h-r_2)$$

Можно показать, что если исключить три частных случая: 1) $r_1 = r_2$, $A = C$, 2) $\alpha = 0$, $(h-r_1)/A = (h-r_2)/C$, 3) $\alpha = \pi/2$, $(h-r_1)/C = (h-r_2)/A$, которые соответствуют границе $a_1^2 = 4(a_2-2)$ области устойчивости, то условия (3.2) эквивалентны системе следующих трех неравенств:

$$h < r_1, \quad h < r_2, \quad H < H_* \qquad (4.1)$$
$$H_* = [A(l_1-h) + C(l_2-h) - \{[A(l_1-h) - C(l_2-h)]^2 + 4ACl^2\}^{1/2}]\,[4m(r_1-h)(r_2-h)]^{-1}$$

Таким образом, рассматриваемое движение будет неустойчиво, если центр тяжести в невозмущенном движении лежит выше хотя бы одного из центров кривизны поверхности тела в точке M или высота H подскока тела над плоскостью превосходит критическое значение H_*.

Пусть, например, тело представляет собой однородный эллипсоид, поверхность которого в системе координат $G\xi\eta\zeta$ задана уравнением $\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 + \zeta^2/c^2 = 1$. Тогда

$$h = b, \quad r_1 = \frac{c^2}{b}, \quad r_2 = \frac{a^2}{b}, \quad \alpha = 0, \quad A = \frac{m}{5}(b^2+c^2), \quad C = \frac{m}{5}(a^2+b^2)$$

Из (4.1) следует, что при $\omega = 0$ движение эллипсоида будет устойчивым, если по вертикали направлена наименьшая из полуосей эллипсоида, а высота его подскока над плоскостью не превосходит величину $H_* = b(a^2+b^2)/[10(a^2-b^2)]$, если $a \geqslant c$, и величину $H_* = b(c^2+b^2)/[10(c^2-b^2)]$, если $a < c$.

Отметим, что при фиксированных величинах m, h, A, C, r_1, r_2 критическая высота подскока тела H_* будет функцией угла α. Она будет максимальной, если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, т. е. когда линии кривизны тела в точке M параллельны осям инерции $G\zeta$ и $G\xi$, занимающим в невозмущенном движении тела горизонтальное положение.

5. Пусть $\omega \neq 0$, а тело динамически и геометрически симметрично, т. е. $A = C$, $r_1 = r_2 = r$. В этом случае коэффициенты характеристиче-

ского уравнения (3.1) будут такими

$$a_1 = 4\lambda_1\lambda_2, \quad a_2 = 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2$$

$$\lambda_1 = \cos\left(\frac{B-2A}{2A}\omega\tau\right), \quad \lambda_2 = \frac{mg\tau}{B\omega}(h-r)\sin\left(\frac{B\omega\tau}{2A}\right) + \cos\left(\frac{B\omega\tau}{2A}\right)$$

Условия устойчивости (3.2) приводятся к системе неравенств

$$0 < \lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 2, \quad (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2) > 0, \quad |\lambda_1| \neq |\lambda_2|$$

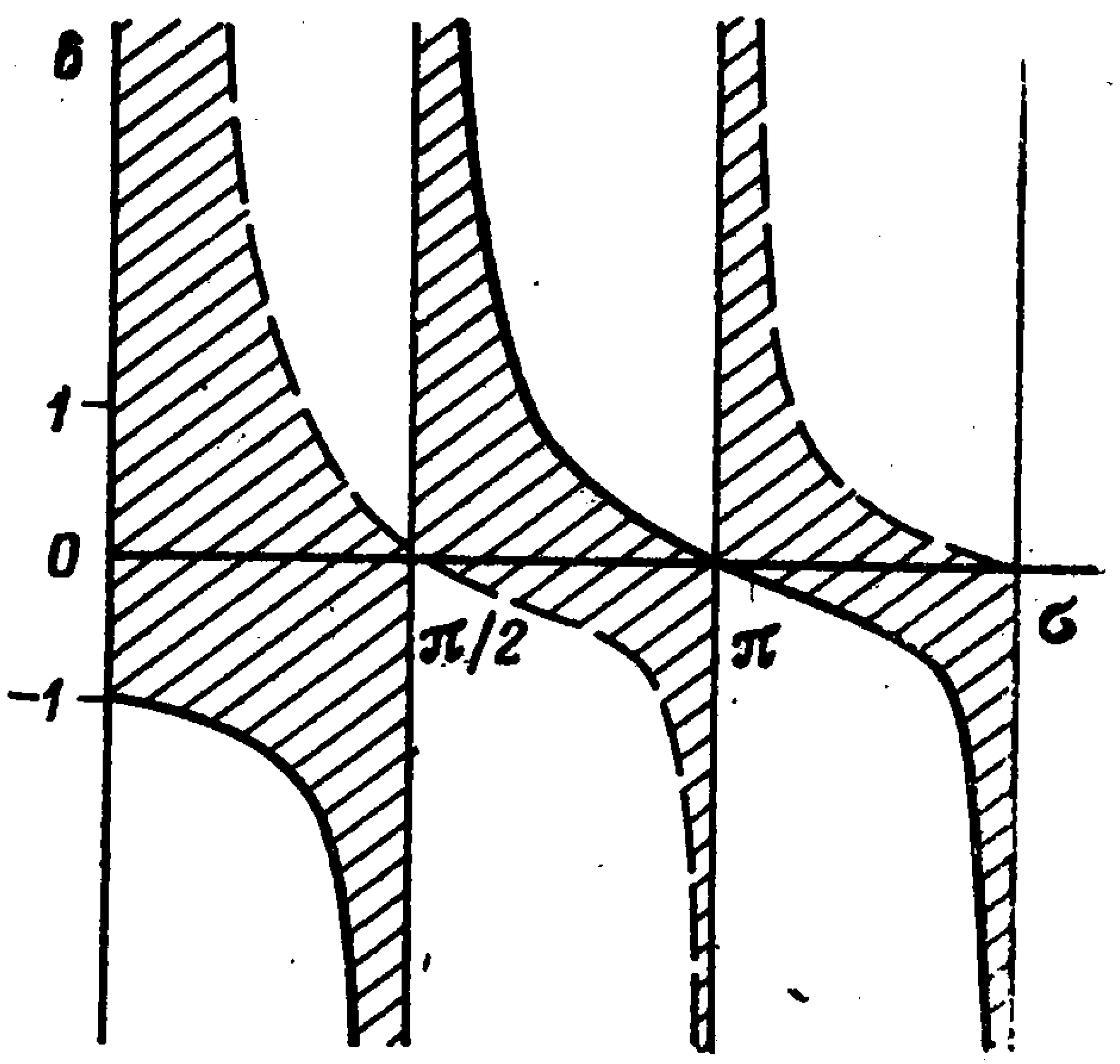
которая при $|\lambda_1| \neq 1$ и $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ сводится к одному неравенству

(5.1) $\quad f(\tau) < 0$

$$f(\tau) = \left[\frac{mg(r-h)\tau}{B\omega} + \operatorname{tg}\left(\frac{B\omega\tau}{4A}\right)\right]\left[\frac{mg(r-h)\tau}{B\omega} - \operatorname{ctg}\left(\frac{B\omega\tau}{4A}\right)\right]$$

Если неравенство (5.1) выполняется с обратным знаком, то рассматриваемое движение неустойчиво. Области устойчивости и неустойчивости представлены на фигуре в плоскости параметров

$$\sigma = B\omega\tau/(4A),$$
$$\delta = 4Amg(r-h)/(B\omega)^2$$



Так как условия устойчивости от знака ω не зависят, то σ считается неотрицательной величиной. Сплошными линиями показаны кривые $\delta = -\operatorname{tg}\sigma/\sigma$, а штриховыми — кривые $\delta = \operatorname{ctg}\sigma/\sigma$. Области, где выполнено неравенство (5.1), заштрихованы.

Имеет место своеобразная квантованность областей устойчивости и неустойчивости на высоте H подскока тела в невозмущенном движении. Существует счетное множество чередующихся интервалов устойчивости и неустойчивости, которые простираются неограниченно вверх. Как бы ни была велика высота подскока тела, упомянутое множество интервалов устойчивости и неустойчивости обязательно существует при бо́льшей высоте.

Рассмотрим подробнее результаты анализа неравенства (5.1).

Пусть $r > h$, т. е. в невозмущенном движении центр тяжести расположен ниже центра сферического участка поверхности тела в точке M, которой тело ударяется о плоскость. Области неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{g\tau_n^2}{8} < H < \frac{g}{2}\left(\frac{n\pi A}{\omega B}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где τ_n — занумерованные в порядке возрастания корни уравнения $f(\tau) = 0$. С увеличением n интервалы неустойчивости становятся шире. При росте ω области неустойчивости сужаются и сосредотачиваются вблизи высот

$$H_k = gk^2\pi^2A^2/(2\omega^2B^2) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Отметим, что при $r > h$ для любого ω существует интервал устойчивости по высоте H, начинающийся у плоскости отскока. Он задается неравенством

$$0 < H < H' = \frac{g\tau'^2}{8}, \quad \frac{mg(r-h)\tau'}{B\omega} = \operatorname{ctg}\left(\frac{B\omega\tau'}{4A}\right)$$

При $\omega \to 0$ имеем $H' \to H_*$, где H_* — правая часть третьего из неравенств (4.1), вычисленная при $A = C$.

Пусть теперь $r < h$. Если выполняется неравенство $B^2\omega^2 + 4\,Amg(r-h) > 0$ (условие, аналогичное условию Маиевского), то существует интервал устойчивости по высоте, начинающийся у плоскости отскока

$$0 < H < \frac{g}{2}\left(\frac{\pi A}{\omega B}\right)^2$$

Если условие типа Маиевского не выполнено, то у плоскости отскока начинается интервал неустойчивости.

Вообще, при $r < h$ интервалы неустойчивости задаются неравенствами

$$\frac{g}{2}\left(\frac{n\pi A}{\omega B}\right)^2 < H < \frac{g\tau_n^2}{8}$$

причем $n = 1, 2, \ldots$, если условие типа Маиевского выполнено, и $n = 0, 1, 2, \ldots$ в противном случае.

Причина возникновения странной на первый взгляд квантованности интервалов устойчивости и неустойчивости состоит в том, что при $\omega \neq 0$ в возмущенном движении ось симметрии тела между соударениями совершает колебания, что и приводит к чередованию областей устойчивости и неустойчивости по высоте подскока тела над плоскостью. В п. 4, где $\omega = 0$, квантованность интервалов устойчивости и неустойчивости отсутствует, так как в промежутках между соударениями движение тела не будет колебательным; возмущения x_1, x_2 при $\omega = 0$ линейно возрастают со временем.

6. Пусть поверхность тела вблизи точки его соударения с плоскостью близка участку сферы, а центр тяжести находится вблизи центра этой сферы. Это означает, что величины h, r_1, r_2 близки. Будем считать, что они различаются на величины порядка ε.

Если $\varepsilon = 0$, а B — средний по величине момент инерции тела, то для коэффициентов характеристического уравнения (3.1) имеем такие выражения:

$$a_1 = 2(\cos\omega\tau + \operatorname{ch}\Omega_*\tau), \quad a_2 = 2 + \cos\omega\tau \operatorname{ch}\Omega_*\tau$$
$$\left(\Omega_* = \sqrt{\frac{(B-A)(C-B)}{AC}}\,\omega\right)$$

Одно из условий устойчивости (3.2) $a_1^2 - {}^1/_4(a_2 + 2)^2 < 0$ приводится к неравенству $\sin^2\omega\tau \operatorname{sh}^2\Omega_*\tau < 0$, которое при $\sin\omega\tau \neq 0$ выполняется с противоположным знаком. Поэтому, если B — средний по величине момент инерции и $\omega\tau \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi\ldots$, то при достаточно малых ε имеет место неустойчивость.

Если B — наибольший или наименьший из моментов инерции, то при $\varepsilon = 0$ коэффициенты характеристического уравнения (3.1) имеют вид

$$a_1 = 2(\cos\omega\tau + \cos\Omega\tau), \quad a_2 = 2 + 4\cos\omega\tau\cos\Omega\tau$$
$$\left(\Omega = \sqrt{\frac{(B-A)(B-C)}{AC}}\,\omega\right)$$

и условия устойчивости (3.2) при $\varepsilon = 0$ запишутся в виде системы неравенств

$$\sin\omega\tau\sin\Omega\tau \neq 0, \quad \sin\frac{\omega+\Omega}{2}\tau\sin\frac{\omega-\Omega}{2}\tau \neq 0, \quad \cos\omega\tau\cos\Omega\tau \neq \pm 1 \tag{6.1}$$

Первое и второе из этих неравенств не выполняются в следующих случаях (N_i — целые числа):

$$1)\ \omega\tau = N_1\pi, \quad 2)\ \Omega\tau = N_2\pi, \quad 3)\ (\omega+\Omega)\tau = 2N_3\pi, \quad 4)\ (\omega-\Omega)\tau = 2N_4\pi \tag{6.2}$$

Последнее из неравенств (6.1) не выполнено, когда удовлетворяются одновременно первые два соотношения из (6.2).

При выполнении хотя бы одного из равенств (6.2) имеет место резонанс: между частотами ω и Ω колебаний тела в его движении между соударениями и частотой $2\pi/\tau$ подскоков тела в невозмущенном движении существует целочисленное соотношение.

Если резонанса нет, т. е. ни одно из равенств (6.2) не выполнено, то при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ движение тела будет устойчивым. Если же имеет место резонанс, то при малых $\varepsilon \neq 0$ возможна неустойчивость. Будем рассматривать только некратные резонансы, считая, что при $\varepsilon = 0$ выполняется только одно из равенств (6.2).

Вычисления, опирающиеся на условия устойчивости (3.2), показывают, что в резонансных случаях 1), 2) и 3) при $\varepsilon \neq 0$ неустойчивость в первом приближении по ε обнаруживается, только если центр тяжести тела расположен между центрами кривизны поверхности тела в точке M. Более точно, пусть в случаях 1), 2) и 3) при $\varepsilon \neq 0$ имеем соответственно

$$\omega\tau = N_1\pi + \mu, \quad \Omega\tau = N_2\pi + \mu, \quad (\Omega + \omega)\tau = 2N_3\pi + \mu$$

Области неустойчивости в случаях 1) и 2) задаются неравенством

$$|\mu| < \frac{mg\tau}{B\omega}\sqrt{(h - r_1)(r_2 - h)} \tag{6.3}$$

а в случае 3) — неравенством

$$|\mu| < \frac{mg\tau}{B\omega}\sqrt{(h - r_1)(r_2 - h)}\,|\varkappa^{1/2} - \varkappa^{-1/2}| \tag{6.4}$$

В резонансном случае 4) неустойчивость в первом приближении по ε обнаруживается, если центр тяжести тела в невозмущенном движении лежит либо выше, либо ниже обоих центров кривизны. Если положить $(\omega - \Omega)\tau = 2N_4\pi + \mu$, то соответствующие области неустойчивости задаются неравенством

$$|\mu| < \frac{mg\tau}{B\omega}\sqrt{(h - r_1)(h - r_2)}\,(\varkappa^{1/2} + \varkappa^{-1/2}) \tag{6.5}$$

В (6.3) — (6.5) величина τ равна его значению в соответствующем резонансном соотношении (6.2). Наличие резонансов привело при $\varepsilon \neq 0$ к квантованности областей неустойчивости по высоте подскока тела над плоскостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di meccanica razionale. V. 2, pt 2. Bologna: Zanichelli, 1927, 671 p.— Рус. перев.: М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
2. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах.— Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 327—401.

Москва

Поступила в редакцию 30.V.1983