УДК 531.01

ВЛИЯНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ НА ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Болотин С. В.

Изучается влияние особенностей потенциальной энергии на существование аналитических первых интегралов механических систем с двумя степенями свободы. Приводятся приложения к ограниченной задаче многих тел.

1. Формулировка результатов. Пусть M — конфигурационное многообразие лагранжевой механической системы с двумя степенями свободы

(1.1) $$L = T - V + \Lambda$$

— функция Лагранжа. Здесь $T = {}^1/_2 \langle \dot q, \dot q \rangle$ — кинетическая энергия, задаваемая римановой метрикой $\langle , \rangle$ на M, V — потенциальная энергия, $\Lambda = \langle v(q), \dot q \rangle$ — линейная по скорости функция, задаваемая векторным полем v на M. Имея в виду приложения к небесной механике, предположим, что T и Λ — функции класса C^2 на M, а V — функция класса C^2 всюду на M, кроме конечного множества Σ особых точек ньютоновского типа. Точка $p \in \Sigma \subset M$ называется особой точкой ньютоновского типа потенциальной энергии, если в конформных по отношению к метрике $\langle , \rangle$ локальных координатах q на M с началом в точке p

$$V = -f(q) / |q|$$

где f — функция класса C^2 и $f(0) > 0$.

Будет показано, что наличие $n > 2\chi(M)$ особых точек ньютоновского типа потенциальной энергии препятствует интегрируемости механической системы. Здесь $\chi(M)$ — эйлерова характеристика M. Условие $n > 2\chi(M)$ не выполнено, лишь если M — сфера, $n \leqslant 4$; M — плоскость или проективная плоскость, $n \leqslant 2$; M — тор, цилиндр, бутылка Клейна или лист Мебиуса, $n = 0$.

Перейдем к точным формулировкам. Конформные координаты на M определяют на M структуру аналитического многообразия. Пусть $H = T + V$ — интеграл энергии на фазовом пространстве $T(M \setminus \Sigma)$. Тогда при $h > \sup_M V$ гиперповерхность класса C^2

(1.2) $$\{H = h\} \subset T(M \setminus \Sigma).$$

имеет естественную структуру аналитического многообразия. Функция на гиперповерхности (1.2) аналитична, если она продолжается до однородной по скорости аналитической функции на окрестности гиперповерхности (1.2) в $T(M \setminus \Sigma)$.

Теорема 1. Пусть M компактно, а потенциальная энергия V имеет $n > 2\chi(M)$ особых точек ньютоновского типа. Тогда при

(1.3) $$h > \sup_{q \in M} H(q, v(q)) = \sup_{q \in M} \left(\frac{1}{2} \| v(q) \|^2 + V(q) \right)$$

не существует непостоянных аналитических функций на гиперповерхности (1.2), являющихся первыми интегралами механической системы.

Отметим, что уравнения движения механической системы зависят лишь от дифференциала $d\Lambda$ линейной формы Λ. Поэтому в условии (1.3) можно заменить v на $v + \operatorname{grad} f$, где f — любая гладкая функция на M. Если V не имеет особых точек, $\chi(M) < 0$ и механическая система обратима, то теорема 1 совпадает с теоремой В. В. Козлова [1].

В случае некомпактного M необходимы дополнительные условия на бесконечности. Пусть $\chi(M) > -\infty$. Тогда M можно превратить в компактное двумерное многообразие $\overline{M}$, добавляя конечное число бесконечно удаленных точек ∞_i. Пусть $D_i \subset M$ — диффеоморфные дискам окрестности точек ∞_i. Предположим, что каждая замкнутая кривая в D_i, охватывающая точку ∞_i, не может быть утянута на бесконечность в D_i в классе кривых ограниченной в метрике $\langle,\rangle$ длины.

Следующая теорема — основной результат статьи.

Теорема 2. Пусть M некомпактно, кинетическая энергия T удовлетворяет приведенному условию на бесконечности, а потенциальная энергия V имеет $n > 2\chi(M)$ особых точек ньютоновского типа. Предположим, что дифференциальная форма $d\Lambda$ сохраняет знак. Тогда при условии (1.3) не существует непостоянных аналитических функций на уровне энергии (1.2), являющихся первыми интегралами механической системы.

По определению, дифференциальная форма $d\Lambda$ сохраняет знак, если либо $d\Lambda \equiv 0$ (механическая система обратима), либо M ориентируемо и $d\Lambda = f\Omega$, где $f \geqslant 0$, а Ω — не обращающаяся в нуль дифференциальная 2-форма на M.

Пример. Ограниченная круговая задача многих тел. Пусть n точек $p_1, \ldots, p_n$ закреплены в плоскости M, вращающейся вокруг точки $0 \subset M$ с постоянной угловой скоростью $\omega \perp M$, а точка $q \in M$ движется под действием сил гравитационного притяжения точками $p_1, \ldots, p_n$. Функция Лагранжа имеет вид (1.1), где

$$T = {}^1\!/_2 |q^\cdot|^2, \quad \Lambda = \langle v(q), q^\cdot\rangle = \langle [\omega, q], q^\cdot\rangle$$

$$V = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{|q - p_i|} - \frac{\omega^2 |q|^2}{2}, \quad \mu_i > 0$$

причем потенциальная энергия V имеет особенности на множестве $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Ограниченная задача многих тел интегрируема при $n = 1$ и всех ω (задача Кеплера), а также при $n = 2$ и $\omega = 0$ (задача Эйлера). Покажем, что при $n > 2$ и всех ω любой аналитический первый интеграл ограниченной задачи многих тел является функцией интеграла Якоби $H = T + V$. Имеем

$$H(q, v(q)) = V(q) + \frac{|[\omega, q]|^2}{2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{|q - p_i|} < 0$$

и $d\Lambda = 2|\omega|\Omega$, где Ω — дифференциальная форма площади на плоскости M. Так как $\chi(M) = 1$, то по теореме 2 при $n > 2$ и $h > 0$ ограниченная задача многих тел не имеет аналитических непостоянных первых интегралов на уровне интеграла Якоби $\{H = h\}$.

Для ограниченной задачи трех тел подобное утверждение не доказано. Известны лишь более слабые теоремы [2, 3]. Существует гипотеза Шази [4] об интегрируемости ограниченной задачи трех тел на уровне интеграла Якоби $\{H = h\}$, $h > 0$.

Покажем, что условия теорем 1 и 2 нельзя ослабить.

Теорема 3. Пусть заданы множество $\Sigma \subset M$, состоящее из n точек, кинетическая энергия T и $h \in R$. Тогда существует функция $V \leqslant h$ класса C^2 на $M \setminus \Sigma$, имеющая особенности ньютоновского типа на Σ, такая, что механическая система с функцией Лагранжа $L = T - V$

имеет квадратичный по скорости аналитический первый интеграл на уровне энергии $T+V=h$. Если M некомпактно или $n \leqslant 2\chi(M)$, то $V<h$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на существовании на уровне энергии (1.2) бесконечного числа периодических движений с вещественными характеристическими показателями. Сначала сведем общий случай к случаю отсутствия особенностей потенциальной энергии.

2. Регуляризация. Пусть $n > 2\chi(M)$ — число особых точек потенциальной энергии.

Лемма 1. Существует двумерное многообразие M' и аналитическое отображение $\pi\colon M' \to M$, такие, что

1) отображение $\pi\colon M' \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \to M \setminus \Sigma$ — накрытие, двукратно разветвленное над множеством Σ;

2) $\chi(M') < 0$.

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1°. Пусть n четно. Существует область $D \subset M$, диффеоморфная кругу в комплексной плоскости C, такая, что $\Sigma \subset D$. Можно считать, что $D \subset C$. Пусть f — полином степени n на D, обращающийся в нуль в точках множества Σ, а D' — риманова поверхность функции $\sqrt{f}$ [5]. Так как n четно, то край $\partial D'$ состоит из двух связных компонент. Приклеим к каждой из них по экземпляру $M \setminus D$. Проекция $\pi\colon M' \to M$ полученного многообразия на M является двулистным накрытием, двукратно разветвленным над Σ. По формуле Римана — Гурвица [5] $\chi(M') = 2\chi(M) - n < 0$.

2°. Пусть $n > 1$ нечетно. Выберем любую точку $p \in \Sigma$ и построим, как в пункте 1°, двулистное накрытие $\pi\colon N \to M$, разветвленное над $\Sigma \setminus \{p\}$. Множество $\pi^{-1}(p)$ состоит из двух точек, так что существует двулистное накрытие $\pi'\colon M' \to N$, разветвленное над $\pi^{-1}(p)$. Многообразие M' и накрытие $\pi' \circ \pi$ удовлетворяют условию леммы, причем $\chi(M') = 2(2\chi(M) - n) < 0$.

3°. Пусть $n = 1$. Так как $n > 2\chi(M)$, то $\chi(M) < 0$, так что M неодносвязно. Поэтому существует двулистное связное неразветвленное накрытие M, и этот случай сводится к рассмотренному.

Зафиксируем значение энергии h и положим $\Sigma' = \pi^{-1}(\Sigma)$.

Лемма 2. Существуют риманова метрика T', функция V' и линейная по скорости форма Λ' класса C^2 на M', такие, что

1) проекция $\pi\colon M' \setminus \Sigma' \to M \setminus \Sigma$ переводит траектории движения механической системы с функцией Лагранжа $L' = T' - V' + \Lambda'$ на TM' энергии $H' = T' + V' = 0$ в траектории движения исходной механической системы энергии $H = h$;

2) $V' \mid \Sigma' < 0$.

Доказательство. Риманова метрика T определяет на M конформную структуру. Пусть T' — произвольная риманова метрика класса C^2 на M', задающая соответствующую конформную структуру на M', и такая, что $T' = \pi^* T$ вне некоторой окрестности множества Σ'. Так как $\pi\colon M' \to M$ — конформное отображение, то существует неотрицательная функция $f \in C^2(M')$, такая, что $\pi^* T = fT'$.

Положим

$$V' \mid M' \setminus \Sigma' = f(V \circ \pi - h), \quad \Lambda' = \pi^* \Lambda$$

Пусть $g = 2\sqrt{(h-V)\,T} + \Lambda$ — метрика Якоби на $M \setminus \Sigma$, соответствующая значению энергии h, а $g' = 2\sqrt{-V'T'} + \Lambda'$ — метрика Якоби на $M' \setminus \Sigma'$, соответствующая нулевому значению энергии. По принципу Мопертюи для доказательства первого утверждения леммы достаточно показать, что $\pi^* g = g'$ на $M' \setminus \Sigma'$. Но это следует из определения V' и Λ'.

Остается показать, что для любой точки $p \in \Sigma'$ функция V' продолжается до функции класса C^2 в окрестности p и $V'(p) < 0$. Пусть $q\colon U \to C$ — конформная координата в окрестности U точки $\pi(p)$ с началом в $\pi(p)$, а $\zeta\colon U' \to C$ — соответствующая координата Леви-Чивита [6] в окрестности $U' = \pi^{-1}(U)$ точки p: $\zeta^2 = q \circ \pi$. Тогда якобиан отображения π в координатах ζ, q равен $|2\zeta|^2 = 4\,|q \circ \pi|$, так что метрика $\pi^* T$ делится на $| q \circ \pi |$. Поэтому функция f делится на $| q \circ \pi |$. По определению особой точки ньютоновского типа $V' = fV \circ \pi - fh$ продолжается до функции класса C^2 в области U' и $V'(p) < 0$. Лемма доказана.

Будем называть механическую систему с функцией Лагранжа $L' = T' - V' + \Lambda'$ регуляризованной системой.

Следствие. Пусть существует аналитический первый интеграл механической системы на уровне энергии (1.2). Тогда существует аналитический первый интеграл регуляризованной системы на уровне энергии $\{H' = 0\}$.

Доказательство. По лемме 2 регуляризованная система имеет аналитический первый интеграл F в области $U = \{H' = 0\} \cap T(M' \setminus \Sigma')$. Остается показать, что F продолжается до аналитической функции F' на $\{H' = 0\}$. Пусть g^t — фазовый поток регуляризованной системы. Так как $\{V' = 0\} \cap \Sigma' = \phi$, то множество $\{H' = 0\} \setminus U$ не содержит положений равновесия потока g^t и траектории g^t трансверсальны $\{H' = 0\} \setminus U$. Поэтому при достаточно малых $t > 0$ имеем $g^t U \cup U = \{H' = 0\}$. Положим $F' \mid g^t U = F \circ g^{-t}$. Так как $F = F \circ g^{-t}$ на $U \cap g^t U$, то F' — корректно определенная аналитическая функция на $\{H' = 0\}$, что и требовалось доказать.

Если исходная механическая система удовлетворяет условию теорем 1 и 2, то тем же свойством обладает регуляризованная система. Поэтому при доказательстве теорем 1 и 2 можно считать, что V — функция класса C^2 на всем M и $\chi(M) < 0$.

3. Первые интегралы геодезического потока. Несуществование аналитических первых интегралов (теоремы 1 и 2) будет выведено из следующего общего утверждения. Пусть M — гладкое двумерное многообразие, а $N \subset M$ — двумерное подмногообразие с краем ∂N. Назовем ∂N геодезически выпуклым в финслеровой метрике g на M, если выполнено следующее условие. Пусть $t \to \gamma(t)$ — геодезическая метрики g, такая, что $\gamma(0) \in \partial N$ и вектор $\dot\gamma(0)$ касается ∂N. Тогда $\gamma(t) \in \overline{M \setminus N}$ при достаточно малых $t \in R$.

Лемма 3. Пусть g — положительно-определенная финслерова метрика класса C^2 на связном двумерном аналитическом многообразии M. Пусть $N \subset M$ — компактное двумерное подмногообразие с краем, такое, что край ∂N — геодезически выпуклый в метрике g и $\chi(N) < 0$. Тогда не существует непостоянных аналитических первых интегралов геодезического потока на $T_1 M$.

В случае, когда $N = M$ и край ∂N пуст, а g — риманова метрика на M, это — теорема В. В. Козлова [1]. Доказательство леммы приведено в [7]. Там рассмотрен случай римановой метрики, однако обобщение на случай финслеровой метрики не представляет трудностей.

Если край ∂N пуст, то доказательство леммы повторяет доказательство теоремы В. В. Козлова. Пусть ∂N непуст. Предположим, что уравнения геодезического потока имеют аналитический первый интеграл F на $T_1 M$. Поскольку M некомпактно, теорема Лиувилля неприменима. Однако, используя выпуклость ∂N, можно показать, что каждая неособая поверхность уровня интеграла F, содержащая периодическую траекторию геодезического потока в $T_1 N$, является двумерным тором, содержащимся в $T_1 N$.

Так как $\chi(N) < 0$ и край ∂N непуст, то фундаментальная группа $\pi_1(N)$ — свободная неабелева группа. Поскольку край ∂N выпукл, каждому классу сопряженных элементов $\pi_1(N)$ отвечает кратчайшая замкнутая геодезическая в N с вещественными характеристическими показателями. Используя приведенное выше свойство поверхностей уровня интеграла F и обобщение теоремы [8] об асимптотических геодезических, можно показать, что интеграл F имеет бесконечное число критических значений на $T_1 N$ и, следовательно, постоянен. Подробности опустим.

Пусть потенциальная энергия $V \in C^2(M)$, $\chi(M) < 0$, h — значение энергии, а $g = 2\sqrt{(h-V)T} + \Lambda$ — финслерова метрика Якоби на M. Для доказательства теоремы 1 достаточно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 4. При условии (1.2) метрика Якоби положительно определена: $g \geqslant 2\sqrt{(h - H(q, v(q)))T}$.

Доказательство следует из неравенства Коши — Буняковского, т. е.

$$|\Lambda| = |\langle v(q), q^{\cdot}\rangle| \leqslant \|v(q)\| \cdot \|q^{\cdot}\|$$

так что

$$g \geqslant 2\sqrt{T}\left(\sqrt{h - V(q)} - \sqrt{{}^1/_2\|v(q)\|^2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{(h - V(q) - {}^1/_2\|v(q)\|^2)T}$$

поскольку $h - V(q) > {}^1/_2\|v(q)\|^2$.

Для доказательства теоремы 2 нужно построить подмногообразие $N \subset M$, удовлетворяющее условию леммы 3. Пусть выполнено условие теоремы 2.

Лемма 5. Существует компактное подмногообразие $N \subset M$, такое, что N гомотопически эквивалентно M и край ∂N геодезически выпукл в метрике Якоби.

Доказательство. Пусть механическая система необратима (обратимый случай проще). Тогда M ориентируемо и $d\Lambda = f\Omega$, $f \geqslant 0$, где Ω — не обращающаяся в нуль дифференциальная 2-форма на M. Форма Ω задает ориентацию M.

Лемма 6. Пусть ориентированная граница области $D \subset M$ — замкнутая геодезическая метрики Якоби. Тогда область $\overline{M \setminus D}$ геодезически выпукла в метрике Якоби.

Доказательство. Пусть τ — вектор касательной к ориентированной кривой ∂D в точке $p \in \partial D$, а n — вектор внутренней нормали к ∂D: $\langle\tau, n\rangle = 0$; $\|\tau\| = \|n\| = 1$. Тогда по определению ориентированной границы $\Omega(\tau, n) > 0$. Покажем, что малая геодезическая γ метрики g, касающаяся ∂D в точке p, целиком содержится в D. Если γ и ∂D одинаково ориентированы в точке p, то $\gamma \subset \partial D$. Пусть γ и ∂D противоположно направлены в точке p. По принципу Мопертюи кривые ∂D и γ — траектории движений $t \to \gamma_+(t)$ и $t \to \gamma_-(t)$ механической системы с энергией h и начальными условиями

$$\gamma_\pm(0) = p, \quad \gamma_\pm^{\cdot}(0) = v_\pm = \pm\sqrt{2(h - V(p))}\,\tau \tag{3.1}$$

Для выбранной нормали n в точке p определены кривизны $k_\pm$ траекторий $\gamma_\pm$ в точке p. Из уравнений движения следует, что

$$k_\pm \|v_\pm\|^2 = -\langle \operatorname{grad} V(p), n\rangle - d\Lambda(v_\pm, n)$$

В силу (3.1)

$$k_- - k_+ = \frac{d\Lambda(v_+ - v_-, n)}{\|v_\pm\|^2} = \sqrt{\frac{2}{h - V(p)}}\, f(p)\,\Omega(\tau, n) \geqslant 0$$

Следовательно, кривизна k_- кривой γ в точке p больше кривизны k_+ кривой ∂D в точке p, что и требовалось доказать.

Пусть $D_i \subset \overline{M}$ — окрестности бесконечно удаленных точек M, диффеоморфные дискам, а ∂D_i — ориентированные границы областей D_i. Поскольку M неодносвязно, кривые ∂D_i нестягиваемы в M. Из леммы 4 следует, что метрика Якоби g на M удовлетворяет условию на бесконечности, аналогичному условию на риманову метрику $\langle,\rangle$. Отсюда стандартными методами вариационного исчисления в целом [9] выводится, что гомотопический класс каждой замкнутой ориентированной кривой ∂D_i

содержит кратчайшую замкнутую геодезическую Γ_i финслеровой метрики g.

Достаточно показать, что геодезические Γ_i несамопересекающиеся и $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда по лемме 6 кривые Γ_i ограничивают подмногообразие $N \subset M$, удовлетворяющее условию леммы 5.

Так как метрика Якоби g необратима, то обычный метод Люстерника — Шнирельмана неприменим. Можно показать, что геодезическая Γ_i — ориентированная граница ∂C_i 2-цепи C_i, погруженной в $\overline{M}$ с сохранением ориентации.

Приведем набросок доказательства. Для любой ориентированной кривой $\gamma \subset M$ пусть $S(\gamma)$ — длина γ в метрике Якоби g. По лемме 4 $S(\gamma) \geqslant 0$. Пусть γ_t, $t \geqslant 0$; $\gamma_0 = \partial D_i$ — уменьшающая действие S гомотопия замкнутой кривой ∂D_i [9]. Можно считать, что γ_t — ломаная геодезическая. Пусть $\tau > 0$ — наибольшее число, такое, что при $t < \tau$ кривая γ_t — граница 2-цепи, погруженной в $\overline{M}$ с сохранением ориентации. Тогда при $t = \tau$ произошло внутреннее касание двух дуг кривой γ_τ в некоторой точке p (по предположению, понятие внутренней стороны кривой γ_τ корректно определено). Точка p разбивает γ_τ на две замкнутые кривые, одна из которых гомотопна γ_τ в M. Обозначив ее через γ_τ', имеем $S(\gamma_\tau') \leqslant S(\gamma_\tau)$, так что можно заменить γ_τ на γ_τ'. Таким образом, уменьшающую действие гомотопию ∂D_i можно осуществить в классе кривых, являющихся границей 2-цепи, погруженной в $\overline{M}$ с сохранением ориентации, что и требовалось доказать.

Покажем, что кривые Γ_i и Γ_j не пересекаются. То же рассуждение применимо для доказательства того, что кривая Γ_i несамопересекающаяся. Доказательство основано на знакопостоянстве дифференциальной формы $d\Lambda$: для любой 2-цепи D, погруженной в M с сохранением ориентации

$$\iint\limits_D d\Lambda \geqslant 0$$

Пусть $\Gamma_i = \partial C_i$, $\Gamma_j = \partial C_j$ и $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \varnothing$. Тогда $D = C_i \cap C_j$ — 2-цепь (возможно, вырожденная), погруженная в M с сохранением ориентации. Имеем $\partial D = \alpha + \beta$, где $\alpha \subset \Gamma_i$ и $\beta \subset \Gamma_j$ — ориентированные 1-цепи, ориентация которых совпадает с ориентациями Γ_i и Γ_j.

Действие Якоби ориентированной кривой $\gamma \subset M$ равно

$$S(\gamma) = L(\gamma) + \int\limits_\gamma \Lambda$$

где $L(\gamma)$ — длина кривой γ в римановой метрике $2\sqrt{(h-V)T}$. Предположим, что $L(\alpha) \geqslant L(\beta)$, и положим $\Gamma = (\Gamma_i \setminus \alpha) - \beta$, где $-\beta$ — цепь β с противоположной ориентацией. Тогда Γ — замкнутая ориентированная кривая, гомотопная Γ_i, и

$$S(\Gamma_i) - S(\Gamma) = S(\alpha) - S(-\beta) = L(\alpha) + \int\limits_\alpha \Lambda - L(\beta) + \int\limits_\beta \Lambda =$$

$$= L(\alpha) - L(\beta) + \iint\limits_D d\Lambda \geqslant 0$$

Так как Γ_i — кратчайшая замкнутая геодезическая, гомотопная ∂D_i, то Γ — тоже геодезическая метрики Якоби [9] и $S(\Gamma) = S(\Gamma_i)$. Следовательно, $\Gamma = \Gamma_i$, откуда $\alpha = -\beta$. Но это противоречит выпуклости кривых Γ_i и Γ_j (лемма 6). Теорема 2 доказана.

4. Интегрируемые системы. Пусть T — риманова метрика класса C^2 на двумерном многообразии M (кинетическая энергия). Построим потенциальную энергию $V \leqslant h$ на $M \setminus \Sigma$, удовлетворяющую условию теоремы 3. Предположим, что либо M некомпактно, либо $n = 2\chi(M)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Лемма 7. Существует функция $V < h$ класса C^2 на $M \setminus \Sigma$, имеющая особенности ньютоновского типа на Σ, такая, что $^1/_2\Delta \ln (h - V) = K$, где K — гауссова кривизна метрики T, а Δ — оператор Лапласа.

Доказательство. Пусть U — любая гладкая положительная функция на $M \setminus \Sigma$, такая, что функция $-U$ имеет особенности ньютоновского типа в точках множества Σ. Тогда в конформных координатах q в окрестности точки $p \in \Sigma$ имеем $U = f(q)/|q|$, $f(0) > 0$. Поэтому

(4.1) $$\ln U(q) = \ln f(q) - {}^1/_2 (\ln q + \ln \bar{q}), \quad \Delta \ln U = \Delta \ln f$$

так что $\Delta \ln U$ — гладкая функция на M. Достаточно показать, что существует гладкая функция φ на M, такая, что

(4.2) $$\Delta\varphi = K - {}^1/_2\Delta \ln U$$

Действительно, тогда можно положить $V = h - Ue^{\varphi}$.

Если многообразие M некомпактно, то уравнение (4.2) всегда имеет решение [5]. Предположим, что M компактно и $n = 2\chi(M)$. Пусть для простоты M ориентировано, а Ω — дифференциальная форма площади на M. По формуле Грина

$$\iint\limits_M \frac{1}{2}\Delta \ln U \cdot \Omega = -\sqrt{-1}\iint\limits_M d(\partial \ln U) = 2\pi \sum_{p \in \Sigma} \operatorname{res}_p \partial \ln U =$$
$$= \pi n \cdot \operatorname{res}_0 \frac{dq}{q} = \pi n$$

в силу (4.1). По формуле Гаусса — Бонне

$$\iint\limits_M \left(K - \frac{1}{2}\Delta \ln U\right)\Omega = 2\pi\chi(M) - \pi n = 0$$

Следовательно, уравнение (4.2) имеет решение. Лемма доказана.

Гауссова кривизна метрики Якоби $g = 2\sqrt{(h - V)T}$ построенной системы есть

$$K_g = \frac{1}{2(h-V)}\left(K - \frac{1}{2}\Delta \ln (h - V)\right) = 0$$

Поэтому метрика Якоби регуляризованной системы на M' евклидова. Можно показать, что регуляризованная система имеет линейный по скорости первый интеграл F на нулевом уровне энергии в TM'. В компактном случае M' — тор, так что это очевидно. Пусть $\pi : M' \to M$ — двулистное накрытие, построенное в лемме 1, а σ: $M' \to M'$ — переставляющая слои инволюция: $\pi \circ \sigma = \pi$ и $\sigma^2 = 1$. Можно показать, что $\sigma^* F = -F$. Поэтому функция F^2 инвариантна при инволюции σ и, следовательно, опускается проекцией π до квадратичного по скорости первого интеграла построенной системы на уровне энергии $\{T + V = h\}$.

Автор благодарен В. И. Арнольду и В. В. Козлову за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 6, с. 1299—1302.
2. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
3. *Siegel C. L.* Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems. Trans. Amer. Math. Soc., 1936, v. 39, No. 2, p. 225—233.
4. *Алексеев В. М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. Успехи матем. наук, 1981, т. 36, № 4, с. 161—176.
5. *Форстер С.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980. 248 с.
6. *Levi-Civita T.* Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi.— Rend. Accad. Naz. Lincei. Ser. 5, 1915, v. 24, p. 61—75.
7. *Болотин С. В.* Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$.— Вестн. МГУ. Сер. матем., 1984, № 3, с. 65—68.
8. *Гайдуков Е. В.* Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере.— Докл. АН СССР, 1966, т. 169, § 5, с. 999—1001.
9. *Зейферт Г., Трефалль В.* Вариационное исчисление в целом. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 148 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.VI.1983