Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Иртегов В. Д.

На основе второго метода Ляпунова исследуется устойчивость вложенных друг в друга вырожденных инвариантных многообразий стационарных движений механических систем [1].

1. Постановка задачи. Рассматриваются вопросы выделения и качественного исследования инвариантных многообразий стационарных движений автономных дифференциальных уравнений механических систем

$$x_i^{\cdot} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

с гладкими правыми частями в $U \subset R^n$, порождаемых их первыми интегралами

$$V_0(x_1, \ldots, x_n) = c_0, \quad V_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, \quad V_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m \tag{1.2}$$

которые также предполагаются автономными и гладкими (даже аналитическими) в соответствующей области $V \subset U \subset R^n$.

Составим «полный» интеграл системы (1.1)

$$K = \lambda_0 V_0(x) + \lambda_1 V_1(x) + \ldots + \lambda_m V_m(x)$$

Одну из величин $\lambda_j = \text{const}$ в K всегда можно считать единицей. В дальнейшем будем полагать $\lambda_0 = 1$, так как при общих рассуждениях не требуется специально разбирать случай $\lambda_0 = 0$. Выпишем уравнения, определяющие совместно с (1.2) семейства инвариантных многообразий системы (1.1), соответствующие интегралу K

$$y_i = \partial K/\partial x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}$$

Матрица Якоби преобразования от x к y имеет вид

$$J = \| \partial y_i/\partial x_j \| = \| \partial^2 K/\partial x_i \partial x_j \|$$

В дальнейшем будем рассматривать те семейства инвариантных многообразий, определяемые соотношениями (1.3), (1.2), на которых

$$\det J = \Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0 \tag{1.4}$$

Определение 1. Инвариантные многообразия, определяемые K, будем называть вырожденными, если на них $\det J = 0$.

Пусть выделено некоторое вырожденное семейство инвариантных многообразий системы (1.1), задаваемой $k < n$ независимыми по x уравнениями из (1.3)

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = 0, \ldots, \\ y_k &= f_k(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

и параметризованное величинами $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$, оставшимися в соотношениях (1.3) после соответствующего учета условия (1.4). В качестве переменных на многообразии (1.5) при фиксированных $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ выбираем часть координат x_i. Одного такого набора в общем случае может быть не-достаточно для описания всего многообразия. Будем использовать тогда несколько таких наборов в соответствующих картах [2]. В каждой карте, например в карте с координатами $x_1, \ldots, x_{n-k}$, можно определить векторное поле, порождаемое на рассматриваемом многообразии исходными уравнениями (1.1)

$$x_j^{\cdot} = X_j\,(x_1, \ldots, x_{n-k}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f); \; j = 1, 2, \ldots, n-k$$

Также можно выписать сужение интегралов (1.2) для этого поля при данном выборе независимых переменных

$$V_0\,(x_1, \ldots, x_{n-k}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = c_0, \ldots, V_l\,(x_1, \ldots, x_{n-k}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = c_l$$

которых, как правило, будет меньше, чем $m+1$.

Аналогично в других картах получим уравнения в виде

(1.6) $$x_{i_1}^{\cdot} = X_{i_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f), \ldots, \dot{x}_{i_{n-k}} = X_{i_{n-k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f)$$

и соответствующие интегралы

(1.7) $$V_0(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = c_0, \ldots, V_l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = c_l$$

Должны быть определены, естественно, и преобразования перехода от карты к карте соответствующей гладкости.

Все изложенное позволяет ставить задачу об отыскании семейств инвариантных многообразий стационарных движений второго уровня, порождаемых на многообразии (1.5) в каждой карте интегралами (1.7) уравнений (1.6) по той же схеме, что и для уравнений (1.1), (1.2). Можно, продолжая этот процесс, получить инвариантные многообразия третьего и более высокого уровня. Это дает возможность классифицировать стационарные движения по вложению и степени вырождения. Такая классификация подобна классификации Тома особенностей отображения [3].

Рассмотрим вопрос устойчивости выделяемых указанным выше способом многообразий стационарных движений различных уровней. Достаточные условия устойчивости естественно здесь получать на основе теорем [4, 5], используя имеющиеся в задаче первые интегралы в качестве функций Ляпунова.

Оговорим необходимые для дальнейшего изложения понятия. Пусть исходное вырожденное семейство стационарных движений в объемлющем пространстве задается системой (1.5). Введем отклонения от многообразия (1.5) при помощи переменных $y_1, \ldots, y_k$ и назовем их далее «нормальными» к многообразию координатами. Запишем уравнения возмущенного движения, которые получим из (1.1), выбирая в каждой карте за переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, y_1, \ldots, y_k$

(1.8) $$\begin{aligned} y_1^{\cdot} &= Y_1(y_1, \ldots, y_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{\cdot} &= Y_k(y_1, \ldots, y_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) \\ x_{i_1}^{\cdot} &= X_{i_1}(y_1, \ldots, y_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{i_{n-k}} &= X_{i_{n-k}}(y_1, \ldots, y_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) \end{aligned}$$

Последние при $y_1 = \ldots = y_k = 0$ переходят в систему (1.6), определяющую движения на многообразии (1.5) в выбранной карте.

Пусть у исходной системы (1.1) имеется первый интеграл

$$V(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = c$$

который в одной из карт в координатах $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, y_1, \ldots, y_k$ принимает вид

$$V(y_1, \ldots, y_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = c \tag{1.9}$$

Ясно, что в любой другой карте вид интеграла (1.9), вообще говоря, не будет меняться, так как переход от карты к карте сводится к замене отсутствующих в (1.9) переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}$ на переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}}$.

Если такой интеграл (1.9) оказывается знакоопределенным по $y_1, \ldots, y_k$ при значениях $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ из некоторого множества, то на основании немного модифицированной теоремы В. В. Румянцева [5] можно делать заключение об устойчивости части нашего семейства (1.5) (или всего семейства) многообразий в смысле следующего

Определение 2. Многообразие устойчиво, если для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только в начальный момент времени $t = t_0$ для любой карты

$$\| y(t_0) \| < \delta \tag{1.10}$$

то при всех $t > t_0$ для любой карты вдоль любой траектории, удовлетворяющей при $t = t_0$ условию (1.10), $\| y(t) \| < \varepsilon$. Здесь $\| \cdot \|$ — норма $(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2)^{1/2}$, или любая ей эквивалентная по всем нормальным к многообразию координатам.

Замечание. Всегда можно $\| y \|$ трактовать как расстояние от точки фазового пространства до многообразия (1.5). Поэтому определение 2 есть сформулированное в координатной форме условие устойчивости множества [6, 7].

В ряде задач динамики твердого тела возникает ситуация, когда система уравнений возмущенного движения типа (1.8) допускает общий интеграл вида

$$V(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}, y_1, \ldots, y_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_f) = c = 1 \tag{1.11}$$

постоянная которого фиксируется из некоторых (скажем, геометрических) соображений. Если интеграл (1.11) входил в связку интегралов K, породивших множество (1.5), то выражение (1.11) вытекает из совокупности стационарных движений на (1.5) некоторое подмногообразие.

Часто удобно ставить вопрос об устойчивости всего семейства многообразий (1.5), имея в виду, что выделяемое (1.11) подмногообразие в (1.5) будет наследовать устойчивость объемлющего многообразия.

Рассмотрим еще одну возможную постановку задачи устойчивости при наличии интеграла (1.11).

Определение 3. Параметризованное семейство инвариантных многообразий (1.5) совокупности систем (1.8) с интегралом (1.11) допускает подсемейство с движениями, сколь угодно близко примыкающими к нулю по переменным x_{i_1}, x_{i_d}, если для всяких сколь угодно малых $| x_{i_1}^\circ |, \ldots, | x_{i_d}^\circ |$ существуют $\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_f^\circ$, такие, что

$$V(\mathring{x}_{i_1}, \ldots, \mathring{x}_{i_d}, x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_{n-k}}, 0, \ldots, 0, \lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_f^\circ) = 1$$

Определение 4. Параметризованное семейство многообразий (1.5) совокупности систем (1.8) с интегралом (1.11) допускает устойчивое под семейство многообразий с движениями, остающимися сколь угодно близко к нулю по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ если:

1°. Системы (1.8) с интегралом (1.11) допускают подсемейство семейства многообразий (1.5) со свойствами, оговоренными определением 3.

2°. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$, такие, что если

$$\sum_{j=1}^{d} x_{i_j}^2(t_0) < \delta_1, \quad \sum_{i=1}^{k} y_i^2(t_0) < \delta_2$$

то

$$\sum_{j=1}^{d} x_{i_j}^2(t) + \sum_{i=1}^{k} y_i^2(t) < \varepsilon$$

при соответствующем выборе $\lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_f^\circ$ из некоторого множества при всех $t > t_0$.

Для получения достаточных условий наличия у системы подсемейства инвариантных многообразий со свойствами, указанными в определении 4, можно использовать теоремы, являющиеся небольшой модификацией теорем [5] об устойчивости по части переменных. Для дальнейшего будет достаточно следующего утверждения: если уравнения возмущенного движения (1.8) с интегралом (1.11) допускают в соответствующих картах знакоопределенный по переменным $y_1, \ldots, y_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ при значениях $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ из множества, где реализуются свойства, постулируемые определением 3, интеграл

$$W(x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}, y_1, \ldots, y_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_f)$$

то система обладает подсемейством многообразий со свойствами из определения 4.

Доказательство этого утверждения проходит по стандартной схеме доказательств теорем об устойчивости во втором методе Ляпунова.

2. Инвариантные многообразия волчка Ковалевской. Рассмотрим примеры исследования устойчивости вырожденных инвариантных многообразий стационарных движений в динамике твердого тела. Пусть распределение масс тела с неподвижной точкой отвечает условиям Ковалевской ($A = B = 2C$, $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$). Известно [8], что интеграл Ковалевской

$$V_2 = (p^2 - q^2 - x_0\gamma_1)^2 + (2pq - x_0\gamma_2)^2 = k^2$$

порождает в этом случае инвариантное многообразие стационарных движений Делоне, которое определяется в фазовом пространстве системы двумя уравнениями

(2.1) $$y_1 = p^2 - q^2 - x_0\gamma_1 = 0, \quad y_2 = 2pq - x_0\gamma_2 = 0$$

и имеет, следовательно, степень вырождения четыре. Исходные дифференциальные уравнения Эйлера — Пуассона в данной задаче дают для этого многообразия следующие уравнения возмущенного движения:

(2.2) $$2p^\cdot = qr, \quad 2q^\cdot = -rp + x_0\gamma_3, \quad r^\cdot = y_2 - 2pq$$
$$\gamma_3^\cdot = -[q(p^2 + q^2) + qy_1 - py_2]/x_0, \quad y_1^\cdot = ry_2, \quad y_2^\cdot = -ry_1$$

которые при $y_1 = y_2 = 0$ определяют векторное поле на самом многообразии (2.1)

(2.3) $$2p^\cdot = qr, \quad 2q^\cdot = -rp + x_0\gamma_3, \quad r^\cdot = -2pq, \quad \gamma_3^\cdot = -q(p^2 + q^2)/x_0$$

Последние допускают интегралы

$$(2.4)\qquad 2H = 4p^2 + r^2 = 2h,\ V_1 = r\gamma_3 + 2p\,(p^2 + q^2)/x_0 = m$$
$$V_3 = \gamma_3^2 + (p^2 + q^2)/x_0^2 = 1$$

являющиеся сужением на множество движений Делоне классических интегралов задачи Ковалевской [9]. Образованный из выражений (2.4) полный интеграл уравнений (2.3)

$$K = H - \nu_1 V_1 - {}^1/_2\nu_2 V_3$$

порождает инвариантные многообразия стационарных движений второго уровня, лежащие на множестве (2.1).

Среди многообразий второго уровня, порождаемых K, отметим: «маятниковые колебания» вокруг горизонтальной оси y

$$(2.5)\qquad 4p = 0,\ r = 0,\ \nu_1 = \nu_2 = 0$$

описываемые дифференциальными уравнениями

$$2q^{\bullet} = x_0\gamma_3,\quad \gamma_3^{\bullet} = -q^3/x_0$$

движения, лежащие на однопараметрическом семействе, определяемом уравнениями

$$(2.6)\qquad 2\nu_1 x_0 p - \nu_1^2\,(p^2 + q^2) = 0,\quad r - \nu_1\gamma_3 = 0,\ \nu_1^2 + \nu_2 = 0$$

Поскольку единой системы координат на этой цилиндрической поверхности ввести нельзя, то естественно использовать несколько таких наборов при $\nu_1 \neq 0$ и $\nu_1 x_0 > 0$;

$$(2.7)\qquad 1^\circ.\ r,\ p;\ 0 < p < 2x_0/\nu_1,\ 0 < q \leqslant x_0/\nu_1,\ q = P$$
$$2^\circ.\ r,\ p;\quad 0 < p < 2x_0/\nu_1,\ \ -x_0/\nu_1 \leqslant q < 0,\ \ q = -P$$
$$3^\circ.\ r, q;\ -x_0/\nu_1 < q < x_0/\nu_1,\ x_0/\nu_1 < p \leqslant 2x_0/\nu_1,\ p = \frac{x_0}{\nu_1} + Q$$
$$4^\circ.\ r, q;\ -x_0/\nu_1 < q < x_0/\nu_1,\ 0 \leqslant p < x_0/\nu_1,\ p = \frac{x_0}{\nu_1} - Q$$
$$\left(P = \left(\frac{2px_0}{\nu_1} - p^2\right)^{1/2},\ Q = \left(\frac{x_0^2}{\nu_1^2} - q^2\right)^{1/2}\right)$$

Для случая $\nu_1 x_0 < 0$ ситуация точно такая же.

В каждой из карт (2.7) на многообразии (2.6) при помощи уравнений (2.3) определяется векторное поле

$$(2.8)\qquad 1^\circ.\ 2p^{\bullet} = rP,\quad r^{\bullet} = -2pP$$
$$2^\circ.\ 2p^{\bullet} = -rP,\quad r^{\bullet} = 2pP$$
$$3^\circ.\ 2q^{\bullet} = -rQ,\ r^{\bullet} = -2q\left(\frac{x_0}{\nu_1} + Q\right)$$
$$4^\circ.\ 2q^{\bullet} = rQ,\ r^{\bullet} = -2q\left(\frac{x_0}{\nu_1} - Q\right)$$

Для первых двух карт векторное поле допускает первый интеграл

$$(2.9)\qquad 4p^2 + r^2 = \nu_1^2$$

который в третьей и четвертой картах принимает вид

$$(2.10)\qquad 4\left(\frac{x_0}{\nu_1} + Q\right)^2 + r^2 = \nu_1^2$$
$$(2.11)\qquad 4\left(\frac{x_0}{\nu_1} - Q\right)^2 + r^2 = \nu_1^2$$

соответственно. Интеграл (2.9), (2.10), (2.11) имеет тип (1.11) при каждом фиксированном ν_1^2 и может быть использован также для нахождения многообразий стационарных движений третьего уровня, лежащих на (2.6).

В третьей карте интеграл (2.10) порождает в качестве многообразия третьего уровня перманентное вращение

$$(2.12)\qquad r=q=0\left(p=\frac{2x_0}{\nu_1}=\sqrt{x_0},\ \nu_1=2\sqrt{x_0}\right)$$

где значение параметра ν_1 определяется после подстановки решения в интеграл (2.10).

В четвертой карте претендентом на решение третьего уровня будет

$$r=q=0\qquad (p=0)$$

но оно не удовлетворяет при подстановке интегралу (2.10) при $\nu_1\neq 0$ и, значит, не является стационарным движением.

Теперь вернемся к анализу системы инвариантных многообразий, которые высекает интеграл (2.9), (2.10), (2.11) на поверхности (2.6) ($\nu_1 x_0>0$). Видно, что при каждом фиксированном $\nu_1>2\sqrt{x_0}$ пересечение цилиндра (2.6) с цилиндром (2.9) определяет две траектории, охватывающие первый из них; $\nu_1=2\sqrt{x_0}$ соответствует двум сепаратрисным кривым, примыкающим обеими концами к перманентному вращению (2.12); наконец, при $0<\nu_1<2\sqrt{x_0}$ получаются замкнутые кривые, лежащие на поверхности (2.6) и охватывающие точку $p=q=r=0$. При $\nu_1=0$ многообразие (2.6) вырождается и получаем здесь в качестве предельного инвариантного многообразия совокупность маятниковых колебаний (2.5).

Вопросы об особенностях семейств множеств стационарных движений по параметрам обсуждаться здесь не будут.

3. Устойчивость. Перейдем к исследованию устойчивости перечисленных выше наборов стационарных движений.

Уравнения (2.2) допускают первый интеграл [8]

$$\Delta V_2=y_1^2+y_2^2\geqslant 0$$

и, следовательно, все многообразие стационарных движений Делоне устойчиво в фазовом пространстве системы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости параметризованной системы многообразий, определяемых уравнениями (2.6), по отношению к движениям Делоне. Вводя «нормальные координаты»

$$z_1=2px_0-\nu_1(p^2+q^2),\quad z_2=r-\nu_1\gamma_3$$

запишем уравнения возмущенного движения этого семейства по отношению к многообразию (2.1), используя все четыре карты на (2.6). Так, в четвертой карте нужные уравнения имеют вид

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} z_1^{\cdot}=x_0qz_2,\quad r^{\cdot}=-2q\left(\frac{x_0}{\nu_1}-R\right)\\ z_2^{\cdot}=-qz_1/x_0,\quad 2q^{\cdot}=-\frac{x_0z_2}{\nu_1}+rR\\ R=[(x_0/\nu_1)^2-q^2-(z_1/\nu_1)]^{1/2}\end{gathered}$$

Подобные уравнения будут иметь место и в остальных трех картах. Просто проверяется, что уравнения (3.1) допускают интеграл

$$2\Delta K=z_2^2+z_1^2/x_0^2$$

который, естественно, будет иметь место и в остальных картах. Он позволяет сделать заключение об устойчивости многообразия (2.6) по отношению к многообразию движений Делоне.

Поскольку действительное семейство (2.6), (2.9) отличается от (2.6) только фиксацией постоянной интеграла косинусов, то и это параметризованное многообразие будет устойчиво по переменным z_1 и z_2 по отношению к стационарным движениям Делоне при любых положительных значениях параметра $\nu_1 \neq 0$.

Обратим внимание на то, что уравнения возмущенного движения в четвертой карте (3.1) допускают следующие два интеграла:

$$\Delta V_3 = \frac{(2px_0 - z_1)^2}{x_0^2 \nu_1^2} + \frac{r^2}{\nu_1^2} = 1 \tag{3.2}$$

$$\Delta W = z_2^2 + rz_2 + \frac{r^2}{2} + \frac{z_1^2}{2x_0^2} + 4p^2 \tag{3.3}$$

Из формулы (3.2) непосредственно следует, что при $z_1 = z_2 = 0$ и любых сколь угодно малых $|p^\circ|$ и $|r^\circ|$ подбором ν_1° всегда можно удовлетворить соотношению

$$4p^{\circ 2}/\nu_1^{\circ 2} + r^{\circ 2}/\nu_1^{\circ 2} = 1 \quad (p = (x_0/\nu_1) - Q)$$

т. е. здесь выполняются условия определения 3 с малыми $|p^\circ|$ и $|r^\circ|$ на многообразии (2.6).

Интеграл (3.3) знакоопределен по переменным z_1, z_2, p, r при любых $\nu_1 > 0$. Таким образом, можем говорить об устойчивости части семейства многообразий (2.6), (2.11) с малыми движениями по p и r при соответствующем выборе параметра ν_1° в смысле определения 4.

Рассмотрим еще вопрос об устойчивости инвариантного многообразия маятниковых колебаний тела (2.5) по отношению к многообразию Делоне. Здесь уравнения возмущенного движения совпадают с уравнениями движения на многообразии Делоне (2.3). Роль нормальных к многообразию (2.5) координат играют переменные p и r. При $p = r = 0$ получаем из уравнений (2.3) векторное поле на множестве маятниковых колебаний (2.5).

Уравнения (2.3) допускают знакоопределенный по нормальным координатам первый интеграл

$$H = 2p^2 + r^2/2$$

откуда и следует вывод об устойчивости совокупности движений (2.5) по отношению к многообразию Делоне. Обратим внимание на то, что предельное для устойчивого семейства (2.6) многообразие (2.5) тоже получилось устойчивым.

Наконец, коснемся задачи о том, когда можно из устойчивости многообразия низшего уровня и устойчивости в нем многообразия более высокого уровня сделать заключение об устойчивости последнего в исходном фазовом пространстве.

Определение 5. Многообразие второго уровня устойчиво в фазовом пространстве системы, если оно устойчиво по нормальным координатам первого и второго уровней.

Ограничимся здесь конкретным примером получения достаточных условий такой устойчивости при помощи функции Ляпунова в виде связки из первых интегралов.

Рассмотрим вопрос об устойчивости маятниковых колебаний (2.5) в фазовом пространстве твердого тела. Запишем уравнения возмущенного движения задачи, используя нормальные координаты многообразия (2.5) в многообразии Делоне (p, r) и нормальные координаты многообразия Делоне в фазовом пространстве (y_1, y_2). Нужные уравнения получатся из уравнений Эйлера — Пуассона исходной задачи Ковалевской в виде

$$\begin{aligned} &y_1^{\cdot} = ry_2, \quad y_2^{\cdot} = -ry_1, \quad 2p^{\cdot} = qr, \quad 2q^{\cdot} = -rp + x_0\gamma_3 \\ &r^{\cdot} = -2pq + y_2, \quad \gamma_3^{\cdot} = -[q(p^2 + q^2) + qy_1 - py_2]/x_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Невозмущенное решение здесь $p = r = y_1 = y_2 = 0$ с векторным полем на нем

$$2q^{\cdot} = x_0\gamma_3, \quad \gamma_3^{\cdot} = -q^3/x_0$$

Уравнения (3.4), как было показано выше, допускают интегралы

$$\Delta V_2 = y_1^2 + y_2^2, \quad 2\Delta H = 4p^2 + r^2 - 2y_1 \tag{3.5}$$

Последний есть возмущение первого интеграла (2.4) при вариации многообразия Делоне.

Видно, что из интегралов (3.5) можно образовать связку

$$L = \Delta H^2 - \varkappa\Delta V_2 = {}^1/_4\,(4p^2 + r^2 - 2y_1)^2 - \varkappa\,(y_1^2 + y_2^2)$$

которая при $\varkappa < -1$ — определенно-положительная функция по всем нормальным координатам системы (3.4).

Таким образом, на основании слегка модифицированной теоремы В. В. Румянцева можно сделать вывод об устойчивости маятниковых колебаний тела (2.5) в фазовом пространстве системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости.— Соб. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 276—319.
2. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с.
3. *Арнольд В. И.* Особенности гладких отображений.— Успехи матем. наук, 1968, т. 23, № 1, с. 3—44.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Т. 2. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 263.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9—16.
6. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. школа, 1973. 272 с.
7. *Зубов В. И.* Устойчивость интегральных многообразий.—Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 9, с. 1720—1722.
8. *Бурлакова Л. А., Иртегов В. Д.* Теорема Рауса — Ляпунова в системах с линейными интегралами.— В кн.: Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981, с. 151—165.
9. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953, 288 с.

Иркутск

Поступила в редакцию 18.IV.1983