Прикладная математика и механика. Том 48, вып. 3, 1984

УДК 531.36

УСЛОВИЯ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ЧЕТНЫХ ФОРМ И УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.

Получены достаточные условия знакоопределенности форм произвольной четной степени. Предлагается новый критерий знакоопределенности квадратичной формы, имеющий характер рекуррентной процедуры. При помощи этих результатов и второго метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью в виде однородных многочленов.

1. Пусть в области $G_x \subset R^n$ задана непрерывная вещественная функция $F(x)$ переменных $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x} \in R^n$ с областью значений $H_F \subset R^1$, обращающаяся в нуль в начале координат

$$F(0) = 0 \tag{1.1}$$

Требуется найти условия, при выполнении которых функция $F(\mathbf{x})$ будет положительно-определенной, т. е.

$$F(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in G_x \setminus 0 \tag{1.2}$$

Для этого введем непрерывную вещественную функцию $P(y)$ переменных $(y_1, \ldots, y_m) = \mathbf{y}$, определенную в области $G_y \subset R^m$ с областью значений $H_P \subset R^1$, причем $H_P \supset H_F$, и являющуюся положительно-определенной в G_y, т. е.

$$P(\mathbf{y}) > 0, \quad \forall \mathbf{y} \in G_y \setminus 0, \; P(0) = 0 \tag{1.3}$$

Переменные $y_1, \ldots, y_m$ связаны с переменными $x_1, \ldots, x_n$ при помощи некоторого отображения

$$y_i = f(x_1, \ldots, x_n), \; i = 1, \ldots, m \tag{1.4}$$

Пусть отображение (1.4) и функции $F(\mathbf{x})$, $P(\mathbf{y})$ обладают следующими свойствами.

А. Область определения отображения (1.4) совпадает с областью G_x, а область значений составляет некоторое подмножество G_y^* множества G_y $(G_y^* \subset G_y)$, причем начало координат $\mathbf{y} = 0 \in G_y^*$ и на множестве точек G_y^* выполняется тождество

$$\forall \mathbf{y} \in G_y^*, \quad \exists x \in G_x: \; F(\mathbf{x}) = P(f(\mathbf{x})) \tag{1.5}$$

т. е. каждой точке $\mathbf{y} \in G_y^*$ соответствует по крайней мере одна точка $\mathbf{x} \in G_x$, в которой значение функции $F(\mathbf{x})$ совпадает со значением функции $P(\mathbf{y})$ при отображении (1.4).

Б. Равенства $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$ одновременно выполняются тогда и только тогда, когда одновременно обращаются в нуль все переменные $x_1, \ldots, x_n$, т. е. если хотя бы одна координата $x_j \neq 0$, то обязательно найдется координата $y_i \neq 0$.

В. Если функция $P(\mathbf{y})$ положительно определена в G_y^*, то она будет положительно-определенной во всей области G_y.

Теорема 1. При выполнении свойств А и Б для положительной определенности функции F (x) в области G_x достаточно, чтобы была положительно-определенной функция P (y) в области G_y.

Доказательство. Пусть функция P (y) положительно определена в G_y, т. е. выполняются условия (1.3). В силу свойства А имеем $G_y^* \subset G_y$ и точка $y = 0 \in G_y^*$. Поэтому P (y) положительно определена в G_y^*. Кроме того, в силу того же свойства А в G_y^* выполняется тождество (1.5). Тогда $F(\mathrm{x}) > 0$, $\forall \mathrm{x} \in G_x$, за исключением прообраза точки $\mathrm{y} = \mathbf{0}$ в области G_x, т. е. выполняется условие (1.2). Но $P(\mathbf{0}) = 0$. Тогда из свойства Б следует, что функция P (y) обращается в нуль только при условии, что $x_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Следовательно, прообразом точки $\mathrm{y} = \mathbf{0}$ в G_x является единственная точка $\mathrm{x} = \mathbf{0}$. Поэтому для функции $F(x)$ выполняется условие (1.1), значит, она положительно определена в G_x.

Теорема 2. При выполнении свойств А, Б и В для положительной определенности функции $F(x)$ в области G_x необходимо и достаточно, чтобы была положительно-определенной функция P (y) в области G_y.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция F (x) положительно определена в G_x, т. е. выполняются условия (1.1) и (1.2). Тогда в силу свойства А отображения (1.4) каждой точке $\mathrm{y} \in G_y^*$ будет соответствовать по крайней мере одна точка $\mathrm{x} \in G_x$, причем в этих точках x и y выполняется тождество (1.5). Но в каждой точке $\mathrm{x} \in G_x$ $(\mathrm{x} \neq \mathbf{0})$ функция $F(\mathrm{x}) > 0$, а значит, согласно тождеству (1.5) и функция $P(\mathrm{y}) > 0$, $\forall \mathrm{y} \in G_y^* \setminus \mathbf{0}$. А так как имеет место свойство Б, то выполняется второе условие (1.3), т. е. функция $P(\mathrm{y}) = 0$ в точке $\mathrm{y} = \mathbf{0}$ пространства R^m. Таким образом, P (y) положительно определена в G_y^*. Тогда из свойства В следует, что функция P (y) положительно определена во всей области G_y, т. е. выполняются условия (1.3).

Доказательство достаточности теоремы 2 совпадает с доказательством теоремы 1.

2. Применим полученные результаты для отыскания достаточных условий знакоопределенности формы степени $2s$ (s — целое положительное число, $s > 1$), т. е. функции

$$F(\mathrm{x}) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \cdots \sum_{i_{2s}=i_{2s-1}}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2s}}, \quad \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \tag{2.1}$$

где $A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}$ — вещественные числа.

В форме (2.1) подобные члены приведены и расположены в лексикографическом порядке.

Рассмотрим следующее отображение:

$$y_1 = x_1^s,\ y_2 = x_1^{s-1} x_2,\ y_3 = x_1^{s-1} x_3,\ \ldots,\ y_m = x_n^s \tag{2.2}$$

Известно, что элементы $y_1, \ldots, y_m$ отображения (2.2) линейно независимы, а векторы $y = (y_1, \ldots, y_m)$ образуют линейное пространство размерности m [1], которое обозначим через Y^m (Y^m — реализация пространства R^m).

Квадратичная форма в пространстве Y^m имеет вид

$$P(\mathrm{y}) = \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} B_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2}, \quad B_{j_1 j_2} = B_{j_2 j_1} \tag{2.3}$$

Подставляя $y_1, \ldots, y_m$ из отображения (2.2) в квадратичную форму (2.3) и приводя подобные члены, получим формулу степени $2s$ (2.1), т. е. имеем тождество

$$\forall y \in G_y^*, \quad \exists x \in R^n:$$

$$\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m} B_{j_1j_2}y_{j_1}y_{j_2} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1}^{n}\ldots\sum_{i_{2s}=i_{2s-1}}^{n} A_{i_1i_2\ldots i_{2s}}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{2s}} \tag{2.4}$$

где G_y^* — область значений отображения (2.2) в пространстве Y^m ($G_y^* \subset \subset Y^m$), причем точка $y = 0 \in G_y^*$.

Следовательно, свойство А для отображения (2.2), для формы $F(x_1, \ldots, x_n)$ (2.1) и для квадратичной формы $P(y_1, \ldots, y_m)$ (2.3) выполняется.

Для отображения (2.2) выполняется также свойство Б. Действительно, если некоторая координата $x_j \neq 0$, то согласно отображению (2.2) координата $y_i = x_j^s \neq 0$.

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 для положительной определенности формы четной степени (2.1) достаточно, чтобы была положительно-определенной квадратичная форма (2.3). Записывая какой-либо критерий знакоопределенности квадратичной формы (2.3) и выражая в нем коэффициенты $B_{j_1j_2}$ квадратичной формы (2.3) через коэффициенты $A_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$ формы четной степени (2.1) согласно тождеству (2.4), получим искомые условия знакоопределенности формы четной степени (2.1).

Покажем на примере, как по коэффициентам формы четной степени (2.1) находить значения коэффициентов квадратичной формы (2.3).

Пример 1. Дана форма четвертой степени двух переменных с постоянными коэффициентами

$$F(x_1, x_2) = A_{1111}x_1^4 + A_{1112}x_1^3x_2 + A_{1122}x_1^2x_2^2 + A_{1222}x_1x_2^3 + A_{2222}x_2^4 \tag{2.5}$$

Введем отображение

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_2^2 \tag{2.6}$$

Векторы $y = (y_1, y_2, y_3)$ образуют линейное пространство Y^3 [1]. Квадратичная форма в пространстве Y^3 имеет вид

$$P(y_1, y_2, y_3) = B_{11}y_1^2 + 2B_{12}y_1y_2 + 2B_{13}y_1y_3 + B_{22}y_2^3 + 2B_{23}y_2y_3 + B_{33}y_3^2 \tag{2.7}$$

Для представления формы четвертой степени (2.5) в виде квадратичной формы (2.7) надо прибавить к функции (2.5) член $\alpha_{1122}x_1^2x_2^2$ и вычесть $\alpha_{1122}(x_1x_2)^2$. В результате функция (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = {} & A_{1111}(x_1^2)^2 + A_{1112}x_1^2x_1x_2 + \alpha_{1122}x_1^2x_2^2 + \\ & + (A_{1122} - \alpha_{1122})(x_1x_2)^2 + A_{1222}x_1x_2x_2^2 + A_{2222}(x_2^2)^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Приравнивая функции (2.7) и (2.8), учитывая отображение (2.6) и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах этих функций, получаем значения коэффициентов квадратичной формы (2.7)

$$\begin{aligned} & B_{11} = A_{1111}, \quad B_{12} = {}^1/_2A_{1112}, \quad B_{13} = {}^1/_2\alpha_{1122} \\ & B_{22} = A_{1122} - \alpha_{1122}, \quad B_{23} = {}^1/_2A_{1222}, \quad B_{33} = A_{2222} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Поступая аналогичным образом в случае формы четной степени (2.1), находим значение коэффициентов $B_{j_1j_2}$ квадратичной формы (2.3), которые, таким образом, являются функциями коэффициентов $A_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$ и вспомогательных вещественных чисел $\alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$.

3. При проверке знакоопределенности квадратичных форм обычно пользуются критерием Сильвестра [1]. Здесь, используя теорему 2, получим новый критерий знакоопределенности квадратичной формы, представляющей собой достаточно простую рекуррентную процедуру вычислений.

Пусть дана квадратичная форма с постоянными вещественными коэффициентами

$$\Phi(\mathrm{x}) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} A_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2}, \quad A_{i_1 i_2} = A_{i_2 i_1} \tag{3.1}$$

Теорема 3. Для положительной определенности квадратичной формы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы нашлись вещественные числа a_{ij}, которые определяются через коэффициенты $A_{i_1 i_2}$ квадратичной формы (3.1) по рекуррентной формуле

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} a_{kj} \right); \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.2}$$
$$j = i, i+1, \ldots, n; \quad i > k \geqslant 1$$

и удовлетворяют условию

$$a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

т. е. диагональные элементы треугольной матрицы $\| a_{ij} \|_1^n$ отличны от нуля.

Доказательство. Известно, что в действительном пространстве R^n невырожденным действительным линейным преобразованием всякая квадратичная форма приводится к нормальному виду [1]. Покажем, что при этом выполняются свойства А, Б и В, описанные в п. 1, и воспользуемся теоремой 2.

В качестве функции F (x), фигурирующей в теореме 2, рассмотрим квадратичную форму (3.1). В качестве функции P (y) будем рассматривать нормальный вид этой квадратичной формы, причем в данном случае $m = n$. Невырожденное действительное линейное преобразование $\mathrm{y} = A\mathrm{x}$, где A — ($n \times n$)-матрица чисел, является частным случаем отображения (1.4). При этом имеют место свойства А, Б и В. Действительно, преобразование $\mathrm{y} = A\mathrm{x}$ взаимно однозначно, так как невырождено. Поэтому область определения и область значений этого преобразования совпадают с R^n, а тождество (1.5) выполняется во всем пространстве R^n.

Таким образом, из теоремы 2 следует, что для положительной определенности квадратичной формы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы был положительно-определенным нормальный вид этой квадратичной формы, т. е. необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} A_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{3.4}$$

где

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \tag{3.5}$$
$$y_2 = a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n; \ \ldots; \ y_n = a_{nn} x_n$$

и все a_{ij} — вещественные числа, причем выполняется условие (3.3).

Подставим линейные функции (3.5) в правую часть равенства (3.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых членах правой и левой частей этого равенства. Получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{i} a_{ki} a_{kj} = A_{ij}; \quad i = 1, \ldots, \ n, \ j = i, i+1, \ldots, n$$

решение которой строится последовательно, начиная с первого уравнения, по рекуррентной формуле (3.2) при условии (3.3). Теорема доказана.

Полученный новый критерий знакоопределенности квадратичной формы не требует вычисления определителей, как в критерии Сильвестра, удобен для программирования и реализации на ЦВМ. Кроме того, существенно облегчается подбор таких коэффициентов квадратичной формы (3.1), при которых она становится положительно-определенной. Это следует из вида рекуррентной формулы (3.2).

4. Применим полученный критерий знакоопределенности квадратичной формы для получения достаточных условий знакоопределенности формы четной степени (2.1). С этой целью докажем следствие теоремы 1.

Следствие 1. Для положительной определенности формы четной степени (2.1) достаточно, чтобы существовали вещественные числа $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}$ и a_{ij}, удовлетворяющие рекуррентной формуле

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}}\left[B_{ij}(A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} a_{kj}\right] \tag{4.1}$$

$$i = 1, \ldots, m; \quad j = i,\ i+1,\ \ldots,\ m$$

и условию

$$a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, \ \ldots, \ m \tag{4.2}$$

где m — число независимых переменных квадратичной формы (2.3), $B_{ij}(A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}})$ — коэффициенты квадратичной формы (2.3), зависящие от коэффициентов $A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}$ формы четной степени (2.1) и чисел $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}$ (2.9).

Доказательство. Пусть выполняются условия следствия 1. Тогда, согласно доказанному в теореме 3 критерию знакоопределенности, квадратичная форма $P(y)$ (2.3) будет положительно определена в пространстве Y^m. Она связана с формой четной степени (2.1) отображением (2.2), для которого выполняются свойства А и Б. Тогда на основании теоремы 1, в которой $G_x = R^n$, $G_y = Y^m$, форма четной степени (2.1) будет положительно-определенной в R^n.

Пример 2. Для формы четвертой степени (2.5) достаточные условия знакоопределенности согласно следствию 1 равносильны существованию следующих чисел a_{ij} и α_{1122}:

$$a_{11} = \pm A_{1111}^{1/2}, \quad a_{12} = \frac{1}{a_{11}} A_{1112}, \quad a_{13} = \frac{1}{a_{11}} \alpha_{1122} \tag{4.3}$$

$$a_{22} = \pm (A_{1122} - \alpha_{1122} - a_{12}^2)^{1/2}, \quad a_{23} = \frac{1}{a_{22}} (A_{1222} - a_{12} a_{13})$$

$$a_{33} = \pm (A_{2222} - a_{13}^2 - a_{23}^2)^{1/2}$$

причем число α_{1122} подбирается так, чтобы удовлетворялись условия

$$a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad a_{33} \neq 0 \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) являются частным случаем рекуррентной формулы (4.1) и получены путем применения доказанного в теореме 3 критерия знакоопределенности (3.2), (3.3) к квадратичной форме (2.8) при значениях коэффициентов (2.9).

Получим другой вид достаточных условий знакоопределенности формы четной степени, не использующих вспомогательных чисел $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}$. Для этого введем верхнюю треугольную $(m \times m)$-матрицу вещественных чисел с ненулевыми диагональными элементами

$$(4.5)\qquad \left\| \begin{matrix} \underbrace{b_{11\ldots 11}}_{s} & b_{11\ldots 12} \ldots & b_{1n\ldots nn} \\ 0 & b_{21\ldots 12} \ldots & b_{2n\ldots nn} \\ \ldots & \ldots \ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ \ldots & b_{mn\ldots nn} \end{matrix} \right\|$$

$$(4.6)\qquad \underbrace{b_{11\ldots 11}}_{s} \neq 0, \quad \underbrace{b_{21\ldots 12}}_{s} \neq 0, \ldots, \underbrace{b_{mn\ldots nn}}_{s} \neq 0$$

Введем также систему алгебраических уравнений

$$(4.7)\qquad \Sigma \sum_{\beta=1}^{m} b_{\beta i_1 \ldots i_s} b_{\beta i_{s+1} \ldots i_{2s}} = A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}; \quad i_1 = 1, \ldots, n$$

$$i_2 = i_1,\ i_1 + 1, \ldots, n; \ldots; i_{2s} = i_{2s-1}, \ldots, n$$

где Σ — символ суммирования по тем перестановкам индексов $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_{2s}$, для которых выполняются условия

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_s, \quad i_{s+1} < i_{s+2} < \ldots < i_{2s}$$

Следствие 2. Для положительной определенности формы четной степени (2.1) достаточно, чтобы существовало вещественное решение $b_{\beta i_1 \ldots i_s}$ системы алгебраических уравнений (4.7), для которых выполняются условия (4.6).

Доказательство. Пусть существует вещественное решение системы алгебраических уравнений (4.7) при условии (4.6). Тогда для формы четной степени (2.1) справедливо следующее представление

$$(4.8)\qquad \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \ldots \sum_{i_{2s}=i_{2s-1}}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2s}} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2$$

$$(4.9)\qquad \varphi_1 = b_{11\ldots 11} x_1^s + b_{11\ldots 12} x_1^{s-1} x_2 + \ldots + b_{1n\ldots nn} x_n^s$$

$$\varphi_2 = b_{21\ldots 12} x_1^{s-1} x_2 + \ldots + b_{2n\ldots nn} x_n^s, \ldots, \varphi_m = b_{mn\ldots nn} x_n^s$$

Действительно, подставляя формы степени s (4.9) в правую часть равенства (4.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых членах правой и левой частей равенства (4.8), получим систему (4.7).

Учитывая тождество (2.4) и значения координат y_k отображения (2.2), а также изменяя обозначения коэффициентов в формах (4.9) на a_{ij} вместо $b_{\beta i_1 \ldots i_s}$, равенство (4.8) и условие (4.6) запишем в виде

$$(4.10)\qquad \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} B_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2$$

$$(4.11)\qquad a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, \ldots, m$$

Согласно теореме 3, правая часть равенства (4.10) — положительно-определенная квадратичная форма в пространстве Y^m, так как по предположению существуют все числа a_{ij} при условии (4.11) и соответственно числа $b_{\beta i_1 \ldots i_s}$ при условии (4.6). Тогда согласно равенству (4.8) из теоремы 1 следует, что форма четной степени (2.1) положительно определена. Следствие доказано.

Пример 3. Запишем частный вид равенства (4.8) для формы четвертой степени (2.5) с учетом отображения (2.6) при условии (4.6)

$$(4.12)\qquad A_{1111} x_1^4 + A_{1112} x_1^3 x_2 + A_{1122} x_1^2 x_2^2 + A_{1222} x_1 x_2^3 + A_{2222} x_2^4 = (b_{111} x_1^2 + b_{112} x_1 x_2 + b_{122} x_2^2)^2 + (b_{212} x_1 x_2 + b_{222} x_2^2)^2 + (b_{322} x_2^2)^2$$

$$(4.13)\qquad b_{111} \neq 0, \quad b_{212} \neq 0, \quad b_{322} \neq 0$$

В остальном все коэффициенты $b_{111}, b_{112}, \ldots, b_{322}$ — произвольные вещественные числа.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых членах левой и правой частей равенства (4.12), получим систему алгебраических уравнений, которые являются частным видом алгебраических уравнений (4.7), где число неизвестных b_{ijk} больше числа уравнений.

Решим систему (4.7) для данного примера последовательно

$$(4.14)\qquad b_{111}=\pm A_{1111}^{1/2},\quad b_{112}=\frac{1}{2b_{111}}A_{1112},\quad b_{122}=\frac{1}{2b_{111}}(A_{1122}-b_{112}^2-b_{212}^2)$$
$$b_{222}=\frac{1}{2b_{212}}(A_{1222}-2b_{112}b_{122}),\quad b_{322}=\pm(A_{2222}-b_{122}^2-b_{222}^2)^{1/2}$$

где число b_{212} задаем таким, чтобы не нарушить условие (4.13).

Согласно утверждению следствия 2 для положительной определенности формы (2.5) достаточно, чтобы существовало вещественное решение (4.14) системы (4.7) при условии (4.13).

Если применить другие критерии знакоопределенности квадратичной формы, то получим достаточные условия знакоопределенности формы четной степени (2.1), отличающиеся по виду от полученных условий в следствиях 1 и 2. Так, применяя к квадратичной форме (2.3) критерий Сильвестра [1], получим достаточные условия формы четной степени (2.1) в виде неравенств для главных миноров матрицы квадратичной формы (2.3).

Полученные условия знакоопределенности четных форм удобны в приложениях, так как непосредственно выражены через коэффициенты этой формы. Причем в широком классе форм, для которых справедливо представление (4.8), эти условия являются необходимыми и достаточными, необходимость следует из теоремы 3.

В тех случаях, когда форма не представима в виде (4.8) или предложенные условия не приводят к решению задачи, можно воспользоваться критерием знакоопределенности высших форм, полученным в статье [2], где предлагается проверить положительность заданной формы в точках возможного экстремума этой формы, расположенных на гиперсфере с центром в начале координат. При этом задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, число которых равно числу независимых переменных, а порядок каждого уравнения на единицу превышает степень заданной формы.

5. Применим полученные результаты к выводу достаточных условий асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью в виде однородных многочленов нечетной степени с постоянными коэффициентами

$$(5.1)\qquad \frac{dx_\alpha}{dt}=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1}^{n}\cdots\sum_{i_{2s-1}=i_{2s-2}}^{n}a_{\alpha i_1 i_2\ldots i_{2s-1}}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{2s-1}},\quad \alpha=1,\ldots,n$$

В однородных многочленах правой части уравнений (5.1) подобные члены приведены и расположены в лексикографическом порядке.

Воспользуемся теоремой Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости в целом [3]. Функцию Ляпунова будем искать во множестве всех отрицательно-определенных квадратичных форм с постоянными вещественными коэффициентами

$$(5.2)\qquad v(\mathbf{x})=-\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{n}\Big(\sum_{k_2=k_1}^{n}p_{k_1k_2}x_{k_2}\Big)^2$$

$$(5.3)\qquad p_{k_1k_1}\neq 0,\quad \forall k_1=1,\ldots,n$$

Производную по времени t этой квадратичной формы (5.2) в силу системы (5.1) запишем в виде

(5.4) $$\frac{dv}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{dt}=$$
$$=-\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=k_1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{2s-1}=i_{2s-2}}^{n}p_{k_1\alpha}p_{k_1k_2}a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}}x_{i_1}\ldots x_{i_{2s-1}}x_{k_2}$$

Таким образом, производная dv/dt (5.4) представляет собой форму степени $2s$ (2.1), где коэффициенты $A_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$ определяются по формулам

(5.5) $$A_{i_1i_2\ldots i_{2s}}=-\sum{}'\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{\alpha}p_{k_1i_{2s}}p_{k_1\alpha}a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}};$$
$$i_1=1,\ldots,n,\ i_2=i_1,\ i_1+1,\ldots,n,\ldots,\ i_{2s}=i_{2s-1},\ldots,n$$

Σ' — символ суммирования по тем перестановкам индексов $i_1,\ldots,i_{2s}$, для которых выполняются условия $i_1<i_2<\ldots<i_{2s-1}$, $k_1<i_{2s}$.

Соотношение (5.5) получено в результате сравнения коэффициентов при одинаковых членах производной dv/dt (5.5) и формы степени $2s$ (2.1). Обычно удобно в соотношениях (5.5) вначале записывать коэффициент $A_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$, а затем члены $p_{k_1i_{2s}}$, $a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}}$, соответствующие выбранным индексам i_1, i_2, $\ldots$, i_{2s}.

Для форм четной степени достаточные условия положительной определенности содержатся в следствиях 1 и 2. Применяя их к производной dv/dt (5.4) получим искомые условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1).

Предварительно преобразуем производную dv/dt (5.4), равную форме степени $2s$ (2.1), в квадратичную форму (2.3) при помощи вещественных чисел $\alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$ так, как это сделано в примере 1 с формой (2.5). В этом случае коэффициенты $B_{j_1j_2}$ квадратичной формы (2.3) будут зависеть от переменных $p_{k_1k_2}$, коэффициентов $a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}}$ системы (5.1) и вспомогательных чисел $\alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$

(5.6) $$B_{j_1j_2}=B_{j_1j_2}(p_{k_1k_2},\ a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}},\ \alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}}),\quad j_1,j_2=1,\ldots,m$$

Теорема 4. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1) достаточно, чтобы существовали такие вещественные числа a_{ij}, $p_{k_1k_2}$ и $\alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$, которые удовлетворяют рекуррентной формуле

(5.7) $$a_{ij}=\frac{1}{a_{ii}}\left[B_{ij}(p_{k_1k_2},\ a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}},\ \alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}})-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}a_{kj}\right],$$
$$i=1,\ldots,m,\ j=i,\ i+1,\ldots,m$$

при условии (4.2), где $B_{ij}(p_{k_1k_2},\ a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}},\ \alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}})$ — коэффициенты (5.6) квадратичной формы (2.3), получаемой из производной dv/dt (5.4) при спользовании преобразования (2.2).

Доказательство. Пусть существуют числа $p_{k_1k_2}$, $\alpha_{i_1i_2\ldots i_{2s}}$, удовлетворяющие формуле (5.7) при условии (4.2). Тогда согласно следствию 1 будет положительно-определенной производная dv/dt (5.4), представляющая собой форму степени $2s$ (2.1). Положительная определенность производной dv/dt (5.4) согласно теореме Барбашина — Красовского [3] достаточна для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1). Теорема доказана.

Введем систему алгебраических уравнений

(5.8) $$\sum\sum_{\beta=1}^{m}b_{\beta i_1\ldots i_s}b_{\beta i_{s+1}\ldots i_{2s}}+\sum{}'\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{\alpha}a_{\alpha i_1\ldots i_{2s-1}}p_{k_1i_{2s}}p_{k_1\alpha}=0$$
$$i_1=1,\ldots,n,\ i_2=i_1,\ i_1+1,\ldots,n,\ldots,\ i_{2s}=i_{2s-1},\ldots,n$$

где Σ, Σ' — символы, значения которых приведены в формулах (4.7) и (5.5). Уравнения (5.8) получены из уравнений (4.7) путем замены коэффициентов $A_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}$ их значением из соотношений (5.5).

Теорема 5. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1) достаточно, чтобы система алгебраических уравнений (5.8) имела вещественное решение $p_{k_1k_2}$ и $b_{\beta i_1 \ldots i_s}$, удовлетворяющее условиям (4.6) и (5.3).

Доказательство. Пусть существует вещественное решение системы алгебраических уравнений (5.8) относительно неизвестных $p_{k_1k_2}$ и $b_{\beta i_1 \ldots i_s}$ при условиях (4.6) и (5.3). С учетом равенства (5.5) это равносильно существованию вещественного решения уравнений (4.7). Тогда из следствия 2 вытекает, что будет положительно-определенной производная dv/dt (5.4), равная форме степени $2s$ (2.1). Положительная определенность производной dv/dt (5.4) согласно упомянутой теореме Барбашина — Красовского достаточна для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1). Теорема доказана.

Пример 4. Найдем достаточные условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{1111}x_1^3 + a_{1112}x_1^2x_2 + a_{1122}x_1x_2^2 + a_{1222}x_2^3 \tag{5.9}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{2111}x_1^3 + a_{2112}x_1^2x_2 + a_{2122}x_1x_2^2 + a_{2222}x_2^3$$

Производная по времени t квадратичной формы с постоянными вещественными коэффициентами

$$v(x_1, x_2) = -{}^1/_2 \left[(p_{11}x_1 + p_{12}x_2)^2 + (p_{22}x_2)^2\right], \quad p_{11} \neq 0, \quad p_{22} \neq 0$$

в силу системы (5.9) представляет собой форму четвертой степени от переменных x_1, x_2, т. е.

$$\frac{dv}{dt} = A_{1111}x_1^4 + A_{1112}x_1^3x_2 + A_{1112}x_1^2x_2^2 + A_{1222}x_1x_2^3 + A_{2222}x_2^4 \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} A_{1111} &= -p_{11}^2a_{1111} - p_{11}p_{12}a_{2111} \\ A_{1112} &= -p_{11}^2a_{1112} - p_{11}p_{12}a_{1111} - p_{11}p_{12}a_{2112} - (p_{12}^2 + p_{22}^2)\, a_{2111} \\ A_{1122} &= -p_{11}^2a_{1122} - p_{11}p_{12}a_{1112} - p_{11}p_{12}a_{2122} - (p_{12}^2 + p_{22}^2)\, a_{2112} \\ A_{1222} &= -p_{11}^2a_{1222} - p_{11}p_{12}a_{1122} - p_{11}p_{12}a_{2222} - (p_{12}^2 + p_{22}^2)\, a_{2122} \\ A_{2222} &= -p_{11}p_{12}a_{1222} - (p_{12}^2 + p_{22}^2)\, a_{2222} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Согласно теореме 4, достаточные условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1) заключаются в существовании вещественных чисел $p_{11} \neq 0$, p_{12}, $p_{22} \neq 0$ и чисел α_{1122}, $a_{11} \neq 0$, a_{12}, a_{13}, $a_{22} \neq 0$, a_{23}, $a_{33} \neq 0$, удовлетворяющих системе уравнений (4.3), (5.11).

Согласно теореме 5, достаточные условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1) заключаются в существовании вещественного решения $p_{11} \neq 0$, p_{12}, $p_{22} \neq 0$, $b_{111} \neq 0$, b_{112}, b_{122}, $b_{212} \neq 0$, b_{222}, $b_{322} \neq 0$ системы алгебраических уравнений (4.7), (5.11).

Отметим также, что применение достаточных условий знакоопределенности формы четной степени, основанных на критерии Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм [1], приводит к получению достаточных условий асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (5.1), имеющих вид неравенств для определителей Сильвестра [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970. 528 с.
2. *Вейссенберг А. Н.* Критерии знакоопределенности форм высшего порядка.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3, с. 571—574.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.

Казань

Поступила в редакцию 20.IV.1938