Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ КОНТАКТА ЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ И ЖЕСТКИМИ ТЕЛАМИ (ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД)

Хлуднев А. М.

Задача о контакте линейного упругого тела с жестким формулируется как односторонняя. Решение определяется из вариационного неравенства, эквивалентного задаче минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений. Установлена регулярность решения вплоть до внутренних точек контактной границы. На подмножествах контактной границы построена мера, позволяющая охарактеризовать воздействие штампа на упругое тело. Доказана абсолютная непрерывность этой меры во внутренних точках.

В аналогичной постановке рассматривается задача о контакте двух упругих тел. Установлена регулярность решения и выяснен характер воздействия одного тела на другое.

1. Контакт упругого тела с жестким. *Постановка задачи.* Пусть упругое тело занимает в естественном состоянии область $\Omega \subset R^3$ с границей Γ класса C^∞, представленной в виде объединения трех частей: $\Gamma = \Gamma_\omega \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_c$. На Γ_ω задано условие $\omega = 0$, ω — вектор перемещения; на Γ_σ задан вектор сил $\sigma_{ij}n_j = g_i$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль к границе; σ_{ij} — тензор напряжений, g_i — заданные поверхностные силы; $i, j = 1, 2, 3$; по повторяющимся индексам здесь и ниже производится суммирование. Предполагается, что точки Γ_c упругого тела могут взаимодействовать с жестким телом, уравнение поверхности которого имеет вид $\Phi(x) = 0$, причем для точек жесткого тела выполнено неравенство $\Phi(x) \leqslant 0$. Условие на вектор перемещения в линейном приближении имеет вид [1]

$$\omega(x)\nabla\Phi(x) \geqslant -\Phi(x), \quad x \in \Gamma_c \tag{1.1}$$

Пусть $H_\omega^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева вектор-функций, имеющих первые обобщенные производные в Ω, суммируемые с квадратом, и обращающихся в нуль на Γ_ω ($\mathrm{mes}\,\Gamma_\omega > 0$). Обозначим через K множество функций из этого пространства, удовлетворяющих неравенству (1.1) почти всюду на Γ_c (в смысле плоской меры), считая, что Γ_c является односвязной областью на Γ с гладкой границей $\partial\Gamma_c$ класса C^1.

Решение задачи минимизации функционала энергии

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}(\omega)\,\varepsilon_{ij}(\omega)\,dx - \int_\Omega f_i u_i\,dx - \int_{\Gamma_\sigma} g_i u_i\,d\Gamma, \quad \omega = (u_1, u_2, u_3) \tag{1.2}$$

на множестве K удовлетворяет неравенству

$$\omega \in K\colon (d\Pi(\omega), \chi - \omega) \geqslant 0 \quad \forall \chi \in K \tag{1.3}$$

$d\Pi(\omega)$ — градиент $\Pi(\omega)$ на $H_\omega^1(\Omega)$. Если при этом форма штампа совпадает с Γ_c, то (1.3) — классичеекая задача Синьорини [2]. Для простоты будем рассматривать случай упругого тела, подчиняющегося закону Гука.

Гладкость решения. Можно доказать, что если $f_i \in L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Gamma_\sigma)$, то решение задачи (1.3) существует и единственно.

При исследовании качественных свойств решения существенно доказательство его регулярности в окрестности точек Γ_c. Всюду предполагаем, что форма штампа не очень сильно отличается от Γ_c. Точный смысл этого условия поясняется ниже.

Теорема 1. Пусть функция Φ принадлежит классу C^3. Тогда решение $\omega \in K$ обладает двумя обобщенными производными в окрестности точек $x \in \Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$. Выберем систему координат с началом в точке x_0 так, чтобы плоскость x_1x_2 была касательной к Γ_c в x_0, а ось x_3 совпадала с внутренней нормалью в этой точке. Пусть

$$x_3 = \beta(x_1, x_2), \quad \beta_{x_1}(0, 0) = \beta_{x_2}(0, 0) = 0 \tag{1.4}$$

уравнение Γ_c в окрестности x_0, а

$$x_3 = \alpha(x_1, x_2) \tag{1.5}$$

уравнение формы штампа. Такое представление границы возможно в силу ее гладкости. Смысл сделанного выше предположения о том, что форма штампа не очень сильно отличается от Γ_c, как раз и состоит в возможности представления (1.5). Неравенство (1.1) имеет следующий вид в окрестности точки x_0 ($u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$):

$$\begin{aligned} -\alpha_{x_1}(x_1, x_2)\, u(x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) - \alpha_{x_2}(x_1, x_2)\, v(x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) + \\ + w(x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) \geqslant \alpha(x_1, x_2) - \beta(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь D — проекция границы (1.4) на плоскость x_1x_2.

Сделаем замену переменных с единичным якобианом

$$y_1 = x_1, \; y_2 = x_2, \; y_3 = x_3 - \beta(x_1, x_2)$$

При этом для произвольной гладкой функции $h(x) \equiv \bar{h}(y)$ будут справедливы следующие формулы:

$$h_{x_1} = \bar{h}_{y_1} - \bar{h}_{y_3}\beta_{x_1}, \; h_{x_2} = \bar{h}_{y_2} - \bar{h}_{y_3}\beta_{x_2}, \; h_{x_3} = \bar{h}_{y_3}$$

Указанное преобразование приведет к тому, что достаточно малая область $\Omega_0 \subset \Omega$, имеющая в качестве части своей границы поверхность $x_3 = \beta(x_1, x_2)$, отобразится гомеоморфно на область в пространстве переменных y с границей, содержащей кусок плоскости $y_3 = 0$. Пусть $y(\Omega_0)$ — этот образ. Выберем области в виде полушаров

$$G_i = \{\, |y| < i\delta, \; y_3 > 0 \}, \quad i = 1, 2, 3$$

причем δ считаем настолько малым положительным числом, чтобы $G_3 \subset y(\Omega_0)$. Пусть далее функция $\varphi(y) \in C^\infty$ обладает свойствами $\varphi \equiv 1$ в $\bar{G}_1$, $\varphi \geqslant 0$, $|\varphi| \leqslant 1$, причем $\varphi \equiv 0$ вне $|y| \geqslant {}^3/_2\delta$, и предположим, что вторые производные по y_1, y_2 функции $\alpha - \beta$ неотрицательны в G_3. Сделанное предположение о знаке вторых производных функции $\alpha - \beta$ не является принципиальным, и от него можно освободиться. Введем также два обозначения

$$d_{i\tau}\, h(y) = [h(y + \tau e_i) - h(y)]\tau^{-1}, \quad \Delta_{i\tau} h(y) = -d_{-i\tau} d_{i\tau} h(y),$$
$$i = 1, 2$$

e_i — единичные орты, $0 < \tau < \delta$. Можно показать, что если число λ выбирается из интервала $0 < \lambda < {}^1/_2\tau^2$, то вектор $\bar{\chi}_\lambda = (\bar{u}_\lambda, \bar{v}_\lambda, \bar{w}_\lambda)$ с компонентами

$$\bar{u}_\lambda = \bar{u} + \lambda\varphi^2\Delta_{i\tau}\bar{u}, \quad \bar{v}_\lambda = \bar{v} + \lambda\varphi^2\Delta_{i\tau}\bar{v}$$
$$\begin{aligned} \bar{w}_\lambda = \bar{w} + \lambda\varphi^2\Delta_{i\tau}[\bar{w} - \bar{u}\alpha_{y_1} - \bar{v}\alpha_{y_2}] + \lambda\varphi^2\alpha_{y_1}\Delta_{i\tau}\bar{u} + \\ + \lambda\varphi^2\alpha_{y_2}\Delta_{i\tau}\bar{v} \end{aligned}$$

будет удовлетворять неравенству (1.6), записанному в переменных y.

Носитель $\chi_\lambda - \omega$ лежит в множестве $\Omega_0 \cup \{x_3 = \beta(x_1, x_2)\}$. Для любых достаточно регулярных функций p, h, таких, что носитель p лежит в указанном множестве, справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} h_{x_i} p_{x_j}\, dx = \int\limits_{y(\Omega_0)} (\bar{h}_{y_i} - \bar{h}_{y_3}\beta_{x_i})(\bar{p}_{y_j} - \bar{p}_{y_3}\beta_{x_j})\, dy, \quad \beta_{x_3} = 0$$

Подставим теперь функцию $\chi_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda)$ в (1.3) и сократим на λ. В силу предыдущего соотношения в получившемся неравенстве будем иметь два типа слагаемых: содержащих и не содержащих β_{x_1}, β_{x_2}. Для слагаемых, не содержащих β_{x_i}, справедливо следующее утверждение. Разность между интегралами (по i здесь и ниже суммирования нет)

$$\int\limits_{y(\Omega_0)} \bar{u}_{y_k} (\varphi^2 \Delta_{i\tau} \bar{v})_{y_l}\, dy, \quad - \int\limits_{y(\Omega_0)} (d_{i\tau}\varphi\bar{u})_{y_k} (d_{i\tau}\varphi\bar{v})_{y_l}\, dy$$

можно оценить сверху величиной, заключенной во вторых фигурных скобках правой части неравенства (1.7) (см. ниже) с постоянной, зависящей лишь от $y(\Omega_0)$ и φ. Здесь каждая из функций может независимо принимать значения $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$,

Из выражений, содержащих β_{x_i}, выделим старшие. Их можно оценить аналогично предыдущему и вынести за знак интеграла максимум по модулю величин β_{x_i}, $\beta_{x_i}{}^2$. Оценка других величин осуществляется проще. В результате заключаем, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} (1.7) \qquad & \int\limits_{y(\Omega_0)} \sigma_{kl}(d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}))\, \varepsilon_{kl}(d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}))\, dy \leqslant \\ & \leqslant c_1 \max_{\bar{G}_3} \{ |\beta_{x_1}| + |\beta_{x_2}| + \beta_{x_1}^2 + \beta_{x_2}^2 \} \| d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}) \|_1^2 + \\ & + c_2 \{ \|\bar{\omega}\|_1{}^2 + \|\bar{\omega}\|_1 \| d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega})\|_1 + \|\bar{f}\|_0{}^2 \} \end{aligned}$$

где c_2 зависит от области $y(\Omega_0)$, постоянных Ламе и функций φ, α, β; c_1 зависит лишь от постоянных Ламе. Все выписанные нормы относятся к области $y(\Omega_0)$.

Воспользуемся далее неравенством Корна

$$(1.8) \qquad \| d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}) \|_1{}^2 \leqslant c_0 \int\limits_{y(\Omega_0)} \sigma_{kl}(d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}))\, \varepsilon_{kl}(d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}))\, dy$$

Постоянная c_0 здесь не зависит от $\bar{\omega}$ и φ. Выбирая величину δ, характеризующую области G_i, достаточно малой, можно считать

$$\max_{\bar{G}_3} \{ |\beta_{x_1}| + |\beta_{x_2}| + \beta_{x_1}^2 + \beta_{x_2}^2 \} < (c_0 c_1)^{-1}$$

где c_0 и c_1 — постоянные из (1.7), (1.8). Такой выбор возможен в силу условий (1.4). Таким образом, из (1.7) получаем

$$\| d_{i\tau}(\varphi\bar{\omega}) \|_1 \leqslant c$$

с постоянной c, не зависящей от τ. Следовательно, вторые производные функции $\bar{\omega}$, за исключением $\bar{\omega}_{y_3 y_3}$, принадлежат $L^2(G_1)$. Однако видно, что в окрестности $y_3 = 0$ выполнены уравнения

$$\bar{\omega}_{y_3 y_3} = F$$

причем $F \in L^2(G_1)$. Так что вторые производные решения по y_3 также принадлежат $L^2(G_1)$. Теорема доказана.

Построение меры. Ниже будет доказано утверждение о существовании меры, характеризующей воздействие штампа на упругое тело. При этом следует различать случаи, когда Γ_c имеет общую границу с Γ_σ и когда с Γ_ω. Пусть сначала точки $\partial\Gamma_c$ обладают свойством: для любой $x_0 \in \partial\Gamma_c$ существует окрестность $d(x_0)$, такая, что $d(x_0) \cap \Gamma \subset \Gamma_c \cup \Gamma_\sigma$.

Теорема 2. На σ-алгебре борелевских подмножеств границы Γ_c можно задать меру μ, такую, что для всех $\chi \in H_\omega^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_c)$ справедливо представление

$$(1.9) \qquad (d\Pi(\omega), \chi) = \int_{\Gamma_c} \frac{\chi\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\, d\mu$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если вектор $\chi \in H_\omega^1(\Omega)$ таков, что $\chi\nabla\Phi \geqslant 0$ на Γ_c, то $(d\Pi(\omega), \chi) \geqslant 0$. Действительно, $\omega + \varepsilon\chi \in K$, $\varepsilon > 0$, поэтому подставив $\omega + \varepsilon\chi$ в качестве пробного вектора в (1.3), получим требуемое неравенство. Определим теперь линейное многообразие функций, заданных на Γ_c

$$(1.10) \qquad V = \{\chi_*\}, \quad \chi_* = \frac{\chi\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}, \quad \chi \in H_\omega^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_c)$$

На V можно определить линейный функционал

$$\psi(\chi_*) = (d\Pi(\omega), \chi)$$

Значение ψ определяется этой формулой однозначно. Действительно, если $\chi_*^1 = \chi_*^2$ на Γ_c, то согласно предыдущему $(d\Pi(\omega), \chi^1 - \chi^2) \geqslant 0$. Так как обратное неравенство также верно, то $\psi(\chi_*^1) = \psi(\chi_*^2)$.

Можно доказать, что многообразие V содержит все функции из $C^1(\Gamma_c)$, поэтому его замыкание в норме $\|\cdot\|_{C(\Gamma_c)} = \max\limits_{\Gamma_c} |\cdot|$ совпадает с пространством $C(\Gamma_c)$. Более того, существует вектор $h \in H_\omega^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_c)$, такой, что

$$h\nabla\Phi/|\nabla\Phi| \geqslant \delta > 0, \quad \delta = \text{const}$$

Поэтому для любой функции $\chi_* \in V$

$$|\chi_*| \leqslant \|\chi_*\|_{C(\Gamma_c)}\, h\nabla\Phi/(\delta\, |\nabla\Phi|)$$

Из положительности функционала ψ отсюда следует

$$|\psi(\chi_*)| \leqslant c\, \|\chi_*\|_{C(\Gamma_c)}, \quad c = \delta^{-1}(d\Pi(\omega), h)$$

Таким образом, заключаем, что ψ — линейный непрерывный функционал на $C(\Gamma_c)$. Так как он, кроме того, положительный, то существует мера μ, такая, что

$$\psi(\chi_*) = \int_{\Gamma_c} \chi_*\, d\mu \quad \forall \chi_* \in C(\Gamma_c)$$

Для функции χ_*, построенной по вектору $\chi \in H_\omega^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_c)$ при помощи (1.10), эта формула дает представление (1.9). Доказательство теоремы закончено. ▮

Абсолютная непрерывность меры в $\Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$. Пусть $x_0 \in \Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$. Существует достаточно малая окрестность $d(x_0)$ точки x_0, не содержащая точек $\partial\Gamma_c$. Пусть вектор $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in H_\omega^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_c)$ таков, что $\operatorname{supp}\chi \in d(x_0) \cap \bar\Omega$. В силу теоремы 2

$$(1.11) \qquad (d\Pi(\omega), \chi) = \int_{\Gamma_c} \frac{\chi\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\, d\mu$$

Используя результат о регулярности решения в окрестности точки x_0, заключаем, что левая часть этого соотношения равна

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sigma_{lj}\frac{\partial\chi_l}{\partial x_j}-f_l\chi_l\right\}dx=\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_{lj}n_j\chi_l\,d\Gamma \tag{1.12}$$

Напомним далее определение. Мера γ называется сингулярной по отношению к мере Лебега, если она сосредоточена на множестве нулевой лебеговой меры. Для произвольной меры, заданной на σ-алгебре борелевских множеств Γ_c (и, в частности, для μ), существует однозначное разложение

$$\mu(B)=\gamma(B)+\int\limits_{B}q(x)\,dx$$

Здесь $q(x)$ — суммируемая по мере Лебега функция (плотность меры μ), $B\subset\Gamma_c$ — произвольное борелевское множество.

Покажем, что из (1.11), (1.12) следует $\gamma\equiv 0$ в $\Gamma_c\setminus\partial\Gamma_c$. Отсюда, в частности, можно будет сделать вывод о невозможности сосредоточенных воздействий штампа на упругое тело в точках $\Gamma_c\setminus\partial\Gamma_c$. По предположению, $|\nabla\Phi|\neq 0$ на Γ_c. Пусть система координат выбрана так, что $\Phi_{x_i}(x)\neq 0$ для $x\in d(x_0)\cap\Gamma_c$, $i=1,2,3$. Считая поочередно, что у вектора χ ненулевая компонента лишь χ_i и приравнивая правые части (1.11), (1.12), получим (по i суммирования нет)

$$\int\limits_{\Gamma_c}\chi_i\frac{\Phi_{x_i}}{|\nabla\Phi|}\,d\mu=\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_{ij}n_j\chi_i\,d\Gamma$$

Отсюда следует равенство нулю сингулярной составляющей меры μ в $d(x_0)\cap\Gamma_c$, причем плотность меры равна

$$q=\sigma_{ij}n_j\,|\nabla\Phi|/\Phi_{x_i},\quad i=1,2,3$$

Обозначим через σ вектор с компонентами $\sigma_{ij}n_j$, $i=1,2,3$. Тогда плотность можно записать в виде

$$q\equiv q\frac{\Phi_{x_1}^2}{|\nabla\Phi|^2}+q\frac{\Phi_{x_2}^2}{|\nabla\Phi|^2}+q\frac{\Phi_{x_3}^2}{|\nabla\Phi|^2}=\frac{\sigma\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$$

Рассмотрим теперь случай, когда Γ_c имеет общую границу с Γ_ω. Иначе говоря, пусть для произвольной точки $x_0\in\partial\Gamma_c$ существует окрестность $d(x_0)$, для которой $d(x_0)\cap\Gamma\subset\Gamma_c\cup\Gamma_\omega$.

Теорема 3. На σ-алгебре борелевских подмножеств $\Gamma_c\setminus\partial\Gamma_c$ можно задать меру μ, такую, что для всех $\chi\in H_\omega^1(\Omega)\cap C_0(\Gamma_c)$ справедливо представление (1.10).

Принадлежность $C_0(\Gamma_c)$ — пространству финитных и непрерывных функций на Γ_c — здесь следует понимать как принадлежность следов на Γ_c компонент вектора χ указанному пространству.

Сделаем несколько замечаний о доказательстве теоремы. В данном случае линейное многообразие V, состоящее из функций χ_* вида

$$\chi_*=\chi\nabla\Phi/|\nabla\Phi|,\quad \chi\in H_\omega^1(\Omega)\cap C_0(\Gamma_c)$$

будет содержать все функции из $C_0^1(\Gamma_c)$. Таким образом, линейный функционал ψ на V, определенный формулой $\psi(\chi_*)=(d\Pi(\omega),\chi)$, можно по непрерывности определить для всех функций из $C_0(\Gamma_c)$. При этом (1.10) будет следовать из известного представления линейного непрерывного функционала на пространстве финитных непрерывных функций.

Плотность меры μ в этом случае также равняется $\sigma\nabla\Phi/|\nabla\Phi|$.

2. Контакт двух упругих тел. *Постановка задачи.* Пусть два упругих тела, занимающих в естественном состоянии области Ω и Ω' из R^3 с границами Γ, Γ', имеют общий кусок границы Γ_c. Если ω — вектор перемещений точек первого тела, а ω' — второго, то основное неравенство, связывающее эти векторы на Γ_c, имеет вид [3]

(2.1) $$\omega n - \omega' n \leqslant 0 \text{ на } \Gamma_c$$

($n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор внешней нормали к Γ). Штрихом обозначаем величины, относящиеся ко второму телу.

Основной результат состоит в доказательстве регулярности решения вплоть до Γ_c и исследовании качественных свойств решения. Так же как и в п. 1, решение (ω, ω') будет определяться из вариационного неравенства. Прежде всего зафиксируем краевые условия. Считаем, что $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_\omega \cup \Gamma_\sigma$, $\Gamma' = \Gamma_c \cup \Gamma_{\omega'} \cup \Gamma_{\sigma'}$. На Γ_ω задан вектор перемещений; на Γ_σ — вектор сил, т. е.

(2.2) $$\omega = 0 \text{ на } \Gamma_\omega; \ \sigma_{ij} n_j = g_i \text{ на } \Gamma_\sigma$$

Аналогичные условия заданы на $\Gamma_{\omega'}$, $\Gamma_{\sigma'}$. Считаем, что $\operatorname{mes} \Gamma_\omega > 0$, $\operatorname{mes} \Gamma_{\omega'} > 0$.

Пусть $H_{\omega'}^1(\Omega')$ имеет такой же смысл, как и $H_\omega^1(\Omega)$. Обозначим $H = H_\omega^1(\Omega) \times H_{\omega'}^1(\Omega')$.

Функционал энергии двух тел представляется в виде суммы соответствующих функционалов. Для каждого из тел он имеет вид (1.2), причем параметры Ламе для каждого из тел свои.

Предположим, что $f_i \in L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Gamma_\sigma)$ (аналогично для второго тела). При указанных выше условиях решение задачи минимизации функционала энергии $E(\omega, \omega') = \Pi(\omega) + \Pi'(\omega')$ на замкнутом выпуклом множестве $K \subset H$, определяемом как множество функций из H, удовлетворяющих неравенству (2.1) почти всюду на Γ_c, существует и единственно. Это решение $\psi = (\omega, \omega')$ удовлетворяет неравенству

(2.3) $$\psi \in K: \ (dE(\psi), \ \chi - \psi) \geqslant 0 \ \ \forall \chi \in K$$

Здесь $dE(\psi)$ — градиент функционала $E(\psi)$ на H.

Безусловно, сформулированная задача (2.3) допускает дифференциальную формулировку. Именно, в областях Ω и Ω' выполняются уравнения равновесия

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = -f_i$$

На Γ_ω и Γ_σ (соответственно, на $\Gamma_{\omega'}$ и $\Gamma_{\sigma'}$) выполнены условия (2.2) и, кроме того, на Γ_c имеем

$$\begin{cases} \omega n - \omega' n < 0 \\ \sigma_{lj}(\omega) n_j n_l = 0 \\ \sigma_\tau = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \omega n - \omega' n = 0 \\ \sigma_{lj}(\omega) n_j n_l \leqslant 0 \\ \sigma_\tau = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{lj}(\omega) n_j n_l = \sigma_{lj}(\omega') n_j n_l, \quad (\sigma_\tau)_i = \sigma_{ij} n_j - (\sigma_{lj} n_j n_l) n_i$$

В дальнейшем предполагаем, что $\Gamma, \Gamma' \subset C^\infty$, и считаем Γ_c односвязной областью на Γ с гладкой границей класса C^1.

Регулярность решения. Теорема 4. Для каждой точки $x_0 \in \Gamma_c \setminus \partial \Gamma_c$ существует окрестность $d(x_0) \subset \Omega \cup \Omega' \cup \Gamma_c$, такая, что $\omega \in H^2(d(x_0) \cap \Omega)$, $\omega' \in H^2(d(x_0) \cap \Omega')$.

При доказательстве этой теоремы используются идеи, аналогичные применявшимся при доказательстве теоремы 1. Окрестность точки $x_0 \in \Gamma_c \setminus \partial \Gamma_c$ специальным преобразованием координат переводится в окрестность в пространстве переменных y, так, чтобы часть границы вблизи точки x_0 перешла в кусок плоскости. Затем выбирается пробная функция, удовлетворяющая (2.1) и позволяющая воспроизвести в разностном виде умножение уравнений равновесия на соответствующие производные. Эта функция подставляется в (2.3), что в конечном итоге приводит к неравенству типа (1.7). Таким образом, устанавливается наличие вторых производных по касательным направлениям и смешанных производных, суммируемых с квадратом. Из условия справедливости уравнений равновесия вблизи границы получаем также существование суммируемых с квадратом вторых производных по нормали.

Построение меры и ее свойства. Сформулируем теорему о существовании меры, характеризующей воздействие одного тела на другое. Так же, как и в задаче о взаимодействии упругого тела с жестким, следует отдельно рассматривать случаи различного расположения Γ_c, Γ_σ, Γ_ω, $\Gamma_{\sigma'}$, $\Gamma_{\omega'}$.

Пусть сначала для каждой точки $x_0 \in \partial\Gamma_c$ существует окрестность $d(x_0)$, обладающая тем свойством, что $d(x_0) \cap \Gamma \subset \Gamma_c \cup \Gamma_\sigma$ и $d(x_0) \cap \Gamma' \subset \Gamma_c \cup \Gamma_{\sigma'}$. При этом справедлива

Теорема 5. На σ-алгебре борелевских подмножеств Γ_c можно определить меру μ, такую, что для произвольных функций $\varphi = (\gamma, \gamma') \in H \cap C(\Gamma_c)$ имеет место представление ($\psi \in K$ — решение задачи (2.3))

$$(dE(\psi), \varphi) = -\int_{\Gamma_c} (\gamma n - \gamma' n)\, d\mu \tag{2.4}$$

Свойства построенной таким образом меры определяются гладкостью решения. В частности, наличие вторых производных у решения вблизи контактной границы позволяет доказать равенство нулю сингулярной составляющей меры μ в точках $\Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$. Схема рассуждений при этом близка к использованной в конце п. 1. Плотность меры μ оказывается равной $-\sigma_{ij}(\omega)\, n_j n_i$.

В заключение рассмотрим ситуацию, когда для произвольной точки $x_0 \in \partial\Gamma_c$ существует окрестность $d(x_0)$, для которой $d(x_0) \cap \Gamma \subset \Gamma_c \cup \Gamma_\omega$, $d(x_0) \cap \Gamma' \subset \Gamma_c \cup \Gamma_{\omega'}$.

Теорема 6. На σ-алгебре борелевских подмножеств $\Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$ можно определить меру μ, такую, что для любых функций $\varphi = (\gamma, \gamma') \in H \cap C_0(\Gamma_c)$ справедливо представление (2.4). Сингулярная составляющая этой меры равна нулю, а плотность равняется $-\sigma_{ij}(\omega)\, n_j n_i$, причем $\mu(B) < +\infty$ для любого компакта $B \subset \Gamma_c \setminus \partial\Gamma_c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 329—337.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
3. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 466—474.

Новосибирск

Поступила в редакцию 1.II.1982