Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 539.3

ДВЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО КОЛЬЦА

Боган Ю. А.

Изучаются вторая краевая задача (на границе заданы перемещения) и несобственно смешанная задача для цилиндрически ортотропного кольца. Предполагается, что коэффициенты упругости — непрерывно дифференцируемые функции координат и зависят от малого параметра специфическим образом. Вид зависимости коэффициентов от малого параметра выбирается таким образом, чтобы в случае постоянных коэффициентов он описывал армирование кольца двумя семействами очень жестких волокон, расположенных по радиус-векторам и концентрическим окружностям, причем жесткость семейств волокон одинакова по порядку. Поэтому коэффициенты упругости представлены в виде произведений постоянных, которые в дальнейшем условно назовем «жесткостями», и функций координат. Предполагается, что жесткости в радиальном и окружном направлениях равны и значительно превышают жесткость на сдвиг. При использовании в качестве малого параметра отношения жесткости на сдвиг к жесткости в радиальном направлении строится асимптотика решения рассматриваемых краевых задач. В случае второй краевой задачи предельная краевая задача описывается гиперболической системой уравнений и не является однозначно разрешимой, так как одно из семейств характеристик параллельно границе. В процессе построения асимптотики возникает необходимость в усреднении коэффициентов упругости по окружной координате. В этом отношении имеется аналогия с результатами [1], где изучалась краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка.

1. Примем обобщенный закон Гука в виде

$$\sigma_r = c_{11}d_1e_r + c_{12}d_2e_\theta, \quad \tau_{r\theta} = c_{66}d_4e_{r\theta}, \quad \sigma_\theta = c_{12}d_2e_r + {}$$
$$+ c_{11}d_3e_\theta$$

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

где c_{11}, c_{12}, c_{66} — постоянные, d_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — непрерывно дифференцируемые функции координат, u, v — радиальное и окружное перемещения. Из положительности потенциальной энергии деформации следует, что c_{ij}, d_i должны удовлетворять ограничениям

$$c_{11}^2d_1d_3 - c_{12}^2d_2^2 > 0, \quad c_{11}d_1 > 0, \quad c_{66}d_4 > 0$$

Пусть $c_{11} > 0$, $c_{66} > 0$, $c_{11} \gg c_{66}$. Введем малый параметр $\varepsilon^2 = c_{66}c_{11}^{-1}$ и безразмерные напряжения, положив

$$\bar\sigma_r = \sigma_r c_{11}^{-1}, \quad \bar\sigma_\theta = \sigma_\theta c_{11}^{-1}, \quad \bar\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}c_{11}^{-1}$$

Сохраним в дальнейшем для безразмерных напряжений прежние обозначения. Тогда обобщенный закон Гука можно записать следующим образом:

$$\sigma_r = d_1e_r + b\varepsilon^2d_2e_\theta, \quad \tau_{r\theta} = \varepsilon^2d_4e_{r\theta} \tag{1.1}$$
$$\sigma_\theta = b\varepsilon^2d_2e_r + d_3e_\theta, \quad b = c_{12}c_{11}^{-1}$$

Пусть Q — круговое кольцо, $Q = \{(r, \theta); 0 < c \leqslant r \leqslant a\}$. Введем безразмерную координату $x = \ln(r/a)$ и положим $x_0 = \ln(c/a)$. Выпишем систему уравнений равновесия в отсутствие объемных сил

$$
(1.2)\qquad d_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-d_3\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(d_2\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(d_4\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}-v\right)\right)\right]=0
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\theta}\left[d_3\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right]+\varepsilon^2\left[b\frac{\partial}{\partial\theta}\,d_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(d_4\frac{\partial u}{\partial\theta}+d_4\frac{\partial v}{\partial x}\right)-
$$

$$
-\left(\frac{\partial d_4}{\partial x}+d_4\right)\left(v-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\Big]=0
$$

Поставим для системы уравнений (1.2) краевые задачи:

задача A_ε:

$$
(1.3)\qquad u(0,\theta)=p_1(\theta),\quad u(x_0,\theta)=p_2(\theta)
$$

$$
v(x_0,\theta)=p_4(\theta),\quad v(0,\theta)=p_3(\theta)
$$

задача B_ε: первые три граничных условия задачи A_ε сохранены, вместо четвертого поставлено условие

$$
(1.4)\qquad \left[\varepsilon^2 d_4\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}-v\right)+\rho\left(d_1\frac{\partial u}{\partial x}+b\varepsilon^2 d_2\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right)\right]_{x=0}=0
$$

соответствующее наличию сил сухого трения на границе тела $x=0$, ρ — коэффициент трения [2]. Потребуем, чтобы перемещения и функции $p_k(\theta)$ $(k=1,2,3,4)$ были непрерывно-дифференцируемыми функциями полярного угла.

2. Построим асимптотику задачи A_ε при малом ε. Ищем приближенное решение системы уравнений (1.2) в виде

$$
(2.1)\qquad u^\circ(x,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n u_n(x,\theta),\quad v^\circ(x,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n v_n(x,\theta)
$$

где u_n и v_n — периодические функции θ. При подстановке (2.1) в (1.2) получим рекуррентно связанную систему уравнений

$$
(2.2)\qquad d_1\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}-d_3\left(u_n+\frac{\partial v_n}{\partial\theta}\right)=P_n(u_{n-2},v_{n-2})
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\theta}\left[d_3\left(u_n+\frac{\partial v_n}{\partial\theta}\right)\right]=Q_n(u_{n-2},v_{n-2})
$$

$$
P_0=P_1=Q_0=Q_1=0
$$

(P_n, Q_n — дифференциальные операторы, стоящие при степени ε^2 в (1.2) соответственно в первом и втором уравнениях.)

Рассмотрим уравнения (2.2) при $n=0$. Потребуем, чтобы функция $u_0(x,\theta)$ удовлетворяла первым двум граничным условиям (1.3). Интегрируя второе уравнение (2.2), получим

$$
v_0(x,\theta)=\frac{\langle u_0(x,\theta)\rangle}{\lambda(x)}\int_0^\theta\frac{ds}{d_3(x,s)}-\int_0^\theta u_0(x,s)\,ds+g_0(x),\quad \lambda(x)=
$$

$$
=\langle d_3^{-1}(x,\theta)\rangle
$$

где $\langle m\rangle$ означает среднее по периоду от функции $m(x,\theta)$, $g_0(x)$ произвольна и при помощи первых двух граничных условий (1.3) не определяется.

Первое уравнение системы (2.2) приобретает вид

$$
(2.3)\qquad d_1\frac{\partial^2 u_0(x,\theta)}{\partial x^2}-\frac{\langle u_0(x,\theta)\rangle}{\lambda(x)}=0
$$

Представляя $u_0(x,\theta)$ в виде тригонометрического ряда

$$
u_0(x,\theta)=\langle u_0(x,\theta)\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}u_{n1}(x)\cos n\theta+u_{n2}(x)\sin n\theta
$$

можно показать, что при первых двух граничных условиях (1.3) уравнение (2.3) имеет единственное решение. В результате функция $u_0(x, \theta)$ определена однозначно, а $v_0(x, \theta)$ — с точностью до произвольной функции $g_0(x)$. Продолжая итерационную процедуру далее, можно показать, что и при $n \geqslant 1$ функции $v_n(x, \theta)$ определены только с точностью до произвольной функции $g_n(x)$.

Уравнение для определения функций $g_n(x)$ можно получить из второго уравнения системы (2.2). Действительно, для того чтобы оно имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы среднее от правой части по периоду равнялось нулю, и потому должно иметь место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\langle d_4(x, \theta)\rangle \frac{\partial v_n}{\partial x}\right] - \langle m(x, \theta)\rangle v_n = 0; \quad m(x, \theta) = \frac{\partial d_4}{\partial x} + d_4$$

Но $v_n = q_{n,0}(x, \theta) + g_n(x)$, где $q_{n,0}(x, \theta)$ — известная периодическая функция. Отсюда для функции $g_n(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\langle d_4(x, \theta)\rangle \frac{dg_n}{dx}\right] - \langle m(x, \theta)\rangle g_n = 0 \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.4) зависит от двух произвольных постоянных $g_n(0)$ и $g_n(x_0)$, для определения которых используем функции пограничного слоя.

Построим функции пограничного слоя вблизи $x = 0$ (вблизи $x = x_0$ они строятся аналогично). Введем вблизи $x = 0$ растянутую координату $\eta = x/\varepsilon$. Разложим коэффициенты системы уравнений (1.2) в ряды Тейлора по степеням ε и будем искать приближенное решение получившейся системы уравнений в виде

$$u^1(\eta, \theta) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{N-2} \varepsilon^n u_{n,0}(\eta, \theta), \quad v^1(\eta, \theta) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n v_{n,0}(\eta, \theta) \tag{2.5}$$

Для определения функций $u_{n,0}$, $v_{n,0}$ получаем рекуррентно связанную систему уравнений

$$\begin{gathered} d_1(0, \theta)\frac{\partial^2 u_{n,0}}{\partial \eta^2} - d_3(0, \theta)\frac{\partial v_{n,0}}{\partial \theta} = f_{n,0}(u_{k,0};\ v_{k,0}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left[d_3(0, \theta)\frac{\partial v_{n,0}}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[d_4(0, \theta)\frac{\partial v_{n,0}}{\partial \eta}\right] = g_{n,0}(u_{k,0};\ v_{k,0}) \\ f_{0,0} = g_{0,0} = 0, \quad k < n \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $f_{n,0}$, $g_{n,0}$ — известные дифференциальные операторы. Потребуем, чтобы функции $v_{n,0}(0, \theta)$ были периодическими по θ и экспоненциально убывали при $\eta \to +\infty$. Функция $v_{0,0}(\eta, \theta)$ должна удовлетворять граничному условию

$$v_{0,0}(0, \theta) = p_3(\theta) - q_{0,0}(0, \theta) - g_0(0)$$

По лемме 5 из [1] ограниченное при $\eta \to +\infty$ решение уравнения (2.6) допускает оценку

$$|v_{0,0}(\eta, \theta) - \langle p_3(\theta) - q_{0,0}(0, \theta) - g_0(0)\rangle| < c_1 e^{-c_2\eta}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0$$

и для экспоненциальности убывания $v_{0,0}(\eta, \theta)$ необходимо потребовать, чтобы интеграл в предыдущем неравенстве равнялся нулю. Поэтому

$$g_0(0) = \langle p_3(\theta) - q_{0,0}(0, \theta)\rangle$$

Аналогично, построив функции пограничного слоя вблизи $x = x_0$, получим $g_0(x_0) = \langle p_4(\theta) - q_{0,0}(x_0, \theta)\rangle$. Зная $g_0(0)$, $g_0(x_0)$, из (2.4) определяем $g_0(x)$ и $v_0(x, \theta)$. При дальнейшем проведении итерационной процедуры построения функций пограничного слоя определяем $g_n(0)$ и $g_n(x_0)$ и, как следствие, $v_n(x, \theta)$.

Окончательно, асимптотика задачи A_ε имеет вид

$$u(x, \theta) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n u_n(x, \theta) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{N-2} \varepsilon^n [u_{n,0}(\eta, \theta) + u_{n,1}(\eta, \theta)] + \\ + \varepsilon^{N+1} R_N^{(1)}(x, \theta)$$

$$v(x, \theta) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n [v_n(x, \theta) + v_{n,0}(\eta, \theta) + v_{n,1}(\eta_1, \theta)] + \varepsilon^{N+1} R_N^{(2)}(x, \theta)$$

где $u_{n,1}(\eta_1, \theta)$, $v_{n,1}(\eta_1, \theta)$ — функции пограничного слоя вблизи $x = x_0$, $\eta_1 = (x_0 - x)/\varepsilon$, $\varepsilon^{N+1} R_N^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ — остаточные члены.

3. Построим асимптотику задачи B_ε при малом ε. В отличие от задачи A_ε решение системы уравнений (1.2) следует искать в виде

$$u^\circ(x, \theta) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n u_n(x, \theta), \quad v^\circ(x, \theta) = \varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n v_n(x, \theta) \tag{3.1}$$

При подстановке (3.1) в (1.2) получим рекуррентно связанные системы уравнений

$$d_3 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d_3 \frac{\partial v_n}{\partial \theta}\right) = 0, \quad n = 0, 1 \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} -d_3 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + L(u_{n-2}, v_{n-2}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d_3 \frac{\partial v_n}{\partial \theta}\right) + M(u_{n-2}, v_{n-2}) = 0, \quad n = 2, 3 \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} -d_3 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + L(u_{n-2}, v_{n-2}) + L_1(u_{n-4}, v_{n-4}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d_3 \frac{\partial v_n}{\partial \theta}\right) + M(u_{n-2}, v_{n-2}) + M_1(u_{n-4}, v_{n-4}) = 0, \quad n \geqslant 4 \end{gathered} \tag{3.4}$$

где дифференциальные операторы $L(u, v)$, $M(u, v)$, $L_1(u, v)$, $M_1(u, v)$ даются формулами

$$L(u, v) = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d_3 u + \frac{\partial}{\partial x}\left(d_2 \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[d_4\left(\frac{\partial v}{\partial x} - v\right)\right]$$

$$M(u, v) = \frac{\partial}{\partial \theta}(d_3 u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(d_4 \frac{\partial v}{\partial x}\right) - mv$$

$$L_1(u, v) = \frac{\partial}{\partial x}(d_2 u) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d_4 \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$M_1(u, v) = m \frac{\partial u}{\partial \theta} + b \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d_2 \frac{\partial u}{dx}\right) + b \frac{\partial}{\partial x}\left(d_4 \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

Рассмотрим вопрос о существовании периодических решений систем уравнений (3.2) — (3.4). Очевидно, из (3.2) следует, что $v_0 = v_0(x)$, $v_1 = v_1(x)$. Интегрируя второе уравнение системы (3.3) при $n = 2$ по θ, получим

$$d_3 \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + d_3 u_0 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\theta d_4(x, s) \frac{\partial v_0(x, s)}{\partial x} ds\right] - \\ - v_0(x) \int_0^\theta m(x, s)\, ds + g_0(x) = 0 \tag{3.5}$$

Из периодичности u_0 следует, что v_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\langle d_4 \rangle \frac{\partial v_0}{\partial x}\right] - \langle m \rangle v_0 = 0$$

Сложив (3.5) с первым уравнением системы (3.3) при $n = 2$, получим

$$d_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial d_4}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-v_0\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\int\limits_0^\theta d_4(x,s)\frac{\partial v_0}{\partial x}ds\right]-$$

$$-v_0(x)\int\limits_0^\theta m(x,s)\,ds+g_0(x)=0$$

где функция $g_0(x)$ определяется из условия периодичности $v_2(x, \theta)$ по θ.

Умножим уравнение (3.5) на d_3^{-1} и результат проинтегрируем по θ. Тогда

$$v_2(x,\theta)+\int\limits_0^\theta u_0(x,s)\,ds+S(v_0,x)+\theta g_0(x)+g_1(x)=0$$

где $S(v_0, x)$ — известная функция. Из периодичности $v_2(x, \theta)$ следует, что $g_0(x) = -\langle u_0\rangle + G_0(v_0, x)$, ($G_0(v_0, x)$ — известная функция), что дает уравнение для $u_0(x, \theta)$

$$d_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\langle u_0(x,\theta)\rangle+G_0(v_0,x)+G_1(v_1,x)=0 \tag{3.6}$$

аналогичное (2.3) и допускающее единственное решение при заданных $u_0(0, \theta)$, $u_0(x_0, \theta)$. При этом $v_2(x, \theta) = q_{20}(x, \theta) + g_2(x)$, где $q_{20}(x, \theta)$ определяется по известным функциям u_0, v_0 и периодична по θ, $g_2(x)$ следует определить.

Для этого подставим $v_2(x, \theta) = q_{20}(x, \theta) + g_2(x)$ во второе уравнение системы (3.4) при $n = 4$ и используем условие периодичности v_4 по θ. Отсюда имеем уравнение для $g_2(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[\langle d_4\rangle\frac{dg_2}{\partial x}\right]-\langle m(x,\theta)\rangle g_2+F_0(x)=0$$

аналогичное (2.4), а для u_2 — уравнение, аналогичное (3.6).

Продолжив итерационный процесс далее, получим, что $u_n(x, \theta)$ определяется из уравнения

$$d_1\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}-\langle u_n(x,\theta)\rangle=G_n(x)$$

а $v_n(x, \theta) = q_{n0}(x, \theta) + g_n(x)$, где q_{n0} определены через функции u_k, v_k предыдущих итераций, причем $g_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[\langle d_4\rangle\frac{dg_n}{dx}\right]-\langle m\rangle g_n=F_n(x)$$

где $F_n(x)$ также известны. Для полного определения $g_n(x)$ необходимо знать функции пограничного слоя вблизи $x = 0$, x_0.

Функции пограничного слоя разыскиваются в виде (2.5). Процедура их построения аналогична описанной выше с тем отличием, что функции $v_{n,0}(\eta, \theta)$ будут удовлетворять при $\eta = 0$ граничным условиям типа Неймана, что позволяет определить $g_n'(0)$, $g_n'(x_0)$ из условия экспоненциальности затухания функций пограничного слоя [3].

Асимптотика задачи B_ε существенно отличается от асимптотики задачи A_ε тем, что разложение в ряд по степеням ε для $v(x, \theta)$ приходится начинать со степени -2, а это связано, в свою очередь, с тем, что коэффициент трения предполагается ненулевым. При $\rho = 0$ разложение в ряд начинается с нулевой степени ε.

Система уравнений (2.2) для определения функций u_n, v_n — гиперболическая с двумя двойными семействами характеристик $x \equiv \mathrm{const}$ и $\theta \equiv \mathrm{const}$, что ввиду требования однозначности перемещений и приводит к появлению в асимптотике усреднения по угловой координате. Отметим, что в задаче B_ε «радиальная» часть функции $v_n(x, \theta)$ выделяется автоматически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасьминский Р. З.* О диффузионных процессах с малым параметром.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, т. 27, № 6, с. 1281—1300.
2. *Ландис Е. М., Панасенко Г. П.* Об одном варианте теории типа Фрагмена — Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной.— В кн.: Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 5. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 105—136.
3. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей.— Матем. сб., 1980, т. 112, № 4, с. 588—610.

Новосибирск

Поступила в редакцию 24.I.1983