Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 539.3

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НАПРЯЖЕНИЯХ

Холматов Т.

Обсуждается постановка [1] квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях, в том числе и вариационная, которая заключается в решении шести уравнений относительно шести компонент симметричного тензора напряжений при удовлетворении шести граничным условиям. Предлагаются методы последовательных приближений для решения такой задачи и доказываются теоремы о сходимости этих методов, в том числе «быстросходящегося», скорость сходимости которого существенно выше, чем геометрической прогрессии.

При численном решении краевых задач механики деформируемого твердого тела использование вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно позволяет составить априори устойчивую разностную схему [1], а также наметить эффективные пути к ее разрешению. Хорошо известны недостатки применения каждого из этих вариационных принципов. Так, при использовании лагранжиана искомыми величинами являются перемещения, и для определения напряженного состояния необходимо использовать процедуру численного дифференцирования, существенно понижающую точность полученного решения. При использовании кастильяниана задача заключается в отыскании условного экстремума (в классе тензоров-функций, удовлетворяющих уравнениям равновесия и статическим граничным условиям), что часто оказывается затруднительным.

Ниже рассматривается новый вариационный принцип, основанный на решении задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях [1] и указываются методы решения квазистатической задачи физически нелинейной механики деформируемого твердого тела.

1. Рассмотрим физически нелинейную среду, в которой связь между компонентами тензора деформаций ε и тензора напряжений σ задается в операторном виде

$$\varepsilon_{ij} = G_{ij}(\sigma) \tag{1.1}$$

Пусть на границе тела Σ, занимающего объем V, задан вектор усилий и выполнены условия равновесия

$$\sigma_{ij} n_j |_\Sigma = S_i^\circ, \quad q_i |_\Sigma = -X_i |_\Sigma \tag{1.2}$$

(X_i — компонента вектора объемных сил).

Квазистатическая задача механики деформируемого твердого тела в напряжениях (задача Б [1]) заключается в решении шести уравнений относительно шести независимых компонент тензора напряжений

$$E_{ijk,k} + Y_{ij} = 0 \tag{1.3}$$

при удовлетворении граничным условиям (1.2). Здесь

$$\begin{aligned} E_{ijk} \equiv {} & \varepsilon_{ij,k} + \delta_{ki}(^1/_2\,\varepsilon_{mm,j} - \varepsilon_{mj,m}) + \delta_{kj}(^1/_2\,\varepsilon_{mm,i} - \varepsilon_{mi,m}) + \\ & + \xi_{ij}(\varepsilon_{mk,m} - \varepsilon_{mm,k}) + R_i(q) + R_j(q) - \xi_{ij}R_k(q) \end{aligned} \tag{1.4}$$

причем вместо деформаций ε поставлено их выражение через напряжения (1.1), ξ — некоторый произвольный симметричный тензор-константа, R — некоторый линейный вектор-оператор, такой, что $R(q) = 0$ только для $q = 0$, а симметричный тензор Y определяется по формуле

$$Y_{ij} = R_{i,j}(X) + R_{i,j}(X) - \xi_{ij}R_{k,k}(X) \tag{1.5}$$

Предположим, что существует скалярный оператор Ω, зависящий от градиентов напряжений, для которого выполняются условия потенциальности тензора (1.4) [2] $E_{ijk} = \partial\Omega/\partial\sigma_{ij,k}$. Тогда обобщенное решение задачи (1.2), (1.3) может быть найдено как стационарная точка функционала

$$I = \int_V (\Omega - Y_{ij}\sigma_{ij})\,dV - \int_\Sigma \chi_{ij}\sigma_{ij}\,d\Sigma + \int_\Sigma \left[\frac{1}{2}(Aq_iq_i + B\sigma_{ij}n_j\sigma_{ik}n_k) + AX_iq_i - BS_i^\circ\sigma_{ij}n_j\right] d\Sigma \tag{1.6}$$

где A и B — некоторые размерные постоянные, отличные от нуля, а симметричный тензор потоков $\chi_{ij} = E_{ijk}n_k$, определенный на поверхности Σ, не варьируется.

Обобщенным решением задачи Б называется симметричный тензор σ, удовлетворяющий для всякого гладкого симметричного тензора τ интегральному тождеству [3]

$$\int_V E_{ijk}(\sigma)\tau_{ij,k}\,dV + f_\Sigma(\tau) = N(\tau)$$

$$N \equiv N^V + N_1^\Sigma + N_2^\Sigma, \quad N^V(\tau) \equiv \int_V Y_{ij}\tau_{ij}\,dV$$

$$N_1^\Sigma(\tau) \equiv \int_\Sigma \chi_{ij}(\sigma)\tau_{ij}\,d\Sigma, \quad N_2^\Sigma(\tau) \equiv \int_\Sigma (BS_i^\circ\tau_{ik}n_k - AX_i\tau_{ik,k})\,d\Sigma,$$

$$f_\Sigma(\tau) = \frac{1}{2}\int_\Sigma (Aq_i\tau_{ij,j} + B\sigma_{ij}n_j\tau_{ik}n_k)\,d\Sigma$$

2. Рассмотрим некоторый линейный тензор-оператор от градиента напряжений

$$\pi_{ijk} = \Pi_{ijk}(\partial\sigma) \tag{2.1}$$

такой, что в функциональном пространстве $\partial\sigma \in D$ величина

$$(\sigma, \tau)_\pi = \int_V \pi_{ijk}(\partial\sigma)\tau_{ij,k}\,dV \tag{2.2}$$

удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения [4], так что рассматриваемое функциональное пространство D гильбертово. Пусть, кроме того, оператор (2.1) таков, что для произвольного симметричного по первым двум индексам тензора h_{ijk} выполняются неравенства

$$k\pi_{ijk}(h)h_{ijk} \leqslant \left[\frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,n}}h_{lmn}\right]h_{ijk} \leqslant K\pi_{ijk}(h)h_{ijk}, \quad 0 < k \leqslant K \tag{2.3}$$

Если

$$\pi_{ijk}(\partial\sigma) = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jn})\sigma_{lm,k} = \sigma_{ij,k} \tag{2.4}$$

то первое из неравенств эквивалентно при $k = k_0$ неравенству (4.7) работы [5].

При таком выборе оператора Π (2.4) гильбертово пространство D обозначим через D_0.

Если теперь существует единственное обобщенное решение задачи Б для случая, когда оператор определяющих соотношений (1.1) является оператором Π (2.1) (задача $Б_\pi$), можно построить метод последовательных приближений

$$E_{ijk,\,k}\{\Pi(\partial\sigma^{(m+1)})\} = E_{ijk,\,k}\{\Pi(\partial\sigma^{(m)})\} - \beta^{(m)}[E_{ijk,\,k}\{G(\partial\sigma^{(m)})\} + Y_{ij}] \tag{2.5}$$

$$\sigma_{ij}^{(m+1)}n_j|_\Sigma = S_i^\circ, \quad q_i^{(m+1)}|_\Sigma = -X_i|_\Sigma$$

начиная с некоторого нулевого приближения $\sigma^{(0)}$ и полагая $m = 0, 1, \ldots$

Теорема 1. Пусть существует единственное обобщенное решение задачи $Б_\pi$, справедливы условия (2.3), заданные поверхностные нагрузки и объемные силы удовлетворяют условиям

$$S^\circ \in L_p(\Sigma), \quad X|_\Sigma \in L_p(\Sigma), \quad p < {}^4/_3 \tag{2.6}$$

Пусть, кроме того, для нулевого приближения $\sigma^{(0)}$ выполняется условие

$$[E_{ijk}(\sigma^{(0)}) - \pi_{ijk}(\sigma^{(0)})]\,h_{ijk} \leqslant k\pi_{ijk}(h)\,h_{ijk} \tag{2.7}$$

где h — произвольный, симметричный по первым двум индексам тензор третьего ранга. Тогда в некоторой окрестности

$$\|\sigma - \sigma^{(0)}\|_\pi \leqslant r \tag{2.8}$$

существует обобщенное решение σ^* задачи Б, единственное в этой окрестности, и при любом значении итерационного параметра δ $(0 < \beta < 2/K)$ к нему сходится начинающийся с $\sigma^{(0)}$ процесс последовательных приближений (2.5), причем

$$\|\sigma^{(m)} - \sigma^*\|_\pi \leqslant \frac{q^m}{1-q}\|\sigma^{(1)} - \sigma^{(0)}\|_\pi \tag{2.9}$$

$$q \equiv \max(|1 - \beta k|,\ |1 - \beta K|) < 1$$

(Частный случай этой теоремы сформулирован автором в работе [3].)

Для доказательства теоремы рассмотрим тождество

$$\int_V \pi_{ijk}(\sigma)\tau_{ij,\,k}\,dV = \int_V \pi_{ijk}(\sigma)\tau_{ij,\,k}\,dV - \beta\left[\int_V E_{ijk}(\sigma)\tau_{ij,\,k}\,dV + f_\Sigma(\tau) - N(\tau)\right] \tag{2.10}$$

Слева в (2.10) стоит скалярное произведение $(\sigma, \tau)_\pi$ в пространстве D_0. Правая часть представляет собой, согласно (2.3), линейный функционал от τ в этом пространстве. Используя теоремы вложения О. Л. Соболева, можно установить, что для этого необходимо выполнение условия (2.6). По теореме Рисса этот функционал может быть представлен в виде скалярного произведения (σ', τ), где $\sigma' \in D_0$. Следовательно, некоторый оператор H ставит в соответствие каждой тензор-функции $\sigma \in D_0$ тензор-функцию $\sigma' \in D_0$. Итак, вопрос о нахождении обобщенного решения задачи Б сводится к решению операторного уравнения следующего вида: $\sigma = H\sigma$.

Для двух тензоров-функций $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ и их разности $w = \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}$ имеем из (2.10) и условия (2.3)

$$|(H\sigma^{(2)} - H\sigma^{(1)}, w)_\pi| = |(w, w)_\pi - \beta\int_V [E_{ijk}(\sigma^{(2)}) - E_{ijk}(\sigma^{(1)})]\,w_{ijk}\,dV| \leqslant q\|w\|_\pi^2 \tag{2.11}$$

$$w_{ijk} = \sigma_{lm,\,n}^{(2)} - \sigma_{lm,\,n}^{(1)}$$

где q определяется из второго соотношения (2.9). При этом

$$| 1 - \beta k | \geqslant | 1 - \beta K |, \quad 0 < \beta \leqslant \beta_*$$
$$| 1 - \beta K | \geqslant | 1 - \beta k |, \quad \beta_* \leqslant \beta \leqslant 2/K$$
$$(\beta_* = 2/(k + K))$$

Поэтому при $0 < \beta \leqslant 2/K$ выполняется условие $q < 1$, и неравенство (2.11) удовлетворяется, если

$$\| H\sigma^{(2)} - H\sigma^{(1)} \|_\pi \leqslant q \| \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} \|_\pi \tag{2.12}$$

Заметим, что наименьшее значение $q = (K - k)/(K + m)$ величина q достигает при $\beta = \beta_*$. Заметим также, что на каждом итерационном шаге можно изменять значения β так, чтобы $\beta^{(m)} \in (0, 2/K)$.

Из неравенства (2.12) следует, что оператор H осуществляет в D_0 сжатые отображения [4].

Далее имеем

$$(H\sigma - H\sigma^{(0)}, \tau)_\pi = (H\sigma - H\sigma^{(0)}, \tau)_\pi + (H\sigma^{(0)} - \sigma^{(0)}, \tau)_\pi \tag{2.13}$$

Но из тождества (2.10) следует

$$(H\sigma^{(0)} - \sigma^{(0)}, \tau)_\pi = \beta \int\limits_V [E_{ijk}(\sigma^{(0)}) - \pi_{ijk}(\sigma^{(0)})] \tau_{ij,\,k}\, dV \tag{2.14}$$

Применяя к (2.14) условие (2.7) и полагая в (2.13) $\tau = \sigma - \sigma^{(0)}$, получим

$$\| H\sigma - \sigma^{(0)} \| \leqslant (q + \beta K)\, r \leqslant r$$

т. е. оператор H, совершая сжатые отображения, не выводит ни одну точку из окрестности (2.8). Поэтому согласно принципу сжатых отображений, существует обобщенное решение задачи Б. Единственность этого решения следует из работы [1].

3. Чтобы получить сходимость итерационного процесса более быструю, чем сходимость геометрической прогрессии, наложим ограничение на вторые функциональные производные определяющих соотношений (1.1). Пусть для произвольного симметричного по первым двум индексам тензора третьего ранга h справедливо неравенство

$$\left| \left[\frac{\partial^2 E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,\,n}\,\partial\sigma_{pq,\,r}} h_{lmn} h_{pqr} \right] h_{ijk} \right| \leqslant l\,(h_{ijk}h_{ijk})^{3/2}, \quad l > 0 \tag{3.1}$$

Предположим далее, что пространство D_1 со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_1 = \int\limits_V \left[\frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,\,n}} \sigma_{lmn} \right] \tau_{ij,\,k}\, dV \tag{3.2}$$

гильбертово для тензорных полей σ, τ определенных в конечной области V. Тогда справедлива следующая

Теорема 2 (*быстросходящийся метод* [1]). Пусть существует единственное обобщенное решение задач $Б_\pi$, выполнены неравенства (3.1) и неравенства

$$k h_{ijk} h_{ijk} \leqslant \left[\frac{\partial E_{ijk}}{\partial\sigma_{lm,\,n}} h_{lmn} \right] h_{ijk} \leqslant K h_{ijk} h_{ijk}, \quad 0 < k \leqslant K$$

Пусть, кроме того, a — такое положительное число, что

$$\int\limits_V [E_{ijk}(\sigma^{(0)}) - \overset{\circ}{E}_{ijk}(\sigma^{(0)})]\, \sigma^{(0)}_{ij,\,k}\, dV \leqslant n_1 a \int\limits_V \sigma^{(0)}_{ij,\,k} \sigma^{(0)}_{ij,\,k}\, dV$$

Тогда найдется такое число α, $0 < \alpha \leqslant 1$, что задача Б имеет единственное решение σ^* в окрестности $\| \sigma^{(0)} - \sigma^* \|_1 \leqslant r_0$, если выполняется неравенство

$$q \leqslant a^{-\alpha}C; \quad q \equiv \frac{3}{2}\frac{l}{k}V^{-\alpha/2}, \quad C \equiv \alpha(1+\alpha)^{-(1+\alpha)/\alpha} \tag{3.3}$$

где r_0 — наименьший корень уравнения $qr^{1+\alpha} - r + a = 0$.

При $\beta = 1$ к этому решению сходится начинающийся с $\sigma^{(0)}$ процесс последовательных приближений, если за оператор $\overset{\circ}{E}_{ijk}$ принять

$$\overset{\circ}{E}_{ijk}(h) = \frac{\partial E_{ijk}}{\partial \sigma_{lm,\,n}} h_{lmn}$$

причем

$$\| \sigma^{(n)} - \sigma^* \|_1 \leqslant C_1 \delta^{(1+\alpha)^n}, \quad \delta = C^{1/\alpha}, \quad C_1 = \frac{a}{\delta(1-\delta)}$$

Доказательство следует из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
2. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 224 с.
3. *Холматов Т.* О методах решения задачи в напряжениях.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 315—317.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
5. *Победря Б. Е.* Квазистатическая задача механики деформируемого твердого тела в напряжениях.— ПММ., 1981, т. 45, вып. 2, с. 205—214.

Самарканд

Поступила в редакцию 8.IV.1982