

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
УПРУГИХ ТЕЛ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ  
МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Михайлов С. Е.

Рассматривается задача об антиплоской деформации упругого цилиндра с многосвязным конечным или бесконечным сечением, ограниченным системой замкнутых кривых, которые могут иметь угловые точки. На всей границе тела заданы усилия либо смещения. Задача сводится к интегральному уравнению, ядро которого имеет сильные стационарные особенности в угловых точках. Приводятся результаты по исследованию разрешимости этого уравнения и гладкости его решения. Описывается процедура численного решения интегрального уравнения. В качестве примера рассматривается пространство с призматическим прямоугольным в сечении отверстием или жестким включением под действием равномерного касательного усилия на бесконечности. Вычисляются обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений.

1. Рассмотрим задачу об антиплоской деформации упругого изотропного цилиндра, сечение  $D$  которого может быть многосвязным и ограничено системой  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$  замкнутых контуров ограниченного вращения без точек возврата. В частности, граница области  $D$  может иметь угловые точки, внутренний угол в которых не равен нулю или  $2\pi$ . Контур  $\Gamma_0$  охватывает все остальные контуры  $\Gamma_i$ . Он может отсутствовать, тогда рассматриваемая область бесконечна. На всей границе заданы усилия (задача 1) или смещения (задача 2). Известно [1], что в угловых точках в такого рода задачах, если разыскиваются решения с ограниченной энергией, напряжения могут иметь степенные особенности.

Пусть  $W$  — смещение вдоль оси цилиндра, тогда напряжения выражаются через  $W$  в виде

$$\tau_x = \sigma_{xz} = G \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \tau_y = \sigma_{yz} = G \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \tau_n = \sigma_{nz} = G \frac{\partial W}{\partial n}$$

Здесь  $z$  — координата, параллельная оси цилиндра,  $x, y$  — декартовы координаты в плоскости сечения  $D$ ,  $G$  — модуль сдвига. Для выполнения уравнения равновесия необходимо, чтобы смещение  $W$  удовлетворяло уравнению Лапласа

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

Рассматриваются задачи со следующими граничными условиями:

$$(1.2) \quad \frac{\partial W}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \equiv \frac{\tau_n}{G} = \frac{1}{G} T(s) \quad (\text{задача 1})$$

$$(1.3) \quad W \Big|_{\Gamma} = U(s) \quad (\text{задача 2})$$

Здесь  $s$  — длина дуги контура  $\Gamma$ , ориентированного так, чтобы при обходе в положительном направлении область  $D$  оставалась слева,  $n$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ , заданное смещение  $U(s) \in W_r^1(\Gamma)$ , заданное усилие  $T(s) \in L_r(\Gamma)$ ,  $1 < r < \infty$ .

Будем разыскивать решения этих задач в классе функций  $W \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  и ограниченных на бесконечности, если область бесконечна.

Решение задачи 1 ищется в виде

$$(1.4) \quad W^{(1)}(x_1, y_1) = \operatorname{Im} \left\{ \int_{z_0}^{z_1} \Phi(z) dz \right\} + C$$

Решение задачи 2 — в виде

$$(1.5) \quad W^{(2)}(x_1, y_1) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^{z_1} [\Phi(z) + \Sigma(z)] dz \right\} + A_0, \quad \Sigma(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{z - a_i}$$

Здесь  $z_1 = x_1 + iy_1$  — комплексная координата точки в  $D$ ,  $z_0$  — произвольная фиксированная точка в  $D$ , функция  $\Phi(z)$  — аналитическая,  $C$  — произвольная действительная постоянная,  $a_i$  — произвольные точки внутри контуров  $\Gamma_i$ ,  $A_i$  — действительные постоянные, способ определения которых будет указан ниже.

Напряжения через функцию  $\Phi$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &= G \operatorname{Im} \Phi(z), & \tau_y^{(1)} &= G \operatorname{Re} \Phi(z) \\ \tau_x^{(2)} &= G \operatorname{Re} [\Phi(z) + \Sigma(z)], & \tau_y^{(2)} &= -G \operatorname{Im} [\Phi(z) + \Sigma(z)] \end{aligned}$$

Функцию  $\Phi(z)$  в (1.4), (1.5) будем искать в виде интеграла типа Коши с действительной плотностью  $\mu(s) \in L_p(\Gamma)$ ,  $1 < p < \infty$

$$(1.6) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(s) ds}{t - z}$$

где  $t = t(s)$  — комплексная координата точки контура,  $k = dt/ds$ . В дальнейшем не различаются функции от аргументов  $s$  и  $t$ , т. е.  $g(t) = g(t(s)) = g(s)$ . Представление (1.4), (1.6) — обычный потенциал простого слоя, а представление (1.5), (1.6) можно выразить через угловой потенциал, используемый в [2] для задач в односвязных областях с гладкими границами.

После подстановки (1.4), (1.6) в (1.2), а (1.5), (1.6) — в продифференцированное по  $z$  условие (1.3) получаем для обеих задач интегральное уравнение относительно  $\mu(s)$

$$(1.7) \quad (I - K)\mu = f, \quad (K\mu)(s_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(s) \operatorname{Im} \left[ \frac{k(s_0)}{t - t_0} \right] ds, \quad (t = t(s_0))$$

$$f(t) = \begin{cases} -T(s)/G & \text{для задачи 1} \\ \frac{dU(s)}{ds} - \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m \frac{k(s) A_i}{t(s) - a_i} & \text{для задачи 2} \end{cases}$$

Представление (1.6) допускает интегрируемые степенные особенности напряжений, если  $1 < p < \infty$  и  $p$  достаточно мало. Поэтому будем искать решение (1.7)  $\mu \in L_p$  с возможно меньшим  $p > 1$ .

Для гладких контуров уравнение (1.7) получено в [3], § 140. Если контур  $\Gamma$  — кусочно-ляпуновский с показателем Гельдера в условии Ляпунова, равным единице, то ядро уравнения (1.6) — ограниченное везде, за исключением угловых точек, где оно имеет особенность первого порядка при стремлении  $s$  и  $s_0$  к угловой точке с разных сторон. Такие уравнения рассматривались в [4, 5], где получены формулы для их индекса. Основываясь на этих результатах, можно показать, что в пространствах  $L_p$ ,  $1 < p < p_0$  уравнение (1.7) является обобщенным уравнением Фредгольма

$$(1.8) \quad p_0 = 1 + \left( \max_j |1 - \omega_j/\pi| \right)^{-1}$$

Максимум в (1.8) берется по всем угловым точкам, а  $\omega_j$  — величина внутреннего угла в этих точках. Из (1.8) видно, что  $p_0 > 2$  в рассматриваемых случаях  $\omega_j \neq 0$  и  $\omega_j \neq 2\pi$ .

Можно доказать, что если контур  $\Gamma_0$  имеется, т. е. область не включает бесконечность, то однородное уравнение (1.7) имеет единственное нетривиальное решение, которое, тем не менее, порождает по формуле (1.6) лишь нулевую в  $D$  функцию  $\Phi(z)$ , а значит, нулевое поле напряжений в задаче 1 и поле напряжений, порожденное лишь добавком  $\Sigma(z)$  в задаче 2. Для разрешимости неоднородного уравнения (1.7) в случае конечной области  $D$  необходимо чтобы

$$(1.9) \quad \int_{\Gamma} f(s) ds = 0$$

т. е. чтобы главный вектор усилий, приложенных к телу, равнялся нулю в задаче 1 или смещение  $U(s)$ , приложенное к границе тела, было непрерывным в задаче 2. Если контур  $\Gamma_0$  отсутствует, т. е. область  $D$  включает бесконечно удаленную точку, то уравнение (1.7) однозначно и безусловно разрешимо.

Для определения  $A_i$  в решении задачи 2 наложим условия  $W^{(2)}(x(\xi_i), y(\xi_i)) = U(\xi_i), (i = 0, \dots, m)$ , где  $\xi_i$  — произвольные фиксированные точки соответствующих контуров  $\Gamma_i$ , а  $W^{(2)}$  дается выражением (1.5). В случае отсутствия  $\Gamma_0$  наложим еще условие  $A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0$ , которое гарантирует ограниченность  $W$  на бесконечности. В обоих случаях для  $m + 1$  неизвестной получим  $m + 1$  линейное алгебраическое уравнение.

Действительно, пусть  $\Phi_0$  — решение (1.7) с правой частью  $dU/ds$ ,  $\Phi_i (i = 1, \dots, m)$  — решения (1.7) с правыми частями  $\operatorname{Re} [k(s)/(t(s) - a_i)]$ . Тогда решение (1.7) с заданной правой частью

$$f = \frac{dU}{ds} - \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m \frac{k(s) A_i}{t(s) - a_i}$$

равно

$$\Phi = \Phi_0 - \sum_{i=1}^m A_i \Phi_i$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m A_j \left\{ \ln \left| \frac{\xi_i - a_j}{z_0 - a_j} \right| - \operatorname{Re} \left[ \int_{z_0}^{\xi_i} \Phi_j(z) dz \right] \right\} + A_0 = \\ = U(\xi_i) - \operatorname{Re} \left[ \int_{z_0}^{\xi_i} \Phi_0(z) dz \right], \quad i = 0, \dots, m \end{aligned}$$

Если  $\Gamma_0$  отсутствует, то к этой системе добавляется уравнение  $A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0$ . Определитель системы отличен от нуля, ибо в противном случае удалось бы найти отличное от нуля решение задачи Дирихле с нулевыми граничными условиями. Данные рассуждения близки к приведенным ранее ([6], § 63). При численном решении необходимо определить  $\Phi_i (i = 0, \dots, m)$  и затем  $A_i$ .

Если область  $D$  односвязна, то нет необходимости определять  $A_i, \Phi_i$ . Когда она ограничена, то единственную постоянную  $A_0$  можно взять в виде  $A_0 = U(\xi_0)$ , устремив одновременно точку  $z_0$  к  $\xi_0$ . Когда область  $D$  не ограничена, то для ограниченности решения на бесконечности положим  $A_1 = 0$ , а с оставшейся постоянной  $A_0$  можно поступить, как и в случае ограниченной области. В обоих случаях  $\Phi = \Phi_0$ .

Тот факт, что для конечной области  $D$  уравнение (1.7) лежит на спектре, может осложнить его численное решение. Перейдем в этом случае от (1.7) к уравнению

$$(1.10) \quad (I - K - K_1)\mu = f_1, \quad (K_1\mu)(s_0) = \varepsilon \int_{\Gamma} \mu(s) ds$$

где  $\varepsilon$  — произвольная отличная от нуля постоянная. Используя обобщенную лемму Шмидта [7] (см. также [8]), можно показать, что уравнение (1.10) будет безусловно и однозначно разрешимо в  $L_p$ ,  $1 < p < p_0$ , а если выполнено условие (1.9) разрешимости уравнения (1.7), то решение уравнения (1.10) совпадает с одним из решений (1.7), таким, что

$$\int_{\Gamma} \mu(s) ds = 0$$

Поскольку, как было указано выше, решение однородного уравнения (1.7) не порождает отличной от нуля функции  $\Phi(z)$  в (1.6), то безразлично, какое из решений (1.7) будет решением уравнения (1.10).

Методами, близкими к описанным ранее [9], удастся исследовать гладкость решения уравнения (1.7) в зависимости от гладкости границы и граничных условий. В частности, если  $s^*$  — точка гладкости кривой  $\Gamma$ , в окрестности этой точки угол  $\varphi$  между касательной к кривой  $\Gamma$  и осью  $x$  непрерывно дифференцируем по  $s$ , а функция  $f(s)$  непрерывна (т. е. непрерывно заданное усилие или производная от заданного смещения), то в этой окрестности непрерывным будет и решение  $\mu$ . Если в точке, где кривая  $\Gamma$  достаточно гладкая, функция  $f(s)$  имеет разрыв первого рода величиной  $\Delta f$ , то решение интегрального уравнения также имеет в этой точке разрыв первого рода, и его величина  $\Delta\mu = \Delta f$ . Если  $s^*$  — угловая точка кривой  $\Gamma$ , угол  $\varphi$  в левой и правой окрестности этой точки — непрерывно дифференцируемая функция  $s$ , а функция  $f(s)$  — достаточно гладкая, например принадлежит пространству  $W_2^1(\Gamma)$  в левой и правой окрестностях  $s^*$ , то в этих окрестностях  $\mu$  имеет вид

$$(1.11) \quad \mu^+(s) = \mu_0^+ + A |s - s^*|^{-\delta}, \quad \mu^-(s) = \mu_0^- + A |s - s^*|^{-\delta} \text{sign}(\pi - \omega), \quad \delta = 1 - (1 + |\omega - \pi|/\pi)^{-1}$$

Здесь  $\mu^+$  и  $\mu^-$  — значения  $\mu$ , соответственно, в левой и правой окрестностях точки  $s^*$ ,  $\mu_0^{\pm}$  — достаточно гладкие, например, гельдеровы функции в левой и правой окрестностях  $s^*$ , равные нулю в точке  $s^*$ ,  $\omega$  — внутренний угол в точке  $s^*$ ,  $A$  — некоторая неизвестная постоянная.

Как видно из (1.11), плотность  $\mu$  в окрестности угловых точек имеет степенные особенности, причем она сингулярна и в тех точках, в которых внутренний угол  $\omega$  меньше  $\pi$  и напряжения особенностей не имеют. Используя (1.6) и результаты [6] о поведении интеграла типа Коши в окрестности угловой точки, из (1.11) получаем, что в окрестности угловой точки  $s^*$ , если прилегающие к  $s^*$  части  $\Gamma$  — достаточно гладкие, напряжения в местной полярной системе координат  $r, \theta$  с началом в точке  $s^*$  при  $\omega > \pi$  имеют вид

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \tau_r^{(1)} &= (K^\circ/\sqrt{2\pi}) r^{-\delta} \sin[\theta(1-\delta)] + \tau_{r0} + \tau_{r1} \\ \tau_\theta^{(1)} &= (K^\circ/\sqrt{2\pi}) r^{-\delta} \cos[\theta(1-\delta)] + \tau_{\theta0} + \tau_{\theta1} \\ K^\circ &= -2AG \text{ctg}(\delta\pi) \sqrt{2\pi} \\ \tau_{r0} &= [f^- \cos(\theta + \omega/2) + f^+ \cos(\theta - \omega/2)]/\sin \omega \\ \tau_{\theta0} &= -G [f^- \sin(\theta + \omega/2) + f^+ \sin(\theta - \omega/2)]/\sin \omega \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_{r1}, \tau_{\theta 1}$  — непрерывные функции, стремящиеся к нулю при  $z \rightarrow t^*$ ,  $f^-$  и  $f^+$  — левое и правое предельное значение  $f(t)$  при  $t \rightarrow t^*$ ,  $\theta$  — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от внутренней биссектрисы в угловой точке  $t^*$ . При стремлении  $\omega$  к  $2\pi$ , т. е. при  $\delta \rightarrow 1/2$ , формула (1.12) переходит в обычную формулу для трещины продольного сдвига. При  $\omega < \pi$  в (1.12) следует положить  $K^\circ = 0$ .

Из представления (1.12) видно, что второй ограниченный член асимптотики напряжений в окрестности угловой точки явно выражается через граничные значения около угловой точки, и его можно найти не решая исходную краевую задачу. В частности, можно показать, что в задаче о чистом кручении стержней, в которой касательные усилия на боковых поверхностях равны нулю, ограниченные члены  $\tau_{r0}$  и  $\tau_{\theta 0}$  исчезают. Если  $\omega > \pi$ , то напряжения представляются в виде суммы сингулярного члена и члена, равного нулю в угловой точке, а если  $\omega < \pi$ , то напряжения стремятся к нулю при подходе к угловой точке.

Пусть  $s^*$  — точка гладкости  $\Gamma$ , в которой имеет разрыв первого рода функция  $f$  (т. е. заданные [усилия  $T(s)$  или производная от смещений  $dU(s)/ds$ ], равный  $\Delta f$ . Тогда из [6] следует, что напряжения имеют вид

$$(1.13) \quad \tau_r^{(1)} = -G \frac{\Delta f}{\pi} \sin(\theta) \ln r + \tau_{r3}, \quad \tau_\theta^{(1)} = -G \frac{\Delta f}{\pi} \cos(\theta) \ln r + \tau_{\theta 3}$$

где  $\tau_{r3}, \tau_{\theta 3}$  — ограниченные функции.

Для задачи  $2\tau_r^{(2)} = \tau_\theta^{(1)}, \tau_\theta^{(2)} = -\tau_r^{(1)}$ , где в качестве  $\tau_r^{(1)}, \tau_\theta^{(1)}$  необходимо взять представленные выше выражения (1.12), (1.13).

2. Рассмотрим вопрос о численном решении уравнений (1.7), (1.10). Поведение решений этих уравнений в окрестности особых точек, к которым будем относить угловые точки  $\Gamma$  и точки разрыва  $f$  в гладких частях  $\Gamma$ , известно. Поэтому искомую функцию  $\mu$  можно представить в виде  $\mu(s) = w(s)\mu_1(s)$ , где  $\mu_1(s)$  — неизвестная ограниченная функция, а  $w(s)$  — известная сингулярная весовая функция, на каждом криволинейном отрезке между двумя особыми точками  $s_1^*$  и  $s_2^*$  равная  $w(s) = (s - s_1^*)^{-\delta_1} (s_2^* - s)^{-\delta_2}$ , где  $\delta_1, \delta_2$  — степени сингулярности  $\mu$  соответственно в начале  $s_1^*$  и конце  $s_2^*$  отрезка. Если один из этих концов — точка гладкости  $\Gamma$ , то в нем  $\delta = 0$ , в остальных точках  $\delta$  определяется выражением (1.11).

Перейдем от уравнения (1.7) к уравнению

$$(2.1) \quad \mu_1(s_0) + \frac{1}{\pi w(s_0)} \int_{\Gamma} \mu_1(s) w(s) \operatorname{Im} \left[ \frac{k(s_0)}{t - t_0} \right] ds = \frac{f(s_0)}{w(s_0)}$$

Методом коллокаций сведем это уравнение к системе линейных алгебраических уравнений, для чего оценим интеграл в (2.1) приближенно с помощью квадратурной формулы метода трапеций, учитывающей наличие сингулярного веса и воспользуемся уравнением (2.1) в узловых точках квадратурной формулы. Полученную систему решим методом исключения Гаусса. После нахождения значений  $\mu_1(s)$  в узлах ее значения в угловых точках получим экстраполяцией по нескольким ближайшим точкам с помощью полинома Лагранжа.

В качестве узловых точек выбиралось распределение точек по отрезку

$$s_j = s_1^* + (s_2^* - s_1^*) j / (N + 1)$$

распределение

$$s_j = s_1^* + (s_2^* - s_1^*) (2j - 1) / (2N)$$

или нули полиномов Чебышева

$$s_j = s_2^* - (s_2^* - s_1^*) \cos^2 [(2j - 1) \pi / (4N)], \quad j = 1, \dots, N$$

Наибольшая точность получена при использовании чебышевских точек, так как они значительно сгущаются при приближении к особым точкам.

3. В качестве примера рассмотрим задачу об антиплоской деформации пространства с бесконечным призматическим прямоугольным в сечении отверстием или жестким

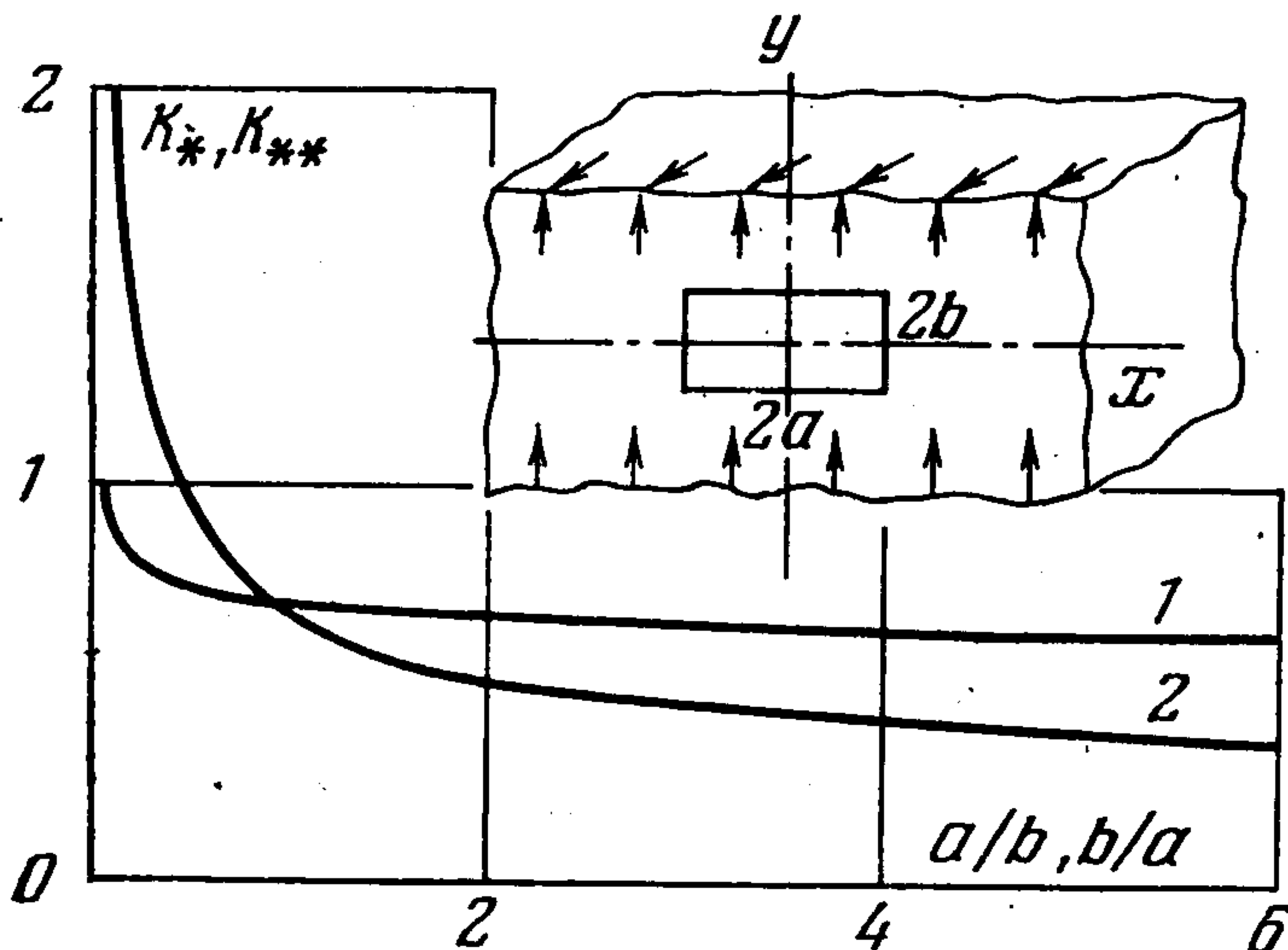
включением. На бесконечности к пространству приложено равномерное сдвиговое напряжение  $\tau$ , в плоскости сечения параллельное одной из сторон прямоугольника. Путем суперпозиции задачу сведем к задаче о пространстве с приложенными на сторонах отверстия усилиями или смещениями и нулевыми напряжениями на бесконечности. Степень сингулярности напряжений в прямых углах  $\delta = 1/3$ .

Введем два безразмерных коэффициента интенсивности

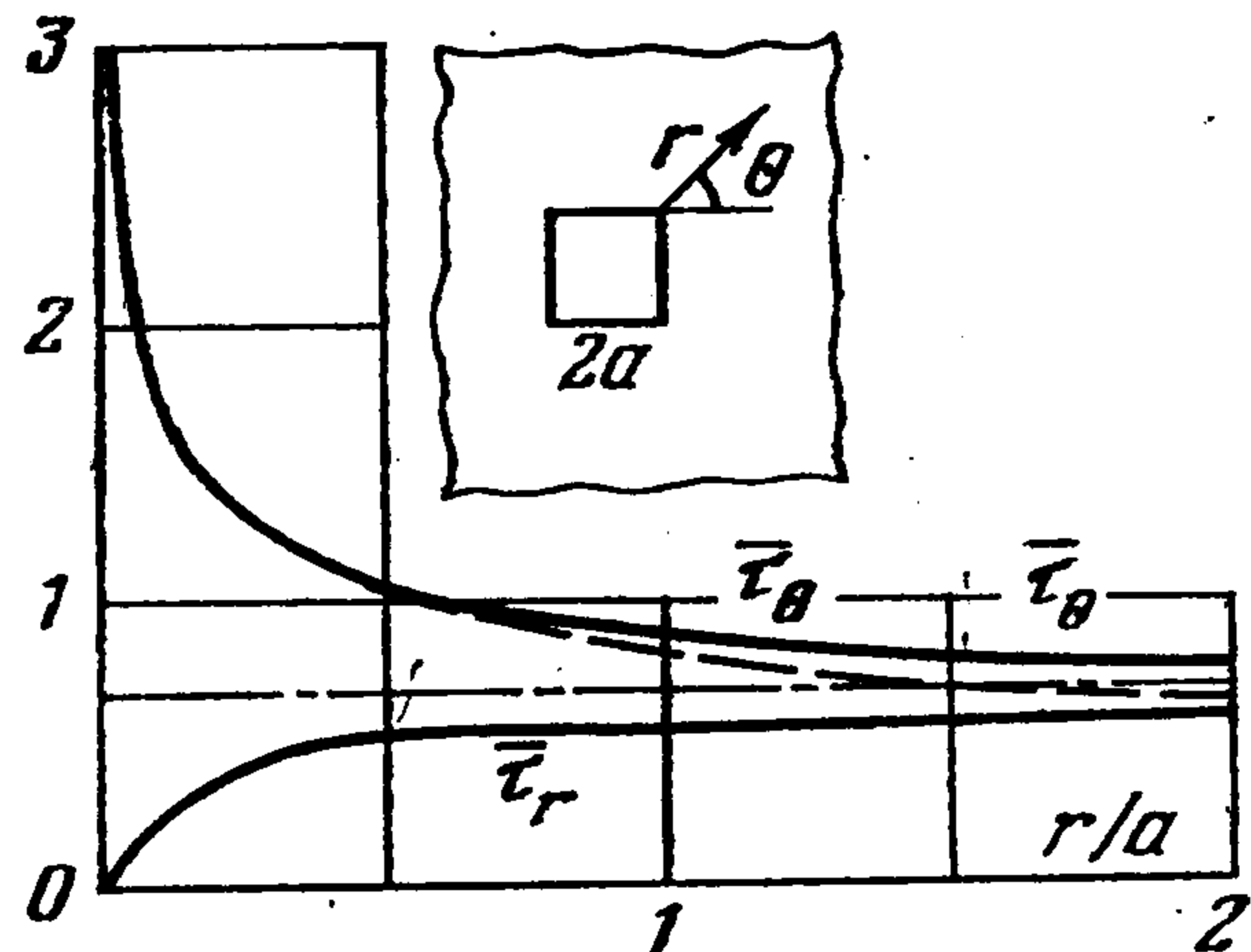
$$K_* = -K^0/[2 \operatorname{ctg}(\delta\pi) \sqrt{2\pi} \tau a^\delta] = A/(\tau a^\delta), \quad K_{**} = K_* (a/b)^\delta$$

Здесь  $a$  — полудлина стороны прямоугольника, перпендикулярной направлению действующих на бесконечности напряжений в плоскости сечения,  $b$  — полудлина другой стороны.

На фиг. 1 представлена зависимость безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений от относительных размеров прямоугольника. Для отверстия на оси абсцисс отложено отношение  $b/a$ , для включения —  $a/b$ . Кривая 1 — зависимость  $K_*$



Фиг. 1



Фиг. 2

от отношения  $b/a$  для отверстия и зависимость  $K_{**}$  от отношения  $a/b$  для включения. Кривая 2 — зависимость  $K_{**}$  от отношения  $b/a$  для отверстия и зависимость  $K_*$  от отношения  $a/b$  для включения.

Эти графики показывают следующее. Когда рассматривается задача с отверстием, то при фиксированном размере  $a$  с увеличением  $b$  коэффициент интенсивности напряжений  $K^0$  падает и выходит на асимптоту, соответствующую коэффициенту интенсивности для выреза в виде полуполосы с осью выреза, параллельной направлению сдвиговых напряжений в плоскости сечения (ось  $y$ ), при этом  $K_* = 0,66$ . Если при фиксированном размере  $a$  размер  $b$  уменьшается, то обобщенный коэффициент интенсивности бесконечно увеличивается, так как в пределе получаем трещину вдоль оси  $x$ , степень сингулярности в которой, как известно, равна  $1/2 > \delta$  и коэффициент интенсивности при этой сингулярности отличен от нуля. Когда фиксирован размер  $b$  и растет размер  $a$ , то получаем в пределе вырез в виде полуполосы вдоль оси  $x$ , и коэффициент интенсивности, как и следовало ожидать, стремится к бесконечности. При фиксированном размере  $b$  и размере  $a$ , стремящемся к нулю, в пределе получаем нулевой коэффициент интенсивности, так как в этом случае имеем трещину, параллельную оси  $y$ , в которой коэффициент интенсивности равен нулю, поэтому коэффициент интенсивности для прямоугольного отверстия монотонно падает до нуля. Аналогичные рассуждения можно провести и для включения.

На фиг. 2 представлено распределение напряжений  $\bar{\tau}_r = \tau_r/\tau$  и  $\bar{\tau}_\theta = \tau_\theta/\tau$  в местной полярной системе координат на продолжении диагонали квадрата в задаче о пространстве с квадратным отверстием, сдвигаемом на бесконечности равномерными усилиями  $\tau$ . Расстояние отсчитывается от вершины квадрата. На фиг. 2 показано также распределение напряжений  $\bar{\tau}_\theta^* = \tau_\theta^*/\tau$ , даваемое лишь первым сингулярным членом асимптотики (1.12). В рассматриваемом случае второй, постоянный член асимптотики равен нулю и приведенный график для  $\bar{\tau}_\theta^*$  фактически представляет двучленную асимптотику напряжений  $\bar{\tau}_\theta$ . Из приведенных графиков видно, что двучленная асимптотика на достаточно малых расстояниях от вершины квадрата совпадает с истинными напряжениями  $\bar{\tau}_\theta$  и на расстояниях меньше  $a$  приближает  $\bar{\tau}_\theta$  с точностью 10%. При приближении к вершине квадрата, как и должно быть вследствие (1.12),  $\bar{\tau}_r$  стремится к нулю. На достаточно больших расстояниях  $\tau_\theta = \tau_r = \tau/\sqrt{2}$ , что соответствует

сдвигу пространства без отверстия, и штрихпунктирная прямая на фиг. 2 представляет эту асимптоту. На расстояниях больше  $2a$ , как видно из графиков,  $\tau_r$ ,  $\tau_\theta$  отличаются от предельного значения не более чем на 10%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
2. Габов С. А. Угловой потенциал и задача с косой производной для гармонических функций. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 3, с. 706—717.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. Лопатинський Я. Б. При один тип сингулярних інтегральних рівнянь. — В кн.: Теор. і прикл. матем. Вып. 2. Львів; Львівськ. ун-т, 1963, с. 53—57.
5. Шелепов В. Ю. Об индексе интегрального оператора типа потенциала в пространстве.  $L_p$ . — Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 6, с. 1266—1268.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1880. 495 с.
9. Эскин Г. И. Задача сопряжения для уравнения главного типа с двумя независимыми переменными. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1970, т. 21, с. 245—292.

Москва

Поступила в редакцию  
1.VII.1982