Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Маковенко С. Я.

Излагаются новые варианты постановки статических задач нелинейной теории упругости в напряжениях для материалов с локально обратимыми законами состояния (например, для полулинейного материала Джона [1]), сводящиеся к решению девяти уравнений относительно компонент тензора напряжений Пиола при шести или трех граничных и трех интегральных условиях. Работа примыкает к исследованиям [2—7], посвященным аналогичным проблемам механики твердого линейно-деформируемого тела. Приводятся примеры реализации одного из вариантов.

1. Традиционная постановка задачи в напряжениях (задача А). Пусть в некоторой лагранжевой системе координат определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений Пиола $\mathbf{P}$ и градиент вектора места $\nabla\mathbf{R}$, задаются в виде

$$P^{ij} = P^{ij}(\nabla\mathbf{R}) \quad (\mathbf{P} = \mathbf{P}(\nabla\boldsymbol{R}))$$

а также имеют место обратные соотношения

$$(\nabla\mathbf{R})_{ij} = C_{ij}(\mathbf{P}) \quad (\nabla\mathbf{R} = \mathbf{C}(\mathbf{P})) \tag{1.1}$$

Для полулинейного материала Джона [1]

$$C_{ij}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2\mu}\left[P^{st}g_{si}g_{tj} + \left(2\mu - \frac{\nu}{1+\nu}f_1\right)b_{ij}\right] \tag{1.2}$$

где g_{si} — компоненты метрического тензора недеформированной среды, b_{ij} — компоненты тензора $(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^T)^{-1/2}\cdot\mathbf{P}$, f_1 — первый инвариант тензора $(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^T)^{1/2}$, μ, ν — постоянные упругости.

Пусть заданы уравнения статики

$$\nabla_i P^{ij} + K^j = 0 \quad (\nabla\cdot\mathbf{P} + \mathbf{K} = 0) \tag{1.3}$$

где $\mathbf{K}$ — заданные объемные силы и граничные условия смешанного типа: на части границы тела o_1 заданы силы $f\,dO/do$ или $\mathbf{f}_0$ («мертвые» нагрузки), а на другой части o_2 — вектор места $\mathbf{R}_0$

$$n_i P^{ij}|_{o_1} = f^j\frac{dO}{do} = f_0{}^j, \quad \chi_i|_{o_2} = \chi_i^\circ \tag{1.4}$$

Помимо этого в случае действия мертвой нагрузки нужно удовлетворить интегральному условию совместности Синьорини [1]

$$\int_v \mathbf{R}\times\mathbf{K}\,dv + \int_o \mathbf{R}\times\mathbf{f}_0\,do = 0 \tag{1.5}$$

выражающему равенство нулю главного момента внешних сил в продеформированном состоянии тела. Будем считать, что все рассматриваемые функции обладают гладкостью, необходимой для проведения используемых преобразований. Будем предполагать также наличие «натурального», т. е. ненапряженного, состояния начальной неискаженной конфигурации тела. Кроме того, если не оговорено противоположное, ограничимся в последующем мертвым нагружением

$$\mathbf{K}\,dV = \mathbf{K}_0\,dv, \quad \mathbf{f}\,dO = \mathbf{f}_0\,do \tag{1.6}$$

и конечностью размеров упругого тела.

Если объем v, занимаемый телом до деформации, представляет собой односвязную область, то необходимыми и достаточными условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1.1) относительно компонент χ_i вектора места $\mathbf{R}$ являются условия обращения в нуль несимметричного тензора

$$(1.7)\qquad M^{ij} = \varepsilon^{lsi} g^{tj} \nabla_l C_{st}(\mathbf{P}) = 0 \quad (\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{P}) = 0)$$

В этом случае можно выразить вектор места $\mathbf{R}$ через тензор напряжений Пиола

$$(1.8)\qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}(q_0) + \int_{q_0}^{q} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{P})$$

где $q\,q_0$ — дуга интегрирования с началом в произвольно фиксированной точке q_0, и граничные условия (1.4) записать в виде

$$(1.9)\qquad n_i P^{ij}|_{o_1} = f_0{}^j \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}|_{o_1} = \mathbf{f}_0)$$
$$\chi_i(\mathbf{P})|_{o_2} = \chi_i^0 \quad (\mathbf{R}(\mathbf{P})|_{o_2} = \mathbf{R}_0)$$

Соотношениями (1.3), (1.7), (1.9), (1.5) дается традиционная постановка статической задачи нелинейной теории упругости в напряжениях (задача А). Как и в линейной постановке, сформулированная задача в напряжениях оказалась переопределенной: девять компонент несимметричного тензора напряжений Пиола должны удовлетворять в общей сложности 12 уравнениям, входящим в (1.3) и (1.7).

Ниже излагаются новые варианты постановки задачи в напряжениях нелинейной теории упругости, вполне эквивалентные традиционной постановке (задаче А), однако лишенные свойства переопределенности системы разрешающих уравнений.

2. Метод комбинированных уравнений (задача Б). Следуя работам [2—4], положим

$$(2.1)\qquad a^j = \nabla_i P^{ij} + K^j \quad (\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{K})$$
$$b_j = t_{ji} a^i \quad (\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a})$$

где $\mathbf{T}$ — произвольный невырожденный тензор.

Очевидно, при $\mathbf{a} \to 0$ имеем $\mathbf{b} \to 0$ и наоборот.

Составим комбинированные уравнения

$$(2.2)\qquad g^{nj}(g^{im} \nabla_i b_j + \varepsilon^{lsm} \nabla_l C_{sj}) = 0 \quad (\nabla \mathbf{b} + \nabla \times \mathbf{C} = 0)$$

Пусть также для точек, лежащих на поверхности недеформированного тела

$$(2.3)\qquad a^j|_o = 0 \quad (\mathbf{a}|_o = 0)$$

Соотношениями (2.2), (1.9), (1.5), (2.3) дается новая постановка задачи в напряжениях (задача Б): девять компонент тензора напряжений Пиола должны удовлетворять девяти уравнениям (2.2), шести граничным условиям (1.9) и (2.3) и условию (1.5).

Теорема 1. Задача Б эквивалентна задаче А.

Действительно, применим к уравнению (2.2) операцию div. Учитывая, что $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{C} \equiv 0$, и принимая во внимание (2.3), получаем

$$(2.4)\qquad \nabla^2 \mathbf{b} \equiv 0, \quad \mathbf{b}|_o = 0$$

При выполнении условий (2.4) и всюду в области v будет $\mathbf{b} \equiv 0$. Достаточно доказать это утверждение в какой-либо частной системе координат, например в декартовой. Тогда оно будет верно и в любой другой допустимой системе координат в силу инвариантности тензорных соотношений. Но в декартовой системе координат все компоненты вектора $\mathbf{b}$ — гармонические функции, равные нулю на контуре o, и следовательно, в силу свойств гармонических функций они равны нулю всюду в v. Поэтому и $a^i \equiv 0$ всюду в v. Теперь из (2.2) следует, что $M^{ij} \equiv 0$. Итак, выполнение условий задачи Б приводит к тождественному выполнению условий задачи А.

Справедливо также и обратное утверждение. В самом деле, $\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \Rightarrow \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \nabla\mathbf{b} = 0$ и вместе с равенством (1.7) тождественно удовлетворяются равенства (2.2), (2.3) задачи Б. Теорема доказана.

3. Метод ослабленных условий совместности деформаций (задача В). Пусть здесь и в последующем область v — шестигранник, ограниченный координатными поверхностями $q^i = c^i \pm h^i$, где $q^i = c^i$ — средние поверхности области v, h^i — произвольные параметры, характеризующие размеры области v. (Произвольную односвязную область с гладкой границей всегда можно вписать в координатный шестигранник и доопределить в нем непрерывным образом заданные в v функции [8].)

Пусть всюду в области v

$$M^{12} = M^{21} = M^{23} = M^{32} = M^{13} = M^{31} = 0 \tag{3.1}$$

а остальные компоненты M^{11}, M^{22}, M^{33} обращаются в нуль лишь на отдельных фиксированных координатных поверхностях, а именно

$$M^{11} = 0 \quad \text{на} \quad q^1 = c^1 \quad (1,\, 2,\, 3) \tag{3.2}$$

Соотношениями (1.3), (3.1), (1.9), (3.2), (1.5) дается новый вариант постановки задачи в напряжениях (задача В).

Теорема 2. Задача В эквивалентна задаче А.

Достаточно, очевидно, доказать эквивалентность условий (3.1), (3.2) условиям (1.7). Действительно, компоненты M^{ij} тензора $\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{C}\,(\mathbf{P})$ лишь условно независимы, будучи связанными тремя дифференциальными уравнениями

$$\nabla_i M^{ij} \equiv 0 \quad (\nabla\cdot\mathbf{M} = \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{C}\,(\mathbf{P}) \equiv 0) \tag{3.3}$$

С учетом равенств (3.1) тождества (3.3) преобразуем к виду

$$\partial_1 m^{11} + \Gamma_{11}{}^1 m^{11} + \Gamma_{22}{}^1 m^{22} + \Gamma_{33}{}^1 m^{33} \equiv 0 \quad (1,\, 2,\, 3) \tag{3.4}$$

$$\left(\partial_i \ldots \equiv \frac{\partial \ldots}{\partial q^i}, \quad m^{ii} = \sqrt{g}\, M^{ii}, \quad g = \det[g_{ij}] > 0\right)$$

где $\Gamma_{kl}{}^i$ — символы Кристоффеля второго рода.

Согласно условиям (3.2)

$$m^{11} = 0, \quad q^1 = c^1 \quad (1,\, 2,\, 3) \tag{3.5}$$

Пришли к однородной задаче Коши (3.4), (3.5), имеющей очевидное тривиальное решение

$$m^{11} \equiv m^{22} \equiv m^{33} \equiv 0 \tag{3.6}$$

всюду в v.

Если наделить коэффициенты $\Gamma_{jj}{}^i$ свойством непрерывности в области v, то тривиальное решение (3.6) будет единственным в v.

Докажем это. С этой целью систему (3.4), (3.5) заменим эквивалентной системой однородных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$m^{ii} + \int\limits_{c^i}^{q^i} \sum_{j=1}^{3} \Gamma_{jj}{}^i m^{jj}\, d\xi^i \equiv 0 \tag{3.7}$$

Рассмотрим первый квадрант v_1 области v:

$$v_1 = \{q^i : c^i \leqslant q^i \leqslant c^i + h^i,\ i = 1,\ 2,\ 3\}$$

Допустим, что в нем наряду с тривиальным решением (3.6) существует и нетривиальное достаточно гладкое решение m^{ii}, также удовлетворяющее системе (3.7). В таком случае в некоторой точке $q_0{}^i \in v_1$ величина

$$m = \alpha_1 | m^{11} | + \alpha_2 | m^{22} | + \alpha_3 | m^{33} |$$

($\alpha_i > 0$ — размерные коэффициенты) принимает максимальное значение $m_0 > 0$.

Рассмотрим

$$m_0 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left| \int_{c^i}^{q_0^i} \sum_{j=1}^{3} \Gamma_{jj}{}^i m^{jj} d\xi^i \right| \leqslant m_0 h$$

$$\left(h = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\alpha_i h^j}{\alpha_j} \max_{v_1} | \Gamma_{jj}{}^i | \right).$$

Следовательно, должно быть $1 \leqslant h$, что невозможно ввиду произвольности h.

Полученное противоречие доказывает единственность тривиального решения (3.6) в первом квадранте v_1.

Аналогично доказывается единственность решения (3.6) в остальных квадрантах области v.

В декартовой системе координат $\Gamma_{jj}{}^i \equiv 0 \Rightarrow m^{ii} \equiv 0$ всюду в v согласно (3.7), при этом область v может быть и неограниченной.

Итак, условия (3.1), (3.2) эквивалентны условиям (1.7). Теорема доказана.

Условия (3.1) (основные) и (3.2) (дополнительные) представляют собой один из вариантов ослабленных условий совместности деформаций. Всего имеем 27 таких равноценных один другому вариантов. В таблице приведены сочетания компонент M^{ij}, соответствующие дополнительной группе условий некоторых вариантов. Недостающие сочетания получаются из табличных путем круговой перестановки индексов. В основную группу условий тех же вариантов входят шесть из девяти компонент M^{ij}, не вошедших в дополнительную группу.

№ пп.	$q^1 = c^1$	$q^2 = c^2$	$q^3 = c^3$
1	M^{21}	M^{32}	M^{13}
2	M^{31}	M^{12}	M^{23}
3	M^{11}	M^{22}	M^{33}
4	M^{21}, M^{31}	—	M^{13}
5	M^{21}	—	M^{13}, M^{33}
6	M^{31}	—	M^{13}, M^{23}
7	—	—	M^{13}, M^{23}, M^{33}
8	M^{31}	M^{22}	M^{13}
9	—	M^{22}	M^{13}, M^{33}
10	—	M^{12}	M^{23}, M^{33}
11	—	M^{12}, M^{22}	M^{33}

Эквивалентность всех полученных таким образом ослабленных условий совместности деформаций условиям (1.7) доказывается совершенно аналогично уже рассмотренному случаю.

4. Метод интегродифференциальных условий совместности деформаций (задача Г). Рассмотрим соотношения

$$(4.1) \qquad \partial_i \chi_j - \Gamma_{ij}{}^k \chi_k = C_{ij}(\mathrm{P}) \quad (\nabla \mathrm{R} = \mathrm{C}(\mathrm{P}))$$

Из девяти записанных уравнений выделим какие-либо три, представляющие собой интегрируемую относительно χ_i систему

(4.2) $$\partial_{s_m}\chi_m - \Gamma^k_{s_m m}\chi_k = C_{s_m m}(\mathrm{P}) \quad (m = 1, 2, 3; \ \forall s_m \in \{1, 2, 3\})$$

Запись (4.2) содержит 27 различных вариантов в зависимости от сочетаний значений индексов s_m.

Проинтегрируем систему (4.2) относительно χ_m, или, что равносильно, найдем решение системы интегральных уравнений вида

(4.3) $$\chi_m - l_m{}^n\chi_n = \psi_m + \zeta_m$$

$$\left(l_m{}^n \ldots = \int\limits_{c^{s_m}}^{q^{s_m}} \Gamma^n_{s_m m}\ldots d\xi^{s_m}, \quad \psi_m = \int\limits_{c^{s_m}}^{q^{s_m}} C_{s_m m}(\mathrm{P})\, d\xi^{s_m}\right)$$

где $\zeta_m = \chi_m\big|_{q^{s_m}=c^{s_m}}$ — произвольные двумерные функции, определенные на фиксированной поверхности $q^{s_m} = c^{s_m}$.

Систему уравнений (4.3) представим в виде операторного уравнения

(4.4) $$(\mathbf{I} - \mathbf{L})\cdot\mathbf{R} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\zeta}$$

$$\mathbf{R} = \mathrm{col}\,(\chi_1, \ \chi_2, \ \chi_3), \quad \boldsymbol{\psi} = \mathrm{col}\,(\psi_1, \ \psi_2, \ \psi_3)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{col}\,(\zeta_1, \ \zeta_2, \ \zeta_3), \quad \mathbf{L}\ldots = \| \, l_m{}^n \ldots \|_{n, m=1, 2, 3}$$

Пространство функций, непрерывных в области v, обозначим C_v, введя в этом множестве норму

$$\| u \|_v = \max_v \ | u |$$

Соответствующим образом определим и векторное функциональное пространство $\mathbf{C}_v$ с нормой

$$\| \mathbf{u} \|_v = \sum_{t=1}^{3} \| u_t \|_v$$

В рассматриваемой задаче полагаем

$$\Gamma_{mn}{}^i \in C_v, \quad \mathbf{R}, \ \boldsymbol{\psi}, \ v \in \mathbf{C}\zeta$$

Если область определения оператора $\mathbf{L}$ — множество $\mathbf{C}_v$, то область значений будет, очевидно, множество элементов $\alpha = \mathbf{L}\cdot\mathbf{R} \in \mathbf{C}_v$, т. е. оператор $\mathbf{L}$ отображает $\mathbf{C}_v$ в себя.

Можно проверить, что оператор $\mathbf{L}$ линеен и непрерывен в $\mathbf{C}_v$, а его норма допускает очевидную оценку

$$\| \mathbf{L} \|_v \leqslant q = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \| \Gamma^m_{s_n n} \|_v \, h^m$$

откуда видно, что норма зависит от размеров области v. Ограничим эти размеры таким образом, чтобы выполнялось условие

(4.5) $$q < 1$$

Условие (4.5) гарантирует существование оператора $(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} = \mathbf{B}$, обратного оператору $\mathbf{I} - \mathbf{L}$ и представимого в виде [9]

(4.6) $$\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}^k$$

причем оператор $\mathbf{B}$, как и $\mathbf{L}$, линеен и непрерывен в $\mathbf{C}_v$.

Существование обратного оператора $\mathbf{B}$ обеспечивает единственность решения операторного уравнения (4.4), его непрерывную зависимость от заданной векторной функции $\boldsymbol{\psi}$ и произвольной функции $\boldsymbol{\zeta}$ и его представимость в соответствии с (4.6) в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{L}^k\cdot(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\zeta})$$

или в покомпонентной записи

$$\chi_m = L_m{}^n(\psi_n + \zeta_n) \tag{4.7}$$
$$(L_m{}^n\ldots = \delta_m{}^n\ldots + l_m{}^n\ldots + l_m{}^i l_i{}^n\ldots + l_m{}^i l_i{}^j l^n{}_j\ldots + \ldots)$$

Подставляя найденное решение (4.7) в соотношение (4.1), получаем условия неразрывности деформаций в напряжениях интегродифференциального вида

$$(\partial_i L_j{}^n\ldots - \Gamma_{ij}{}^k L_k{}^n\ldots)(\psi_n + \zeta_n) = C_{ij}(\mathbf{P}) \tag{4.8}$$
$$((i,\ j) \neq (s_m,\ m))$$

Условия (4.8) можно интерпретировать, очевидно, как условия разрешимости соотношений (4.1) в форме (4.7).

Соотношениями (1.3), (4.8), (1.9), (1.5) дается новый вариант задачи нелинейной теории упругости в напряжениях (задача Г).

Теорема 3. Задача Г эквивалентна задаче А.

Следует доказать эквивалентность условий (4.8) условиям (1.7) и тождественность представлений (1.8) и (4.7) вектора места $\mathbf{R}$ ($\mathbf{P}$). Обозначим временно векторы (1.8) и (4.7) соответственно через $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_\Gamma$.

Пусть заведомо выполнены условия (4.8), т. е. $\nabla\mathbf{R}_\Gamma \equiv \mathbf{C}(\mathbf{P})$. Тогда $\nabla \times \nabla\mathbf{R}_\Gamma \equiv \nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{P}) \equiv 0$. Полагая $q_0 = (c^1,\ c^2,\ c^3)$, имеем

$$\mathbf{R}_A \equiv \mathbf{R}(q_0) + \int_{q_0}^{q} d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{R}_\Gamma \equiv \mathbf{R}_\Gamma$$

что и требовалось.

Теорема 4. Интегродифференциальные условия совместности деформаций вида (4.8) — следствие вариационного принципа стационарности дополнительной работы.

Согласно принципу стационарности дополнительной работы [10], величина, называемая дополнительной работой, имеет стационарное значение в фактически реализуемом равновесном состоянии, что записывается в виде

$$\int_v \delta\mathbf{P}\cdot\cdot\mathbf{C}^T(\mathbf{P})\,dv - \int_{o_1} \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}_0\,do = 0 \tag{4.9}$$

Сравнению подвергаются статически возможные напряженные состояния, поэтому

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{P} = \begin{cases} 0 & \text{на } o_2 \\ \delta\mathbf{f}_0 & \text{на } o_1 \end{cases} \tag{4.10}$$

Опираясь на условия (4.10) и на известную формулу преобразования объемного интеграла в поверхностный, можно проверить справедливость соотношения

$$-\int_v (\delta\mathbf{P}_1\cdot\cdot(\mathbf{C}^T(\mathbf{P}) - \nabla\mathbf{R}_\Gamma^T) + \delta\mathbf{P}\cdot\cdot\nabla\mathbf{R}_\Gamma^T)\,dv + \int_{o_1} \delta\mathbf{f}_0\cdot\mathbf{R}_\Gamma\,do \equiv 0 \tag{4.11}$$
$$\left(\delta\mathbf{P}_1 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_{s_i}\mathbf{r}_i\delta P^{s_i i}\right)$$

где $\mathbf{r}_i$ — векторный базис v-конфигурации.

Складывая равенства (4.9) и (4.11) и приравнивая нулю множители в подынтегральных выражениях при произвольных и независимых вариациях $\delta\mathbf{P} - \delta\mathbf{P}_1$ и $\delta\mathbf{f}_0$, придем к условию неразрывности деформаций $\mathbf{C}(\mathbf{P}) - \nabla\mathbf{R}_\Gamma = 0$ и к кинематическому граничному условию $(\mathbf{R}_\Gamma - \mathbf{R}_0)|_{O_1} = 0$. Теорема доказана.

5. Примеры представлений задачи Г. *Осесимметричная деформация тела вращения.* В качестве материальных координат выбираем цилиндрические координаты

$$c^1(q^3) \leqslant q^1 \leqslant d^1(q^3), \quad 0 \leqslant q^2 \leqslant 2\pi, \quad c^3 \leqslant q^3 \leqslant d^3$$

совместив ось q^3 с осью тела вращения.

В рассматриваемом случае

$$P^{ij} = P^{ij}(q^1, q^3), \quad P^{12} = P^{21} = P^{23} = P^{32} = 0 \tag{5.1}$$

В соответствии с (1.2) получаем

$$\begin{gathered}
C_{11} = \frac{P^{11}}{2\mu} + \delta\cos\alpha, \quad C_{22} = \left(g_{22}\frac{P^{22}}{2\mu} + \delta\right)g_{22} \\
C_{33} = \frac{P^{33}}{2\mu} + \delta\cos\alpha, \quad C_{13} = \frac{P^{13}}{2\mu} + \delta\sin\alpha \\
C_{31} = \frac{P^{31}}{2\mu} - \delta\sin\alpha, \quad C_{12} = C_{21} = C_{32} = C_{23} = 0 \\
\delta = 1 - \frac{\nu}{2\mu(1+\nu)}(q + P^{22}g_{22}) \\
q = [(P^{11} + P^{33})^2 + (P^{13} - P^{31})^2]^{1/2} \\
g_{22} = q^{1^2}, \quad \cos\alpha = \frac{P^{11} + P^{33}}{q}, \quad \sin\alpha = \frac{P^{13} - P^{31}}{q}
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Уравнения равновесия (1.3) и неразрывности деформаций (4.8) при $s_1 = s_2 = s_3 = 3$ преобразуются к виду

$$\begin{gathered}
l_1P^{11} + \partial_3P^{31} - q^1P^{22} + K^1 = 0 \\
\partial_3P^{33} + l_1P^{13} + K^3 = 0 \quad \left(l_1\ldots \equiv \partial_1\ldots + \frac{1\ldots}{q^1}\right)
\end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\partial_1\chi_1 = C_{11}, \ \partial_1\chi_3 = C_{13}, \ q^1\chi = C_{22} \tag{5.4}$$

где

$$\chi_1 = \zeta_1 + \int\limits_{c^3}^{q^3} C_{31}\,d\xi^3, \quad \chi_2 = 0, \quad \chi_3 = \zeta_3 + \int\limits_{c^3}^{q^3} C_{33}\,d\xi^3 \tag{5.5}$$

При задании поверхностных сил $\mathbf{f}$ ($\mathbf{f}_0$) к уравнениям (5.3), (5.4) присоединяем краевые условия

$$n_iP^{ij}|_o = f^j\frac{dO}{do}\ (= f_0^{\,j}) \quad (i, j = 1,3) \tag{5.6}$$

Если напряженное состояние не сопровождается поворотами ($\alpha = 0$), а массовые силы отсутствуют ($K^1 = K^3 = 0$), решение системы уравнений (5.3), (5.4) выражается через гармоническую функцию ψ

$$\begin{gathered}
\frac{P^{11}}{2\mu} = \partial_1{}^2\psi - \frac{b}{g_{22}} - C_2, \quad \frac{P^{22}}{2\mu} = \frac{1}{g_{22}}\left(\frac{1}{q^1}\partial_1\psi + \frac{b}{g_{22}} - C_2\right) \\
\frac{P^{33}}{2\mu} = \partial_3{}^2\psi + d, \quad \frac{P^{13}}{2\mu} = \frac{P^{31}}{2\mu} = \partial_1\partial_3\psi \\
\chi_1 = \partial_1\psi + \frac{b}{q^1}, \quad \chi_3 = \partial_3\psi + C_1(q^3 - c^3) + a \\
\left(C_1 = \frac{1 + \nu + (1-2\nu)d}{1-\nu}, \quad C_2 = \frac{1 + \nu - \nu d}{1-\nu}, \right. \\
\left. a, b, d = \text{const}\right)
\end{gathered}$$

В частности, полагая $\psi = t(q^3 - c^3) - aq^3 - tg_{22}/2$ ($t = \text{const}$), приходим к известному решению, полученному для полого цилиндра методом перемещений [1].

Плоская деформация призматического тела. В качестве материальных координат выбираем декартовы координаты q^1, q^2, q^3 отсчетной конфигурации ($c^i \leqslant q^i \leqslant d^i$).

Придерживаясь той же схемы представления задачи Г, что и в предыдущем примере, приходим к соотношениям, вполне аналогичным(5.1)—(5.6) с той лишь разницей, что теперь всюду следует считать $g_{22} = 1$, $l_1 \ldots \equiv \partial_1 \ldots$, в первом уравнении равновесия отбросить член $q^1 P^{22}$, третье равенство системы (5.4) заменить на $C_{22} = c = \text{const}$, в (5.5) положить $\chi_2 = cq^2$.

Решение систем уравнений (5.3), (5.4) в рассматриваемом случае в отсутствие массовых сил представляется в виде

$$\frac{P^{11}}{2\mu} = \partial_3 \Phi, \quad \frac{P^{33}}{2\mu} = -\partial_1 f, \quad \frac{P^{13}}{2\mu} = \partial^3 f, \quad \frac{P}{2\mu} = -\partial_1 \Phi$$

$$\frac{P^{22}}{2\mu} = \frac{c - 1 - \nu + \nu q^*}{1 - \nu}, \quad q^* = [(\partial_3{}^2 \psi)^2 + (\partial_1 \partial_3 \psi)^2]^{1/2}$$

$$\chi_1 = \partial_1 \psi + f, \quad \chi_3 = -\partial_3 \psi - \Phi$$

где ψ — гармоническая функция, а функции Φ и f должны удовлетворять уравнениям

(5.7) $$\partial_3 \Phi - \partial_1 f = q \cos \alpha / 2\mu$$

$$\partial_1 \Phi + \partial_3 f = q \sin \alpha / 2\mu$$

$$\left(\frac{q}{2\mu} = \frac{\nu c - 1 - \nu + q^*}{1 - \nu}, \quad \cos \alpha = -\frac{\partial_3{}^2 \psi}{q^*}, \quad \sin \alpha = -\frac{\partial_1 \partial_3 \psi}{q^*} \right)$$

Полученная система уравнений (5.7) идентична соответствующему комплексному уравнению метода перемещений [1].

Трехмерная деформация толстых плит. Среду, занимаемую плитой, отнесем к декартовой системе координат ($q^i \equiv x_i$). Уравнения равновесия (1.3), неразрывности деформаций (4.8) при $s_m = 3$, $\overset{s}{c}{}^{m} = 0$, формулы перемещений (4.7), уравнения состояния для полулинейного материала образуют исходную систему уравнений

(5.8) $$\partial_i P^{ij} + K_j = 0, \quad C_{mj} = \partial_m \chi_j$$

$$\chi_j = \zeta_j + \int_0^{x_3} C_{3j} \, d\xi_3 \quad (m = 1, 2; \; j = 1, 2, 3)$$

$$P^{ij} = \frac{2\mu}{1 - 2\nu} [(1 - 2\nu) C_{ij} + (\nu C - 1 - \nu) \delta_{ij} + F_{ij}]$$

$$F_{ij} = (1 + \nu)(\delta_{ij} - a_{ij}) + \nu (J_1 a_{ij} - C \delta_{ij})$$

$$C = C_{11} + C_{22} + C_{33}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, J_1 — первый инвариант тензора $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}$, a_{ij} — компоненты тензора поворота $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{-1/2} \cdot \mathbf{C}$, $\zeta_j = \zeta_j(x_1, x_2)$ — произвольные двумерные функции.

В случае сохранения главных направлений тензора меры деформаций Коши $a_{ij} \equiv \equiv \delta_{ij}$, $C \equiv J_1$, $F_{ij} \equiv 0$. Поэтому функции F_{ij} — компоненты корректирующего тензора.

Будем определять F_{ij} методом последовательных приближений, тем самым линеаризуя задачу.

В свою очередь линейную задачу будем решать методом «начальных функций», сводя трехмерную задачу к двумерной.

В соответствии с символическим методом А. И. Лурье [11] вводим обозначения для операторов $\partial_1 \ldots \equiv \alpha$, $\partial_2 \ldots \equiv \beta$, $\partial_1{}^2 \ldots + \partial_2{}^2 \ldots \equiv \gamma^2$.

Пусть $P_j = \alpha F_{1j} + \beta F_{2j} + \partial_3 F_{3j} + K_j (1 - 2\nu)/(2\mu)$ — приведенная объемная нагрузка, C_{31}, C_{32}, C_{33} — разрешающие функции. Исходные уравнения (5.8) преобразуем к системе трех разрешающих уравнений

(5.9) $$\int_0^{x_3} [(1 - \nu) \gamma^2 C_{31} + \nu \beta (\alpha C_{32} - \beta C_{31})] \, d\xi_3 + \nu \alpha (C_{33} + \beta \zeta_2) +$$

$$+ (1 - 2\nu) \partial_3 C_{31} + [(1 - \nu) \gamma^2 - \nu \beta^2] \zeta_1 + P_1 = 0 \quad (1, 2), \quad (\alpha, \beta)$$

$$(1 - 2\nu) \int_0^{x_3} \gamma^2 C_{33} \, d\xi_3 + \nu (\alpha C_{31} + \beta C_{32}) + (1 - \nu) \partial_3 C_{33} +$$

$$+ (1 - 2\nu) \gamma^2 \zeta_3 + P_3 = 0$$

Введем в рассмотрение трансцендентные операторы

$$\omega_1 = \sin \gamma x_3, \quad \omega_2 = \cos \gamma x_3$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\gamma}(\omega_1 + x_3\gamma\omega_2)$$

$$i_1(\ldots) = \int_0^{x_3} (x_3 - \xi_3) \sin \gamma (x_2 - \xi_3)(\ldots)\, d\xi_3$$

$$i_2(\ldots) = \int_0^{x_3} (x_3 - \xi_3) \cos \gamma (x_3 - \xi_3)(\ldots)\, d\xi_3$$

$$i_3(\ldots) = \int_0^{x_3} \sin \gamma (x_3 - \xi_3)(\ldots)\, d\xi_3$$

$$i_4(\ldots) = \int_0^{x_3} \cos \gamma (x_3 - \xi_3)(\ldots)\, d\xi_3$$

Частное решение однородной системы уравнений (5.9) (при $P_j = 0$) имеет вид

$$C_{31}{}^0 = \omega_2\sigma_1 - \gamma\omega_1\zeta_1 - \frac{\nu}{2(1-2\nu)}\alpha\omega_3\zeta - \frac{\nu x_3 \alpha\omega_1\sigma}{2(1-\nu)\gamma}$$

$$C_{32}{}^0 = \omega_2\sigma_2 - \gamma\omega_1\zeta_2 - \frac{\nu\beta\omega_3\zeta}{2(1-2\nu)} - \frac{\nu x_3\beta\omega_1\sigma}{2(1-\nu)\gamma}$$

$$C_{33}{}^0 = \omega_2\sigma_3 - \gamma\omega_1\zeta_3 - \frac{\nu\omega_3\sigma}{2(1-\nu)} + \frac{\nu x_3\gamma\omega_1\zeta}{2(1-2\nu)}$$

$$(\sigma = \sigma_3 + \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2, \quad \zeta = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 - \gamma^2\zeta_3)$$

где $\sigma_j \equiv C_{3j}|_{x_3=0}$ — произвольные двумерные функции.

Полагая теперь $\sigma_j = \zeta_j = 0$, приходим к частному решению неоднородной системы (5.9)

$$(1-2\nu)C_{31}{}^* = -i_4(P_1) + \frac{\nu\alpha}{2(1-\nu)\gamma}[i_1(P) + \gamma i_2(P_3) + i_3(P_3)]$$

$$(1-2\nu)C_{32}{}^* = -i_4(P_2) + \frac{\nu\beta}{2(1-\nu)\gamma}[i_1(P) + \gamma i_2(P_3) + i_3(P_3)]$$

$$(1-\nu)C_{33}{}^* = -i_4(P_3) + \frac{\nu}{2(1-2\nu)}\left[-\gamma i_1(P_3) + i_2(P) + \frac{1}{\gamma}i_3(P)\right]$$

$$(P = \alpha P_1 + \beta P_2).$$

Двумерные функции ζ_j, σ_j (начальные функции) определяются из граничных условий: $P^{3j} = f_0{}^j$ или $\chi_j = \chi_j{}^0$ на $x_3 = 0,\ h_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Победря Б. Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 531—541.
3. *Победря Б. Е.* Квазистатическая задача механики деформируемого твердого тела в напряжениях.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 205—214.
4. *Победря Б. Е.* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 295—297.
5. *Власов Б. Ф.* Об интегрировании уравнений неразрывности деформаций в форме Сен-Венана.— Прикл. механика, 1969, т. 5, № 12, с. 35—38.
6. *Маковенко С. Я.* Об интегрировании уравнений неразрывности деформаций в произвольной системе координат.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 6, с. 122—124.
7. *Власов Б. Ф.* О числе независимых уравнений неразрывности.— Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, 1968, т. 34, вып. 5, с. 171—174.
8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
10. *Зубов Л. М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, с. 241—245.
11. *Лурье А. И.* К теории толстых плит.— ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3, с. 151—158.

Москва

Поступила в редакцию
5.X.1982