

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИМ НАБОРОМ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ

Белинский Б. П.

Рассматривается дифракция плоской волны на бесконечной упругой пластине, подкрепленной двоякопериодическим набором ребер жесткости небольших волновых размеров. Задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, через решение которой выражаются амплитуды волн, расходящихся от пластины в жидкость.

К настоящему времени достаточно полно исследовано влияние периодического набора параллельных ребер, подкрепляющих упругую пластину, на ее акустические свойства. В [1] построено точное решение задачи дифракции плоской волны на такой пластине, изучены частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения плоской волны, а в предельных случаях для них найдены простые приближенные формулы.

1. Исследуется дифракция плоской волны давления

$$p_0 = \exp(ik((x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0) \sin \theta_0 - z \cos \theta_0))$$

падающей на бесконечную пластину $\{-\infty < x, y < \infty, z = 0\}$, подкрепленную двоякопериодическим набором ребер жесткости $\{-\infty < x < \infty, y = mb; -\infty < y < \infty, x = na; -\infty < n, m < \infty\}$. Давление $p(x, y, z)$ в среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца при граничном условии на пластине

$$(1.1) \quad D(\Delta_0^2 - k_0^4)\xi(x, y) + [p](z=0) = 0 \\ (x \neq na, y \neq mb) \\ k_0 = (\rho^0 \omega^2 H^0 / D)^{1/4}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластины, $\xi(x, y)$ — ее смещение, связанное с давлением условием прилипания $\xi(x, y) = p_z(x, y, 0) / (\rho_0 \omega^2)$, ρ_0 — плотность жидкости, Δ_0 — двумерный оператор Лапласа, k_0 — волновое число изгибных волн в пластине, ρ^0 — плотность пластины, H^0 — толщина. Символом $[f](z=0)$ обозначается скачок функции f при $z=0$. Гармоническая зависимость процессов от времени $\exp(-i\omega t)$ опускается.

Предположим сначала, что жидкость находится лишь по одну сторону от пластины ($z > 0$). Случай двустороннего контакта может быть рассмотрен аналогично, поэтому обратимся к нему лишь на стадии численного анализа и интерпретации результатов.

Гранично-контактные условия (ГКУ) возникают при учете изгибных и крутильных колебаний ребер и их жесткой связи с несущей пластиной [2]

$$(1.2) \quad -D[\xi_{xxx} + (2 - \sigma)\xi_{xyy}](x = na) = -i\omega Z_{11}\xi \\ D[\xi_{xx} + \sigma\xi_{yy}](x = na) = -i\omega Z_{12}\xi_x \\ (x = na, y \neq mb) \\ -D[\xi_{yyy} + (2 - \sigma)\xi_{yxx}](y = mb) = -i\omega Z_{21}\xi \\ D[\xi_{yy} + \sigma\xi_{xx}](y = mb) = -i\omega Z_{22}\xi_y (y = mb, x \neq na)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона пластины, операторы Z_{p1}, Z_{p2} ($p = 1, 2$) — силовые и моментные импедансы ребер соответственно.

В отличие от известных гранично-контактных задач [3—5] описанная трехмерная краевая задача может быть названа гранично-контактной задачей второго порядка, поскольку кроме граничного условия (1.1) и ГКУ (1.2) необходимо сформулировать также ГКУ в точках пересечения ребер ($x = na, y = mb$). Ниже будет описан класс допустимых ГКУ второго порядка. Конкретный же анализ будет проводиться для двух вариантов

$$(1.3) \quad \xi = \xi_x = \xi_y = 0$$

$$(1.4) \quad F = M_1 = M_2 = 0.$$

$$(F = [E_2 I_2 \xi_{xxx}] (x = na) + [E_1 I_1 \xi_{yyy}] (y = mb)$$

$$M_1 = -[E_1 I_1 \xi_{yy}] (y = mb), M_2 = -[E_2 I_2 \xi_{xx}] (x = na))$$

В первом случае узлы считаются жестко закрепленными, а во втором — свободными. Здесь F — возникающая в узле сосредоточенная сила, M_1, M_2 — сосредоточенные моменты, причем величины E_p, I_p ($p = 1, 2$) — модули Юнга и моменты инерции соответствующих ребер.

Наконец, рассеянное поле $q = p - p_0$ должно удовлетворять принципу предельного поглощения.

Впервые задача, аналогичная поставленной, рассмотрена в [6] без математического обоснования применяемой расчетной схемы, вопрос о ГКУ второго порядка в ней не ставился. Как выяснится ниже, это неявно означает, что изучался случай (1.4) незакрепленных узлов.

2. В соответствии с почти-периодичностью падающей волны будем искать рассеянное поле в виде почти-периодической функции

$$(2.1) \quad q(x + na, y + mb, z) = q(x, y, z) \exp(in\alpha + im\beta)$$

$$\alpha = ka \cos \varphi_0 \sin \theta_0, \quad \beta = kb \sin \varphi_0 \sin \theta_0$$

и рассмотрим краевую задачу в основном периоде $\Omega_0 = \{0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < \infty\}$. Для обоснования схемы применения принципа предельного поглощения следует установить единственность решения однородной краевой задачи ($p_0 = 0$) при наличии поглощения в среде ($\text{Im } k > 0$). При этом решение ищется в классе функций с конечной нормой в $L_2(\Omega_0)$.

Привлечем тождество, следующее из второй формулы Грина для оператора Лапласа

$$-\text{Im } k^2 \|q\|_{L_2(\Omega)}^2 = \text{Im} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} \bar{q} dS, \quad \Omega = S_1 \times (0 < z < \infty)$$

Здесь S_1 — некоторая трансляция основного периода пластины, такая, что внутри нее лежит лишь один узел решетки $(0, 0)$, черта означает комплексное сопряжение. При преобразовании правой части, описывающей поток энергии через границу $\partial\Omega$, привлекается вторая формула Грина для пластины с ребрами [7]. В итоге имеем тождество

$$(2.2) \quad -\frac{\text{Im } k^2}{2\rho_0\omega} \|q\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{\omega}{2} \text{Im} \{\bar{\xi} F + \bar{\xi}_y M_1 + \bar{\xi}_x M_2\} (0, 0)$$

Будем называть ГКУ второго порядка допустимыми, если для них правая часть этого тождества неотрицательна. Например, допустимыми будут ГКУ вида $(F, M_1, M_2)^t = Z (\xi, \xi_y, \xi_x)^t$ (t — символ транспонирования) с матрицей импедансов Z , собственные числа которой обладают неотрицательными мнимыми частями. При этом ГКУ (1.3) и (1.4) можно

рассматривать как частные случаи при $Z \rightarrow \infty$ и $Z \rightarrow 0$ соответственно. Ясно, что для допустимых ГКУ $q = 0$, что означает единственность решения.

Для дальнейшего удобно представить рассеянное поле в виде двойного ряда Фурье с неизвестными амплитудами $A_{n,m}$

$$(2.3) \quad q(x, y, z) = \frac{-1}{ab} \sum \sum A_{nm} \exp(i\lambda_n x + i\mu_m y - \gamma_{nm} z)$$

$$\left(\lambda_n = \frac{2\pi n + \alpha}{a}, \mu_m = \frac{2\pi m + \beta}{b}, \gamma_{nm} = (\lambda_n^2 + \mu_m^2 - k^2)^{1/2}, \right.$$

$$\left. \operatorname{Re} \gamma_{n,m} \geq 0 \right)$$

Здесь и ниже отсутствие пределов суммирования у знака суммы означает, что оно проводится по всем целым n, m .

Энергетическое тождество (2.2) в отсутствие поглощения ($\operatorname{Im} k = 0$) имеет вид

$$(2.4) \quad \frac{ab}{2\rho_0\omega} \sum \sum |A_{n,m}|^2 \operatorname{Re} \sqrt{k^2 - \lambda_n^2 - \mu_m^2} = 0$$

причем суммирование достаточно проводить лишь по распространяющимся вверх волнам, для которых $\lambda_n^2 + \mu_m^2 < k^2$. Тем самым, в условиях однородной задачи амплитуды этих волн равны нулю. Однако на некоторых частотах могут появляться решения однородной краевой задачи типа волны (2.3), бегущей вдоль конструкции и экспоненциально убывающей при удалении от нее.

3. Для нахождения дифракционной компоненты поля q удобно выделить из полного поля кроме падающей волны волну p_1 , отраженную от однородной пластины

$$p = p_0 + p_1 + q, \quad p_1 = R \exp(i(\alpha x/a + \beta y/b + kz \cos \theta_0))$$

$$R = R_-/R_+, \quad R_{\pm} = (k^4 \sin^4 \theta_0 - k_0^4) ik \cos \theta_0 \pm \nu, \quad \nu = \rho_0 \omega^2 / D$$

Поступая в духе обычной методики решения гранично-контактных задач, перепишем граничное условие (1.1) как неоднородное

$$(3.1) \quad D(\Delta_0^2 - k_0^4) \xi(x, y) + q(x, y, 0) =$$

$$= \frac{1}{\nu} \sum_n e^{in\alpha} (\delta(x - na) B_1(y) + \delta'(x - na) C_1(y)) +$$

$$+ \frac{1}{\nu} \sum_m e^{im\beta} (\delta(y - mb) B_2(x) + \delta'(y - mb) C_2(x))$$

$$(-\infty < x, y < \infty)$$

Здесь и ниже символ n или m под знаком суммы означает суммирование по всем целым n или m соответственно. Неизвестные функции B_1, B_2, C_1, C_2 — аналоги гранично-контактных постоянных, возникающих в плоских задачах акустики [3—5]. Подставляя в уравнение (3.1) поле q в виде ряда (2.3) и привлекая условие прилипания, получим

$$(3.2) \quad A_{n,m} = (p_{1n} + i\mu_m q_{1n} + p_{2m} + i\lambda_n q_{2m}) / L_{n,m}$$

$$L_{n,m} = ((\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 - k_0^4) \gamma_{nm} - \nu$$

Здесь $p_{1n}, q_{1n}, p_{2m}, q_{2m}$ — коэффициенты Фурье функций $B_2(x), C_2(x), B_1(y), C_1(y)$ соответственно.

Поле смещений имеет вид

$$(3.3) \quad \xi(x, y) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2 ab} \sum \sum \frac{\gamma_{n,m}}{L_{n,m}} (p_{1n} + i\mu_m q_{1n} + p_{2m} +$$

$$+ i\lambda_n q_{2m}) \exp(i(\lambda_n x + \mu_m y))$$

Для непрерывности смещений и углов поворота пластины при переходе через ребра достаточно потребовать следующие асимптотические оценки неизвестных $p_{1n}, q_{1n}, p_{2m}, q_{2m}$:

$$p_{1n}, p_{2m} = O(1), q_{1n} = O(1/n), q_{2m} = O(1/m) \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

Можно проверить, что указанные оценки гарантируют конечность потенциальной энергии одного периода пластины.

В ГКУ (1.2) входят скачки производных высокого порядка от поля смещений ξ . Можно проверить, что скачок любых производных до третьего порядка от ξ совпадает со скачком для поля ξ_1 , получающегося из поля ξ отбрасыванием в символе граничного оператора $L_{n,m}$ динамической части ($v \rightarrow 0$)

$$(3.4) \quad \xi_1(x, y) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2 ab} \sum_n \sum_m \frac{1}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} (p_{1n} + i\mu_m q_{1n} + p_{2m} + i\lambda_n q_{2m}) \exp(i(\lambda_n x + \mu_m y))$$

При этом, поскольку разрывы производных связаны с неравномерной сходимостью ряда (3.4), любое конечное число членов в нем можно отбросить.

Для дальнейшего полезно тождество, справедливость которого можно проверить с помощью равенства Парсеваля

$$(3.5) \quad \sum_n \frac{\exp(i\lambda_n x)}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} = \frac{a}{4|\mu_m|^3} \sum_n \exp(-in\alpha - |\mu_m||x + na|)(1 + |\mu_m||x + na|)$$

Это тождество позволяет при вычислении необходимых скачков производных на линии $x = 0$ ограничиться лишь слагаемым с $n = 0$. Имеем окончательно при $y \neq 0$

$$(3.6) \quad [\xi_{xx}](x=0) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2 b} \sum_m q_{2m} \exp(i\mu_m y)$$

$$[\xi_{xxx}](x=0) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2 b} \sum_m p_{2m} \exp(i\mu_m y)$$

ГКУ (1.2) сформулированы вне узлов ($x = na, y = mb$). В узлах необходимо учесть сосредоточенные реакции, что можно сделать вводя в (1.2) дельта-функции с неизвестными множителями C_s ($1 \leq s \leq 4$). Выпишем лишь первые два преобразованных уравнения (1.2)

$$(3.7) \quad -D[\xi_{xxx}](x=na) + \frac{C_1}{v} \sum_m \delta(y-mb) \exp(im\beta) =$$

$$= -i\omega Z_{11}(\xi + \xi_+)$$

$$D[\xi_{xx}](x=na) - \frac{C_2}{v} \sum_m \delta(y-mb) \exp(im\beta) =$$

$$= -i\omega Z_{12}(\xi_x + \xi_{+,x}) \quad (x=na, -\infty < y < \infty)$$

$$\xi_+ = ik \cos \theta_0 \frac{R-1}{\rho_0 \omega^2} \exp\left(i\left(\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b}\right)\right)$$

Здесь ξ_+ — смещение пластины, соответствующее геометрической части поля.

Явные выражения для импедансов ребер, параллельных оси y [2], имеют вид

$$-i\omega Z_{11} = E_1 I_1 \partial^4 / \partial y^4 - \rho_1 b_1 H_1 \omega^2, \quad -i\omega Z_{12} = -K_1 \partial^2 / \partial y^2 - \rho_1 I_1 \omega^2$$

Здесь и ниже ρ_1, b_1, H_1 — плотность, высота и толщина ребер, K_1, I_1 — их крутильная жесткость и момент инерции сечения. Соответствующие величины для ребер, параллельных оси x , будем отмечать индексом 2.

Введем символы операторов импедансов, т. е. их преобразования Фурье, нормированные на жесткость пластины

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Omega_{1n} &= (E_2 I_2 \lambda_n^4 - \rho_2 b_2 H_2 \omega^2) / (bD), \quad W_{1n} = (K_2 \lambda_n^2 - \rho_2 I_2 \omega^2) / (bD) \\ \Omega_{2m} &= (E_1 I_1 \mu_m^4 - \rho_1 b_1 H_1 \omega^2) / (aD), \quad W_{2m} = \\ &= (K_1 \mu_m^2 - \rho_1 I_1 \omega^2) / (aD) \end{aligned}$$

Подставляя теперь в ГКУ (3.7) ряд для смещений (3.3) и учитывая выражения для скачков (3.6), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$(3.9) \quad \begin{aligned} p_{1n} + \Omega_{1n} \left(\sum_m \rho_{nm} p_{2m} + i\lambda_n \sum_m \rho_{nm} q_{2m} + J_n^0 p_{1n} + J_n^1 q_{1n} \right) &= \\ &= -\Omega_{10} d \delta_n^0 + C_3 \\ q_{1n} - W_{1n} \left(\sum_m \rho_{nm} i\mu_m p_{2m} + i\lambda_n \sum_m \rho_{nm} i\mu_m q_{2m} + J_n^1 p_{1n} + J_n^2 q_{1n} \right) &= \\ &= W_{10} i\mu_0 d \delta_n^0 + C_4 \\ p_{2m} + \Omega_{2m} \left(\sum_n \rho_{nm} p_{1n} + i\mu_m \sum_n \rho_{nm} q_{1n} + I_m^0 p_{2m} + I_m^1 q_{2m} \right) &= \\ &= -\Omega_{20} d \delta_m^0 + C_1 \\ q_{2m} - W_{2m} \left(\sum_n \rho_{nm} p_{1n} i\lambda_n + i\mu_m \sum_n \rho_{nm} i\lambda_n q_{1n} + I_m^1 p_{2m} + I_m^2 q_{2m} \right) &= \\ &= W_{20} i\lambda_0 d \delta_m^0 + C_2 \\ (\rho_{nm} = \gamma_{n, m} / L_{n, m}, \quad d = ab(R-1)ik \cos \theta_0, \quad -\infty < n, m < \infty) \\ (I_m^s = \sum_n \rho_{nm} (i\lambda_n)^s, \quad J_n^s = \sum_m \rho_{nm} (i\mu_m)^s; \quad s = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

Постоянные C_s определяются на основании ГКУ (1.3) или (1.4).

Проведем выкладки лишь для случая закрепленных узлов. Разделим первое уравнение системы (3.9) на Ω_{1n} и просуммируем по всем n . Получим

$$\begin{aligned} \sum_n p_{1n} / \Omega_{1n} + S &= C_3 \sum_n 1 / \Omega_{1n} \\ (S = \sum_n J_n^0 p_{1n} + \sum_n J_n^1 q_{1n} + \sum_m I_m^0 p_{2m} + \sum_m I_m^1 q_{2m} + d) \end{aligned}$$

В то же время из условия закрепления узла $\xi(0, 0) + \xi_+(0, 0) = 0$ и представления (3.3) следует, что $S = 0$. В итоге находим C_3 .

Окончательная система линейных алгебраических уравнений принимает вид

$$(3.10) \quad U_n p_n + \sum_{m \neq n} V_{nm} p_m - \sum_m T_{nm} p_m = p_n^0 \quad (-\infty < n < \infty)$$

Здесь

$$U_n = \begin{vmatrix} \tau_{1n} + J_n^0 & J_n^1 & \rho_{nn} & i\lambda_n \rho_{nn} \\ -J_n^1 & \tau_{2n} - J_n^2 & -i\mu_n \rho_{nn} & \lambda_n \mu_n \rho_{nn} \\ \rho_{nn} & i\mu_n \rho_{nn} & \eta_{1n} + I_n^0 & I_n^1 \\ -i\lambda_n \rho_{nn} & \lambda_n \mu_n \rho_{nn} & -I_n^1 & \eta_{2n} - I_n^2 \end{vmatrix}$$

$$V_{nm} = \begin{vmatrix} 0 & \rho_{nm} V_{nm}^1 \\ \rho_{mn} V_{nm}^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad V_{nm}^1 = \begin{vmatrix} 1 & i\lambda_n \\ -i\mu_m & \lambda_n \mu_m \end{vmatrix}$$

$$V_{nm}^2 = \begin{vmatrix} 1 & i\mu_n \\ -i\lambda_m & \lambda_m \mu_n \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \tau_{1n} &= 1/\Omega_{1n}, & \tau_{2n} &= 1/W_{1n} \\ \eta_{1m} &= 1/\Omega_{2m}, & \eta_{2m} &= 1/W_{2m} \end{aligned}$$

$$p_n = (p_{1n}, q_{1n}, p_{2n}, q_{2n})^t, \quad p_n^0 = d(-1, -i\mu_0, -1, -i\lambda_0)^t \delta_n^0$$

$$T_{nm} = \text{diag}(\tau_{1n} \tau_{1m} / \tau_1, \tau_{2n} \tau_{2m} / \tau_2, \eta_{1n} \eta_{1m} / \eta_1, \eta_{2n} \eta_{2m} / \eta_2)$$

$$\tau_s = \sum_n \tau_{sn}, \quad \eta_s = \sum_n \eta_{sn} \quad (-\infty < n, m < \infty)$$

4. Дальнейшие исследования проведем для задачи о нормальном падении плоской волны на пластину с квадратной решеткой одинаковых ребер ($b = a$, $\cos \theta_0 = 1$). Система уравнений (3.10) примет вид ($n \geq 0$)

$$(4.1) \quad u_n p_{1n} + \sum'_{m \geq 0} \varepsilon_m \rho_{nm} p_{1m} - \frac{\tau_{1n}}{\tau_1} \sum_{m \geq 0} \varepsilon_m \tau_{1m} p_{1m} = -d \delta_n^\circ$$

$$u_n = \tau_{1n} + J_n^\circ + \varepsilon_n \rho_{nn}, \quad \varepsilon_n = 2 - \delta_n^\circ$$

Здесь и ниже штрих над значком суммы означает отсутствие слагаемого с $m = n$.

Полное поле давлений выражается через решение системы p_n

$$(4.2) \quad p = \exp(-ikz) + R \exp(ikz) - \frac{1}{a^2} \sum \sum \frac{1}{L_{n,m}} (p_n + p_m) \times \\ \times \exp(i(\lambda_n x + \lambda_m y) - \gamma_{nm} z)$$

В частности, для коэффициента отражения основной волны находим

$$(4.3) \quad k_0 = R - \frac{2}{a^2} \frac{p_{10}}{L_{0,0}}$$

Сходные рассуждения для случая свободных узлов приводят к системе уравнений

$$(4.4) \quad u_n p_{1n} + \sum'_{m \geq 0} \varepsilon_m \rho_{nm} p_{1m} = -d \delta_n^\circ \quad (n \geq 0)$$

совпадающей с системой из работы [6]. Таким образом, рассуждения этой работы неявно подразумевают использование ГКУ (1.4).

Обсудим возможность применения метода редукции к бесконечным системам на примере (4.4). Разделим каждое уравнение на u_n и оценим сумму s_n модулей элементов n -й строки возникающей матрицы. С учетом положительности величин ρ_{nm} и u_n при больших номерах находим

$$s_n = \frac{1}{u_n} \sum'_{m \geq 0} \varepsilon_m \rho_{nm} = \frac{1}{u_n} \left(\sum_m \rho_{nm} - 2\rho_{nn} \right) = \frac{1}{u_n} (J_n^\circ - 2\rho_{nn})$$

Асимптотика величины J_n° по значку может быть получена сравнением этого ряда со значением его при нулевой частоте ω . Последний ряд явно суммируется. В итоге имеем

$$J_n^\circ = \frac{\pi}{2n^3} \left(\frac{a}{2\pi} \right)^4 (1 + o(1)), \quad u_n = J_n^\circ + O(n^{-4})$$

Учитывая еще очевидную асимптотику

$$\tau_{1n} \sim c_0 / (2\pi n/a)^4, \quad c_0 = aD / (E_1 I_1)$$

найдем

$$s_n = 1 - s_n', \quad s_n' = \frac{\tau_{1n} + 4\rho_{nn}}{\tau_{1n} + J_n^\circ + 2\rho_{nn}} \sim \frac{2(c_0 + 1)}{\pi n}$$

так что $s_n < 1$ при достаточно больших n .

В силу известных теорем о бесконечных алгебраических системах [8] метод редукции применим при свободных членах, оцениваемых величинами Ks_n' с какой-нибудь постоянной K . Последняя же оценка очевидна.

Укажем еще, что доказательство применимости метода редукции в работе [6] основано на утверждении о конечности нормы Гильберта — Шмидта соответствующей матрицы. Между тем двойной ряд с общим членом $|\rho_{nm}/u_n|^2$ расходится.

Отметим, что данное исследование бесконечных систем (4.1), (4.4) сходно с проведенным в работах [8,9] в связи с задачей изгиба прямоугольной пластины с жестко закрепленными кромками. Рассматриваемые системы переходят в системы из [8, 9] при $\omega \rightarrow 0$, если положить, что импедансы $Z_{p1}, Z_{p2} \rightarrow \infty$.

5. Изучим динамику коэффициента отражения основной волны K_0 , задаваемого формулой (4.3), по параметрам задачи. Рассмотрим случай незакрепленных узлов и ограничимся вначале диагональным приближением в системе (4.4), т. е. $p_{1n} = -d\delta_n^\circ/u_0$. Имеем

$$(5.1) \quad K_0 = \frac{ik\kappa^4 + \nu}{ik\kappa^4 - \nu}, \quad \kappa^4 = k_0^4 - \frac{2}{B}, \quad B = \tau_{10} + 2 \sum_{n \geq 1} \rho_{n0}$$

Найденная приближенная формула для коэффициента отражения внешне аналогична формуле для однородной пластины и отличается лишь заменой волнового числа пластины k_0 на некоторое приведенное κ , учитывающее влияние ребер жесткости. Аналогично в задаче о прохождении плоской волны через пластину имеем для коэффициентов отражения K_1 и прохождения T основной волны

$$(5.2) \quad K_1 = \frac{ik\kappa^4}{ik\kappa^4 - 2\nu}, \quad T = 1 - K_1 = \frac{-2\nu}{ik\kappa^4 - 2\nu}$$

причем при вычислении величины B здесь следует взять символ оператора пластины в виде

$$L_{n,m} = ((\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 - k_0^4) \gamma_{nm} - 2\nu$$

Приближенная формула (5.1) допускает простую интерпретацию. До первой «частоты отсечки» ($ka < 2\pi$), когда из всех волн, представленных в поле (2.3), распространяется лишь нулевая ($n = m = 0$), величина B вещественная, поэтому $|K_0| = 1$, а с частотой меняется лишь фаза отраженной волны. Далее, при тех же параметрах задачи, когда $B = \infty$, находим, что $\kappa = k_0$ и пластина ведет себя как однородная, ребра не влияют на ее акустическое поле. Видно, что этот случай реализуется при $\lambda a = 2\pi s$, где λ — волновое число изгибных волн в системе однородная пластина — жидкость, s — целое число. При $B = 0$ получаем $\kappa = \infty$, $K_0 = 1$ и пластина ведет себя как абсолютно жесткая поверхность. Наконец, при $B = 2/k_0^4$ имеем $\kappa = 0$, $K_0 = -1$ и пластина становится абсолютно мягкой. Аналогично в задаче о прохождении волны значение $B = 0$ приводит к полному отражению, а $B = 2/k_0^4$ — к полному прохождению падающей волны. Итак, приближенными формулами (5.1), (5.2) удастся описать все характерные значения коэффициентов отражения и прохождения на частотах ниже первой частоты отсечки.

На низких частотах можно в выражении для B сохранить лишь член $\tau_{10} = -aD/(\rho_1 b_1 H_1 \omega^2)$. В итоге формулы для коэффициентов отражения преобразуются к виду

$$(5.3) \quad K_0 = \frac{ik(m + 2m_1) + \rho_0 a^2}{ik(m + 2m_1) - \rho_0 a^2}, \quad K_1 = \frac{ik(m + 2m_1)}{ik(m + 2m_1) - 2\rho_0 a^2}$$

$$m = a^2 \rho^\circ H^\circ, \quad m_1 = a \rho_1 b_1 H_1$$

Величины m и $2m_1$ имеют смысл массы одного периода пластины и массы ребер на период соответственно. Формула (5.3) была известна для пластины с однопериодическим набором ребер как закон массы [1].

В случае закрепленных узлов диагональное приближение в системе (4.1) неприменимо и столь простых формул получить не удастся. Установим, что независимо от вида ГКУ второго рода коэффициенту отражения можно придать форму (5.1) (соответственно (5.2)) при подходящей вели-

чине B . Запишем системы (4.1) и (4.4) единообразно в виде ($n \geq 0$)

$$(5.4) \quad w_n p_{1n} + \sum_{m \geq 0} v_{nm} p_{1m} = -d \delta_n^0$$

$$w_n = u_n - \eta \frac{\tau_{1n}}{\tau_1} \varepsilon_n, \quad v_{nm} = \varepsilon_m \left(\rho_{nm} - \eta \frac{\tau_{1n} \tau_{1m}}{\tau_1} \right)$$

($\eta = 1$ в случае закрепленных узлов и $\eta = 0$ в случае свободных). Отделим в системе (5.4) уравнение с $n = 0$ и положим $p_{1n} = -p_{10} X_n$ с новыми неизвестными X_n ($n \geq 1$). Для последних получим бесконечную систему уравнений

$$(5.5) \quad w_n X_n + \sum_{m \geq 1} v_{nm} X_m = v_{n0}$$

Введем в рассмотрение разрешающую матрицу $\| \mu_{nm} \|$ для этой системы, так что

$$X_n = \sum_{m \geq 1} \mu_{nm} v_{m0}$$

Тогда из первого уравнения системы (5.4) находим

$$p_{10} = -d \left(w_0 - \sum_{m \geq 1} v_{0m} \sum_{k \geq 1} \mu_{mk} v_{k0} \right)$$

Введем теперь эффективную величину B_{0*} для случая одностороннего контакта пластины с жидкостью

$$(5.6) \quad B_{0*} = \tau_{10} - \eta \frac{\tau_{10}^2}{\tau_1} + 2 \sum_{n \geq 1} \rho_{n0} - \sum_{m \geq 1} v_{0m} \sum_{k \geq 1} \mu_{mk} v_{k0}$$

Эффективная величина для случая двустороннего контакта B_{1*} получается отсюда заменой параметра ν на 2ν в символе оператора пластины. Тогда точное выражение для коэффициента отражения (4.3) преобразуется к виду

$$(5.7) \quad K_{0*} = \frac{ik\kappa_{0*}^4 + \nu}{ik\kappa_{0*}^4 - \nu}, \quad \kappa_{0*}^4 = k_0^4 - \frac{2}{B_{0*}}$$

$$(5.8) \quad K_{1*} = \frac{ik\kappa_{1*}^4}{ik\kappa_{1*}^4 - 2\nu}, \quad \kappa_{1*}^4 = k_0^4 - \frac{2}{B_{1*}}$$

для одностороннего и двустороннего контакта соответственно.

В случае закрепленных узлов имеет место низкочастотная асимптотика

$$B_* \sim 2 \left(\frac{a}{2\pi} \right)^4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} (1 + \psi - (1 - \psi)^2 \xi_n), \quad \psi = \frac{3aD}{b_1^3 H_1 E_1}$$

где ξ_n ($n \geq 1$) — решение системы уравнений с коэффициентами, не зависящими от частоты

$$\left(\frac{3}{2} + \psi + 2n^4 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(n^2 + m^2)^2} \right) \xi_n + 2n^4 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(n^2 + m^2)^2} \xi_m = 1$$

Эта система совпадает при $\psi = 0$ с системой из работы [9].

6. При численных расчетах полезны некоторые контрольные энергетические тождества. Применяя построения п. 2 к полному полю, найдем аналогично (2.4)

$$(6.1) \quad \sum \sum |s_{nm}|^2 \operatorname{Re} \sqrt{k^2 - \lambda_n^2 - \mu_m^2} = \sqrt{k^2 - \lambda_0^2 - \mu_0^2}$$

Здесь суммирование проводится по распространяющимся волнам, представленным в рассеянном поле

$$(6.2) \quad p_1 + q = \sum \sum s_{nm} \exp(i(\lambda_n x + \mu_m y) - \gamma_{nm} z)$$

Рассмотрим частоты ниже первой частоты отсечки и выделим в амплитуде s_{00} дифракционную составляющую $r = s_{00} - R$. Тогда тождество (6.1) можно переписать в одной из следующих форм:

$$(6.3) \quad |s_{00}| = |r + R| = 1, \quad |r|^2 = -2 \operatorname{Re}(\bar{R}r)$$

В случае двустороннего контакта пластины с жидкостью введем еще прошедшее поле ($z < 0$)

$$(6.4) \quad q' = \sum \sum s'_{nm} \exp(i(\lambda_n x + \mu_m y) + \gamma_{nm} z)$$

и выделим в амплитуде основной волны дифракционную составляющую $t = s'_{00} - T$ (T — коэффициент прохождения через однородную пластину). В этой ситуации тождество (6.1) примет вид

$$(6.5) \quad \sum \sum (|s_{nm}|^2 + |s'_{nm}|^2) \operatorname{Re} \sqrt{k^2 - \lambda_n^2 - \mu_m^2} = \sqrt{k^2 - \lambda_0^2 - \mu_0^2}$$

а вместо тождеств (6.3) найдем

$$(6.6) \quad |s_{00}|^2 + |s'_{00}|^2 = |r + R|^2 + |t + T|^2 = 1 \\ |r|^2 + |t|^2 = -2 \operatorname{Re}(\bar{R}r + \bar{T}t)$$

Соотношения (6.3), (6.6) — аналоги оптической теоремы для рассматриваемой модели [10].

В качестве примера применения тождества (6.5) оценим долю энергии, трансформируемой из падающей волны во все другие волны. Для этого представим амплитуду s_{00} в комплексной форме: $s_{00} = u + iv$, тогда $s'_{00} = 1 - u - iv$ и имеем цепочку очевидных соотношений

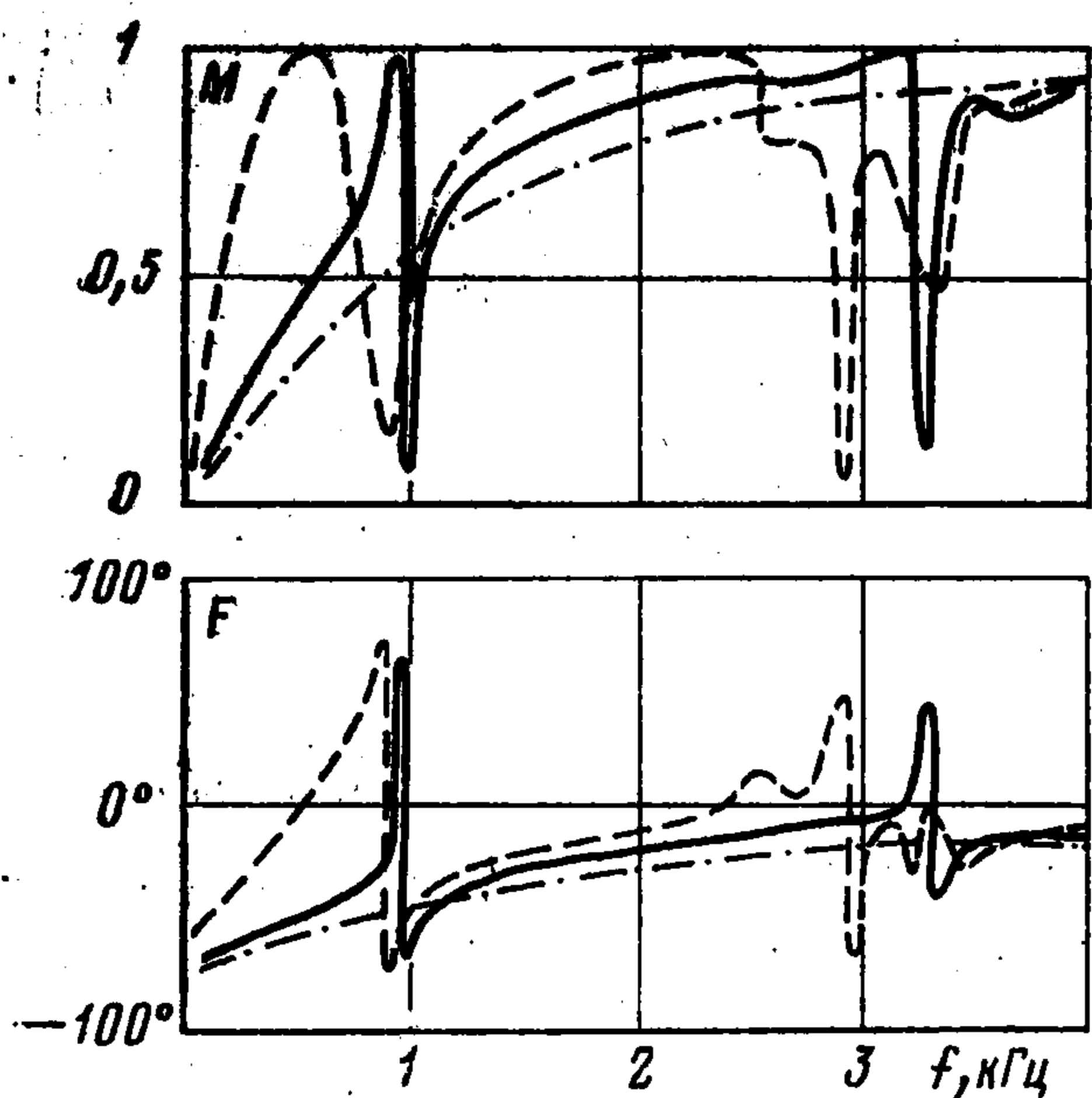
$$\sum \sum_{n^2+m^2>0} (|s_{nm}|^2 + |s'_{nm}|^2) \operatorname{Re} \sqrt{k^2 - \lambda_n^2 - \mu_m^2} = \\ = \sqrt{k^2 - \lambda_0^2 - \mu_0^2} (1 - |s_{00}|^2 - |s'_{00}|^2) = \\ = \sqrt{k^2 - \lambda_0^2 - \mu_0^2} (2u - 2u^2 - 2v^2) \leq \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - \lambda_0^2 - \mu_0^2}$$

Итак, доля энергии, трансформируемой из падающей волны во все другие, не превосходит 0,5.

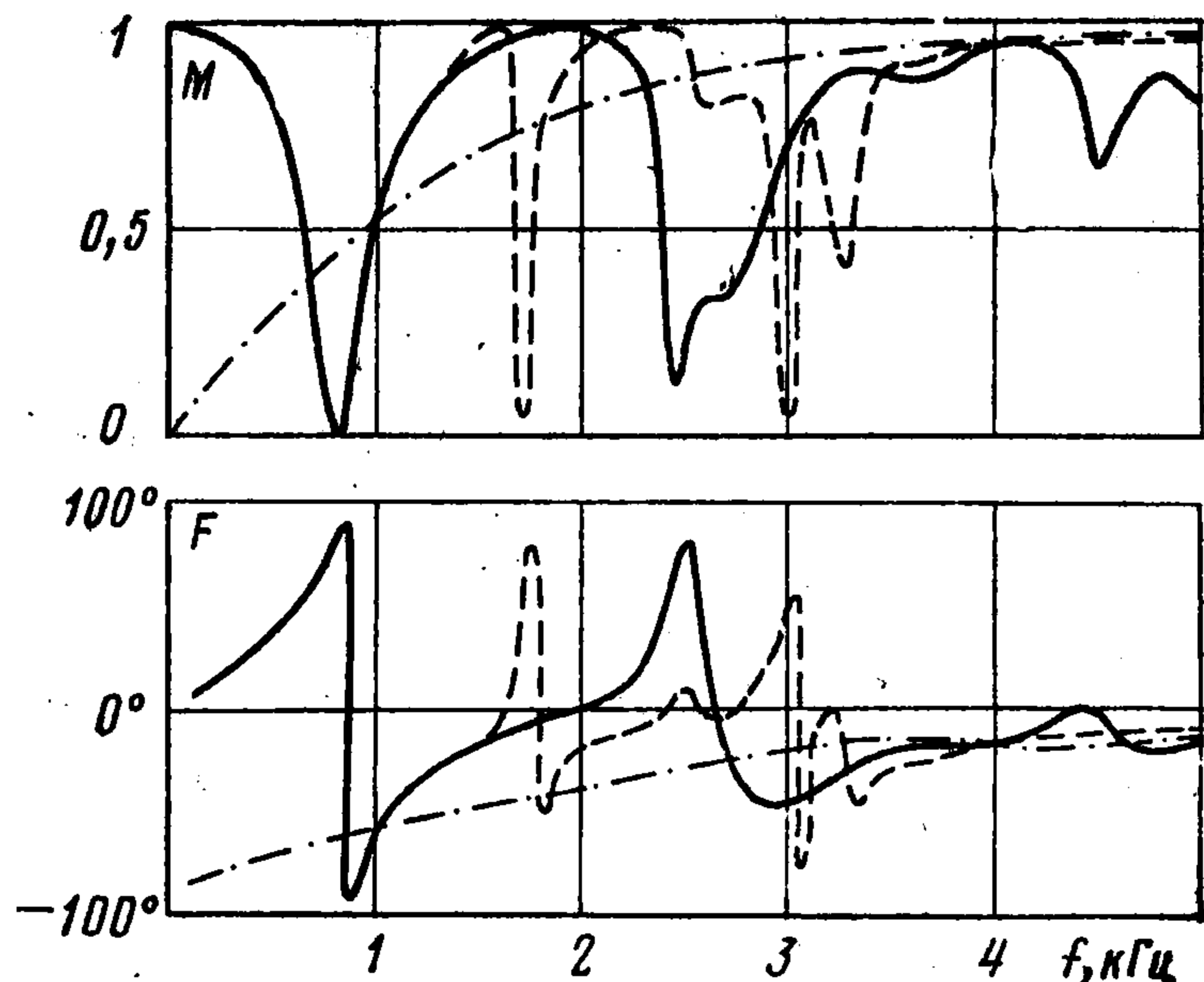
Обратимся к численному изучению динамики коэффициента отражения основной волны K по частоте. Расчеты проводились по точной формуле (4.3) путем решения бесконечной системы (5.4) для стальной пластины толщиной $H^0 = 4$ см со стальными ребрами жесткости толщиной $H_1 = 3$ см и высотой $b_1 = 20$ см при периоде решетки ребер $a = 60$ см в случае двустороннего контакта пластины с водой. Фиг. 1 относится к случаю свободных узлов, а фиг. 2 — к случаю закрепленных. Показаны зависимости модуля коэффициента отражения $M = |K|$ и фазы $F = \arg K$ от частоты. Для сравнения штриховыми линиями изображены зависимости при гипотетической плотности ребер, в 10 раз превышающей плотность стали, а штрихпунктирными линиями — зависимости для однородной пластины.

Начальные участки кривых на фиг. 1, приблизительно до частоты 0,6 кГц, подчиняются закону массы (5.3). С возрастанием частоты коэффициент отражения колеблется около значений, соответствующих однородной пластине, появляются узкие зоны пропускания, в которых коэффициент отражения резко уменьшается. Увеличение массы ребер приводит к уменьшению частот, на которых происходят резкие изменения коэффициента отражения, что связано с возрастанием эффективного волнового числа конструкции. С ростом волнового расстояния между ребрами жесткости расстояние между кривыми, построенными для различных плотностей ребер, уменьшается, и они асимптотически стремятся к кривым для однородной пластины. При $f > 3,5$ кГц (на длине периода укладывается полторы длины волны в жидкости) влиянием ребер уже можно пренебречь.

В случае закрепленных узлов (фиг. 2) отражение на низких частотах ($f < 0,4$ кГц) близко к полному. При частотах ниже 1,4 кГц отсутствует зависимость коэффициента отражения от массы ребер, последние проявляют себя как бесконечно тяжелые. Ус-



Фиг. 1



Фиг. 2

становление коэффициента отражения к значениям, соответствующим однородной пластине, при закрепленных узлах происходит медленнее, чем при свободных. В целом, режим в узлах, фиксируемый с помощью ГКУ второго порядка, оказывает существенное влияние на акустические свойства пластины, особенно на низких и средних частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
2. Белинский Б. П., Вешев В. А., Клюкин И. И., Коузов Д. П. О влиянии ребер на распространение изгибных волн в пластине конечной ширины. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 166—170.
3. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин. — ПММ, 1968, т. 33, вып. 2, с. 240—250.
4. Белинский Б. П., Коузов Д. П., Чельцова В. Д. О дифракции акустических волн на пластинах, сочлененных под прямым углом. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 291—299.
5. Коузов Д. П. Об акустическом поле точечного источника в прямоугольном объеме, ограниченном тонкими упругими стенками. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 305—313.
6. Mace B. R. Sound radiation from fluid loaded orthogonally stiffened plates. — J. Sound and Vibrat., 1981, v. 79, No. 3, p. 439—452.
7. Белинский Б. П. О единственности решения стационарных задач акустики подкрепленных пластин. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1981, т. 104, вып. 11, с. 14—19.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Л. — М.: Гостехтеоретиздат, 1949. 696 с.
9. Даревский В. М., Шаринов И. Л. Новое решение задачи об изгибе защемленной по краям прямоугольной пластинки. — В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, с. 183—194.
10. Белинский Б. П., Коузов Д. П. Оптическая теорема для системы пластина — жидкость. — Акуст. ж., 1980, т. 26, вып. 1, с. 13—19.

Ленинград

Поступила в редакцию
10.X.1982