

УДК 539.3 : 534.242

## ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ ОТРАЖЕННЫХ И ПРОХОДЯЩИХ ВОЛН ПРИ РАССЕЙАНИИ ЗВУКА ПОЛОЙ УПРУГОЙ СФЕРОЙ С ЖИДКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Поддубняк А. П.

При помощи преобразования Зоммерфельда — Ватсона, метода отражения и теории графов изучаются составляющие эхо-сигнала от поллой упругой сферы с концентрическим жидким заполнителем, сформированные вследствие отражения и переотражения на границах раздела сред. Ранее подобный подход использовался при исследовании звукового поля в слое [1] и переотражения волн в двухслойной жидкой сфере [2].

Волны отражения и прохождения (геометрические волны), играющие основную роль в потенциальном (фоновом) рассеянии звука на объекте, рассматривались [3—8] в предположении, что объект сплошной. Наличие внутри рассеивателя жидкого или упругого заполнителя значительно усложняет процесс переотражения [9, 10]. Ниже анализируются высокочастотные гармонические и нестационарные звуковые волны отражения и прохождения при наличии в поллой упругой сфере акустической жидкости.

1. Постановка задачи и ее формальное решение с применением преобразования Фурье по времени и разложения по сферическим гармоникам приведены в [11]. Запишем фурье-трансформанту давления в рассеянной волне в виде интеграла Зоммерфельда — Ватсона по комплексному угловому моменту (номеру моды нормальной волны) [12], позволяющем исследовать отраженные и переотраженные компоненты эхо-сигнала [2, 3]

$$(1.1) \quad p_g \approx -ip_0\omega\bar{f}(\omega) \int_C \frac{v}{y} R_l h_l^{(1)}(\omega r) Q_l^{(2)}(\theta) dv$$

$$Q_l^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ P_l(\cos\theta) - \frac{2i}{\pi} Q_l(\cos\theta) \right] \quad \left( l = v - \frac{1}{2} \right)$$

Здесь контур  $C$  — часть контура, охватывающего также полюсы функции  $R_l$ , соответствующие поверхностным волнам [3, 12—15], и проходит по перевальному пути,  $P_l(x)$  и  $Q_l(x)$  — функции Лежандра,  $h_l^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2$ ) — сферические функции Ханкеля,  $\bar{f}(\omega)$  — фурье-преобразование звуковой посылки, излучаемой точечным источником, находящимся на расстоянии  $l_0$  от центра рассеивателя, принятого за начало отсчета сферической системы координат  $r\theta\varphi$  ( $\theta = 0$ ,  $\varphi = 0$  — направление на источник),  $\omega$  — параметр преобразования Фурье (безразмерная частота),  $p_0$  — нормирующее давление. Функция  $R_l$  связана соотношением [2,5]

$$x_l = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{y} R_l \right), \quad y = \frac{h_l^{(1)}(\omega)}{h_l^{(2)}(\omega)}$$

с  $x_l$ , равным отношению двух определителей шестого порядка, вытекающих из условий контакта упругой и жидких сред и составленных из комбинаций сферических функций Бесселя, Неймана и Ханкеля [11]. Опуская подробности, связанные с раскрытием этих определителей, запишем окончательное выражение

$$(1.2) \quad R_l = R_l^\circ - \frac{\bar{f}_3}{(1-f_1)^2} \frac{\bar{y}_F}{1 + \bar{R}_l^\circ \bar{y}_F}$$

$$R_l^\circ = R_{12} + \frac{f_2}{1-f_1}, \quad \bar{R}_l^\circ = \bar{R}_{12} + \frac{\bar{f}_2}{1-f_1}$$

$$\begin{aligned}
(1.3) \quad f_1 &= \sum_{A, B} (a_A Y_A + b_{AB} Y_{LT}) - d Y_L Y_T \\
f_2 &= \sum_{A, B} (e_A Y_A + f_{AB} Y_{LT}) - g Y_L Y_T \\
\bar{f}_2 &= - \sum_{A, B} (\bar{e}_A Y_A + \bar{f}_{AB} Y_{LT}) + \bar{g} Y_L Y_T \\
\bar{f}_3 &= - \sum_{A, B} [\bar{h}_A Y_A + (\bar{i}_{AB} + \bar{k}_A Y_A) Y_{LT}] - \\
&- [\bar{j} + \sum_{A, B} (\bar{n}_A Y_A + \bar{l}_{AB} Y_{LT})] Y_L Y_T \\
a_A &= \eta_A \bar{\eta}_A, \quad b_{AB} = m_{AB} r_A \bar{r}_B, \quad d = \delta \bar{\delta} \\
e_A &= \alpha \lambda_A \bar{\eta}_A, \quad f_{AB} = \alpha m_{AB} q_A \bar{r}_B, \quad g = \alpha \sigma \bar{\delta} \\
\bar{e}_A &= \bar{\alpha} \eta_A \bar{\lambda}_A, \quad \bar{f}_{AB} = \bar{\alpha} m_{AB} r_A \bar{q}_B, \quad \bar{g} = \bar{\alpha} \delta \bar{\sigma} \\
\bar{h}_A &= \alpha_0 \lambda_A \bar{\lambda}_A, \quad \bar{i}_{AB} = \alpha_0 m_{AB} q_A \bar{q}_B, \quad \alpha_0 = \alpha \bar{\alpha} \\
\bar{j} &= \alpha_0 (\kappa \bar{\kappa} - \sigma \bar{\sigma}), \quad \bar{k}_A = \bar{k}_{LA} m_{LT} + \bar{k}_{TA} m_{TL} \\
\bar{k}_{AB} &= \alpha_0 \mu_{AB} \bar{\mu}_{BA}, \quad \bar{k}_{AA} = \alpha_0 \mu_{AA} \bar{\mu}_{BB} \\
\bar{l}_{AB} &= \alpha_0 m_{AB} \xi_A \bar{\xi}_A, \quad \bar{n}_A = \alpha_0 \chi_A \bar{\chi}_A \\
\lambda_A &= \lambda_{ij}^{22}, \quad \chi_A = \lambda_{ij}^{11}, \quad \kappa = \lambda_{12}^{21}, \quad \sigma = \lambda_{22}^{11}, \quad \delta = \eta_{11} \\
q_A &= \xi_A^{22}, \quad \xi_A = \xi_A^{11}, \quad \mu_{AB} = -\xi_A^{ji}, \quad \eta_A = \eta_{ij} \\
\bar{\lambda}_B &= \bar{\lambda}_{ij}^{11}, \quad \bar{\chi}_B = \bar{\lambda}_{ij}^{22}, \quad \bar{\kappa} = \bar{\lambda}_{12}^{21}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\lambda}_{11}^{22}, \quad \bar{\delta} = \bar{\eta}_{22} \\
\bar{q}_A &= \bar{\xi}_A^{11}, \quad \bar{\xi}_A = \bar{\xi}_A^{22}, \quad \bar{\mu}_{AB} = -\bar{\xi}_A^{ji}, \quad \bar{\eta}_B = \bar{\eta}_{ij} \\
\lambda_{pq}^{kt} &= (A_{kt} B_{pq} - B_{kt} A_{pq}) C_s^{-1}, \quad \xi_A^{kt} = (A_{kt} F_{2A} - B_{kt} F_{1A}) C_s^{-1} \\
\eta_{pq} &= (z_1 B_{pq} - N_s A_{pq}) C_s^{-1}, \quad r_A = (z_1 F_{2A} - N_s F_{1A}) C_s^{-1} \\
\alpha &= (z_2 - z_1) N_s C_s^{-1}, \quad \bar{\alpha} = (\bar{z}_{2F} - \bar{z}_{1F}) N_F \bar{C}_F^{-1} \\
R_{12} &= (z_2 B_{22} - N_s A_{22}) C_s^{-1}, \quad \bar{R}_{12} = (\bar{z}_{1F} \bar{B}_{11} - N_F \bar{A}_{11}) \bar{C}_F^{-1} \\
C_s &= z_1 B_{22} - N_s A_{22}, \quad \bar{C}_F = \bar{z}_{2F} \bar{B}_{11} - N_F \bar{A}_{11} \\
A_{kt} &= z_{kL} s_{tT} - w_{kT}, \quad B_{kt} = v_{kL} s_{tT} - u_{kL} w_{tT} \\
F_{1L} &= F_{1L}', \quad F_{1T} = l_1 F_{1T}', \quad F_{2A} = [1 - (l_1 - 2) q_0] F_{1A} \\
F_{1A}' &= q_0 (z_{2A} - z_{1A}), \quad l_1 = l(l+1), \quad q_0 = 2\omega_T^{-2} \\
u_{kA} &= q_0 (1 - z_{kA}), \quad v_{kA} = 1 - q_0 (l_1 - 2z_{kA}) \\
w_{kA} &= l_1 u_{kA}, \quad s_{kA} = u_{kA} + v_{kA} \\
z_k &= \omega \frac{h_l^{(k)'}(\omega)}{h_l^{(k)}(\omega)}, \quad z_{kA} = \omega_A \frac{h_l^{(k)'}(\omega_A)}{h_l^{(k)}(\omega_A)} \\
y_A &= t_A t_A^{*-1}, \quad Y_A = y_A y_A^{-1}, \quad Y_{LT} = -m_{LT} a_{TL}, \quad m_{LT} = |a_{LT}| \\
a_{LT} &= t_L \bar{t}_T^* (t_T \bar{t}_L^*)^{-1}, \quad t_A = h_l^{(1)}(\omega_A), \quad N_s = \rho \rho_s^{-1}, \quad N_F = \rho_F \rho_s^{-1} \\
&(A, B = L, T; A \neq B; i, j, k, p, q, t = 1, 2; i \neq j)
\end{aligned}$$

Здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Принято также, что если  $A = L, B = T$ , то  $i = 1, j = 2$ , а если  $A = T, B = L$ , то  $i = 2, j = 1$ . В выражениях с черточками все функции зависят от  $\bar{\omega}_A = \omega_A \varepsilon$ , где  $\omega_A = \omega \beta_A^{-1}, \beta_A = c_A c^{-1}$  ( $A = L, T, F$ ). При этом вместо  $z_1, N_s$  и  $C_s$  следует положить  $\bar{z}_{2F}, N_F$  и  $\bar{C}_F$ . Здесь и выше  $\varepsilon = b a^{-1}$  — отношение внутреннего и внешнего радиусов оболочки,  $c_L, c_T, \rho_s$  — скорости продольных и поперечных волн и плотность материала в оболочке,  $c, c_F, \rho_s, \rho_F$  — скорости звука и плотности во внешней акустической среде и заполнителе,  $h_l^{(k)'}(x)$  — производная сферической функции Ханкеля по аргументу. Введение фазовых функций (отношений функций Ханкеля первого и второго рода) и логарифмической производной от функций Ханкеля удобно для геометрического описания распространения волн. Так, первый

член в  $R_l^\circ$  (1.2) описывает отражение от внешней поверхности оболочки, второй — распространение в слое оболочки без захода в заполнитель. Аналогичную волновую картину со стороны жидкого заполнителя получаем рассматривая функцию  $\bar{R}_l^\circ$ . Вторым член в  $R_l$  (1.2) соответствует переотражению волн в оболочке с прохождением в заполнитель.

В частном случае путем предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем выражение для  $R_l$ , соответствующее рассеянию звука сплошной упругой сферой

$$R_l \equiv R_l^\circ = R_{12} + \frac{f_2}{1 - f_1}, \quad f_1 = \eta_{LYL} + \eta_{TYT} + \delta y_{LYT}$$

$$f_2 = -\alpha (\lambda_{LYL} + \lambda_{TYT} + \sigma y_{LYT})$$

При  $c_T \rightarrow 0$  приходим к случаю жидкой двухслойной сферы [2]. Если  $\varepsilon \rightarrow 0$  или  $\varepsilon \rightarrow 1$ , то получаем представление для сплошной жидкой сферы с параметрами  $c_L, \rho_s$  или  $c_F, \rho_F$  соответственно.

2. Для дальнейшего анализа важно установить физический смысл входящих в  $R_l$  (1.2) коэффициентов, найти их связь с коэффициентами отражения и прохождения. В случае сплошного упругого цилиндра это было выполнено [5] при помощи сложных преобразований. Методом графов [1] та же задача была решена элементарно<sup>1</sup>. В силу наличия дополнительной внутренней поверхности раздела сред в объекте процесс расщепления волновых лучей типа многозвенной цепной реакции еще более усложняется. Здесь особенно сказывается преимущество теории графов.

Запишем функцию  $R_l$  в виде, эквивалентном (1.2)

$$(2.1) \quad R_l = R_{12} + \frac{\alpha \left[ \sum_{A, B} (\lambda_A \bar{S}_A Y_A - q_A \bar{Q}_{AB} Y_{LT}) - \sigma \bar{S}_{LT} Y_L Y_T \right]}{1 - \left[ \sum_{A, B} (\eta_A \bar{S}_A Y_A - r_A \bar{Q}_{AB} Y_{LT}) - \delta \bar{S}_{LT} Y_L Y_T \right]}$$

$$(2.2) \quad \bar{S}_A = \bar{\eta}_A + \frac{\bar{\alpha} \bar{\lambda}_A \bar{y}_F}{1 + \bar{R}_{21} \bar{y}_F}, \quad \bar{S}_{LT} = \bar{\delta} + \frac{\bar{\alpha} \bar{\sigma} \bar{y}_F}{1 + \bar{R}_{21} \bar{y}_F}$$

$$\bar{Q}_{AB} = m_{AB} \left( \bar{r}_A + \frac{\bar{\alpha} \bar{q}_A \bar{y}_F}{1 + \bar{R}_{21} \bar{y}_F} \right), \quad A, B = L, T; A \neq B$$

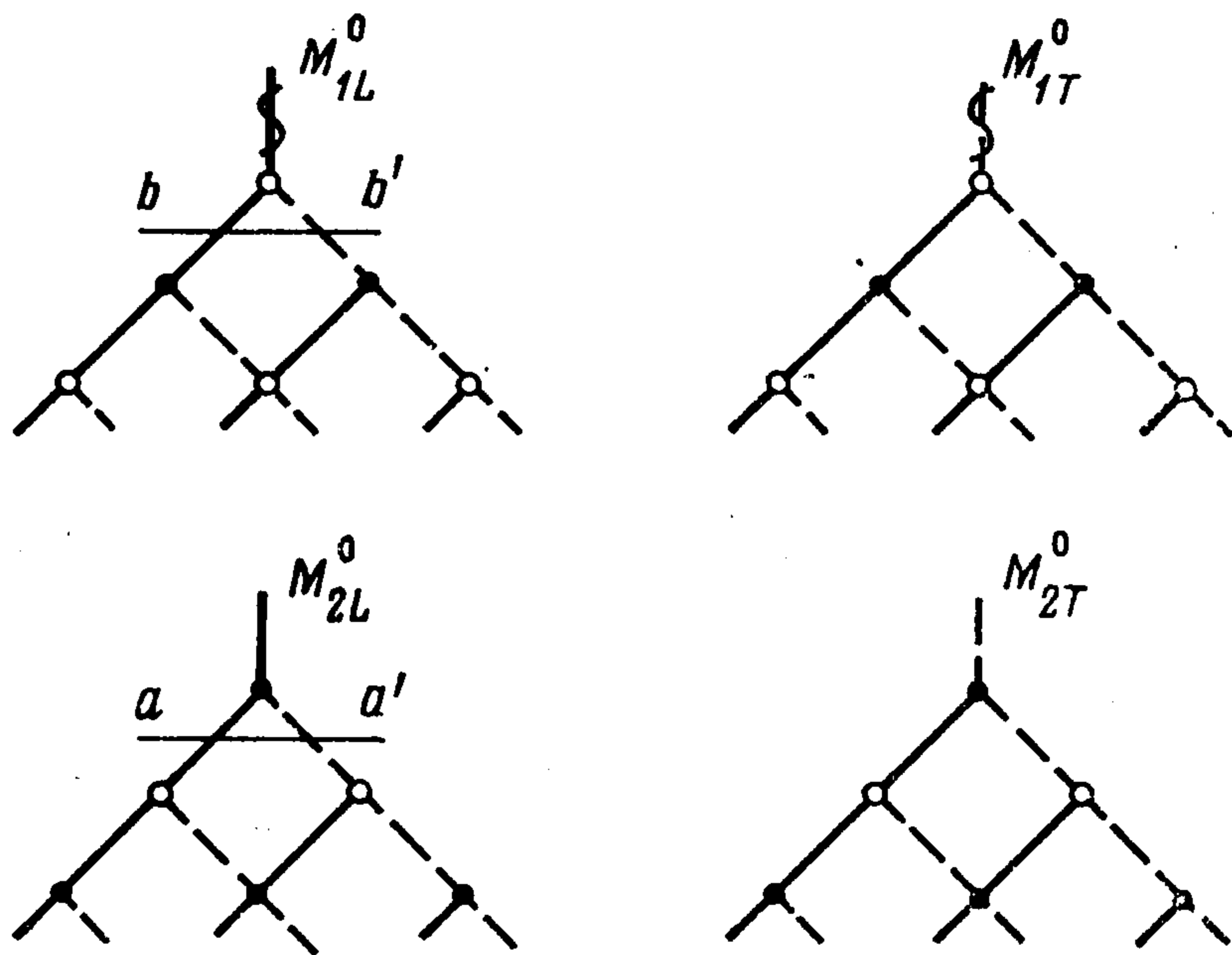
Поставим в соответствие каждому лучу продольной и поперечной волны сплошную и штриховую линии, считая их ребрами графа, а точки расщепления луча — граничными точками ребра (вершинами графа). На фиг. 1 изображены четыре графа, светлые точки в которых обозначают вершины графа на внешней поверхности оболочки  $r = 1$ , а темные — вершины графа на внутренней поверхности оболочки  $r = \varepsilon$ . Графы построены для сумм всех волн  $L$ - и  $T$ -типа в оболочке, вышедших сквозь поверхность  $r = 1$  во внешнюю акустическую среду, отнесенных к коэффициенту прохождения и фазовому пути соответствующей волны

$$(2.3) \quad M_{jA}^\circ = \frac{M_{jA}}{X_A T_{12}^A} \quad (A = L, T; j = 1, 2)$$

Разрезая любой граф у его вершины, получим три части, одна из которых соответствует «возбуждающей» волне, а две другие — «возбужденным»  $L$ - и  $T$ -волнам, являющимся графами того же типа, что и исходные.

<sup>1</sup> Поддубняк А. П. Об одном способе определения геометрических волн при рассеивании акустической волны на упругом круговом цилиндре. — В кн.: Материалы 6-й конференции молодых ученых Ин-та прикл. проблем механ. и матем. АН УССР. Секц. механ. деформир. тверд. тела, Львов, 1978. — 3 с. Деп. в ВИНТИ 13.11.79, № 3851-79.

На фиг. 1 и в (2.3)  $M_{2A}^\circ$  обозначает  $A$ -граф ( $A = L, T$ ) с волнами, образующимися вследствие проникания звуковых волн в оболочку, отражения и расщепления их на  $L$ - и  $T$ -волны на поверхности  $r = \varepsilon$  и выхода во внешнюю среду, или после переотражения на внешней и внутренней поверхностях оболочки и последующего прохождения во внешнюю акустическую среду. В случае  $M_{1A}^\circ$  имеем  $A$ -граф с волнами, образующимися после переотражения на внешней поверхности объекта  $r = 1$  изнутри обратно в



Фиг. 1

толщу оболочки и дальнейшего переотражения на внутренней поверхности и выхода во внешнюю акустическую среду. Если проникающие лучи, по крайней мере  $L$ -типа, не касаются поверхности заполнителя, то граф  $M_{2L}^\circ$  переходит в граф, соответствующий случаю сплошной сферы. При этом вершины графа  $M_{2L}^\circ$  и соответствующего ему графа  $M_{1T}^\circ$  лежат на поверхности  $r = 1$  (все точки на фиг. 1 для этих графов должны быть затемнены). Для графа  $M_{2T}^\circ$  и соответствующих ему графов  $M_{2L}^\circ$ ,  $M_{1L}^\circ$ ,  $M_{1T}^\circ$  никаких изменений не производим. И лишь в случае, когда  $L$ - и  $T$ -лучи проходят вне заполнителя, оставляем только два графа  $M_{2L}^\circ$  и  $M_{2T}^\circ$ , заменяя все точки на темные.

Разрез  $aa'$  графа  $M_{2L}^\circ$  (фиг. 1) дает ниже сумму графов  $M_{1L}^\circ$  и  $M_{1T}^\circ$ , умноженных на фазовые функции путей прохождения  $L$ - и  $T$ -лучей и приведенные коэффициенты отражения от внутренней поверхности  $r = \varepsilon$

$$(2.4) \quad M_{2L}^\circ = F^L + \bar{R}_{12}^{LLF} M_{1L}^\circ X_L + \bar{R}_{12}^{LTF} M_{1T}^\circ X_T$$

где  $F^L$  — первично вышедшие лучи после одного внутреннего отражения и расщепления на поверхности  $r = \varepsilon$  (один луч  $L$ -типа в случае сплошного объекта)

$$(2.5) \quad F^L = -\bar{R}_{12}^{LLF} T_{21}^L X_L - \bar{R}_{12}^{LTF} T_{21}^T X_T$$

$\bar{R}_{12}^{LAF}$  — значения приведенных коэффициентов отражения, характеризующих волновой процесс в акустическом заполнителе,  $T_{21}^A$  — коэффициенты прохождения соответствующих волн из оболочки во внешнюю акустическую среду,  $X_L$  и  $X_T$  — фазовые функции, обладающие свойством (в асимптотическом смысле при больших  $|\omega|$ )

$$(2.6) \quad X_A^2 = -Y_A, \quad Y_{LT} = -X_L X_T$$

Разрез  $bb'$  графа  $M_{1A}^\circ$  (фиг. 1) аналогично приводит к сумме

$$(2.7) \quad M_{1L}^\circ = R_{21}^{LL} M_{2L}^\circ X_L + R_{21}^{LT} M_{2T}^\circ X_T$$

где  $R_{21}^{LA}$  — коэффициенты отражения волн от поверхности  $r = 1$  изнутри назад в оболочку.

Меняя в (2.4), (2.7) индексы  $L$  и  $T$  местами, получим аналогичные выражения для  $M_{2T}^\circ$  и  $M_{1T}^\circ$ , в результате чего приходим к системе линейных алгебраических уравнений четвертого порядка для определения  $M_{jA}^\circ$ . Решая эту систему, на основе (2.3) находим  $M_{2L}$  и  $M_{2T}$ . Суммируя все волны, переотраженные сначала в оболочке и проникшие затем во внешнюю акустическую среду, получим

$$(2.8) \quad U = M_{2L} + M_{2T}$$

Формулу (2.1) можно представить в виде <sup>2</sup>

$$(2.9) \quad R_l = R_{12} - U$$

( $R_{12}$  — коэффициент отражения от внешней поверхности тела). Сравним члены при одинаковых фазовых функциях  $Y$  в числителях и знаменателях вторых слагаемых правой части в (2.1) и (2.9). Учитывая, что структура коэффициентов  $\bar{R}_{12}^{ABF}$  имеет тот же вид, что и (2.9) для жидкой сферы (это также устанавливается при помощи графов)

$$\bar{R}_{12}^{ABF} = \bar{R}_{12}^{AB} - \bar{U}^{AB}, \quad \bar{U}^{AB} = \frac{\bar{T}_{12}^A \bar{y}_F \bar{T}_{21}^B}{1 + \bar{R}_{21} \bar{y}_F}$$

где  $\bar{R}_{21}$  — коэффициент отражения волны от внутренней поверхности оболочки в заполнитель,  $\bar{T}_{12}^A$  — коэффициент прохождения волны  $A$ -типа ( $A = L, T$ ) из оболочки в заполнитель,  $\bar{T}_{21}^A$  — коэффициент прохождения звуковой волны из акустического заполнителя в оболочку с превращением ее в упругую волну  $A$ -типа ( $A = L, T$ ), найдем

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \eta_A &= R_{21}^{AA}, \quad \sqrt{m_{AB} r_A} = R_{21}^{BA}, \quad \alpha \lambda_A = T_{12}^A T_{21}^A \\ \sqrt{m_{AB} \alpha q_A} &= T_{12}^A T_{21}^B, \quad \delta = \eta_L \eta_T - r_{LT} \\ \sigma &= \sum_{A, B} (\lambda_A \eta_B - r_{AqB}), \quad \bar{\eta}_A = -\bar{R}_{12}^{AA} \\ \sqrt{m_{AB} \bar{r}_B} &= \bar{R}_{12}^{AB}, \quad \bar{\alpha} \bar{\lambda}_A = \bar{T}_{12}^A \bar{T}_{21}^A \\ \sqrt{m_{AB} \bar{\alpha} \bar{q}_B} &= -\bar{T}_{12}^A \bar{T}_{21}^B, \quad \bar{\delta} = \bar{\eta}_L \bar{\eta}_T - \bar{r}_{L\bar{T}} \\ \bar{\sigma} &= \sum_{A, B} (\bar{\lambda}_A \bar{\eta}_B - \bar{r}_{A\bar{q}B}) \end{aligned}$$

Соотношения для других коэффициентов в (1.3) устанавливаются путем сравнения (1.2) и (2.1).

Таким образом, при помощи графов коэффициентам, входящим в (1.3), (2.1), придан физический смысл — они выражаются через коэффициенты отражения и прохождения на двух сферических поверхностях раздела  $r = 1$  и  $r = \varepsilon$ .

3. Интеграл Зоммерфельда — Ватсона вычислим по методу перевала [16], полагая  $|\omega|$  и  $|\nu|$  большими. С этой целью воспользуемся соответствующими асимптотическими формулами для сферических функций Ханкеля и функций Лежандра [11, 12], входящих в (1.1) — (1.3). Из этих асимптотик и (2.6) представим  $R_l$  (1.2) в виде разложения по отраженным и переотраженным волнам. После вычисления интеграла получим ре-

<sup>2</sup> См. сноску на 956.

Результат

$$(3.1) \quad \bar{p}_g \approx \frac{1}{r} p_0 \bar{f}(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{s=0}^{\infty} S_{nms} R_{nms} (N_{nms}) \exp(i\omega L_{nms}^+)$$

В случае кратковременной высокочастотной синусоидальной посылки [6—8]

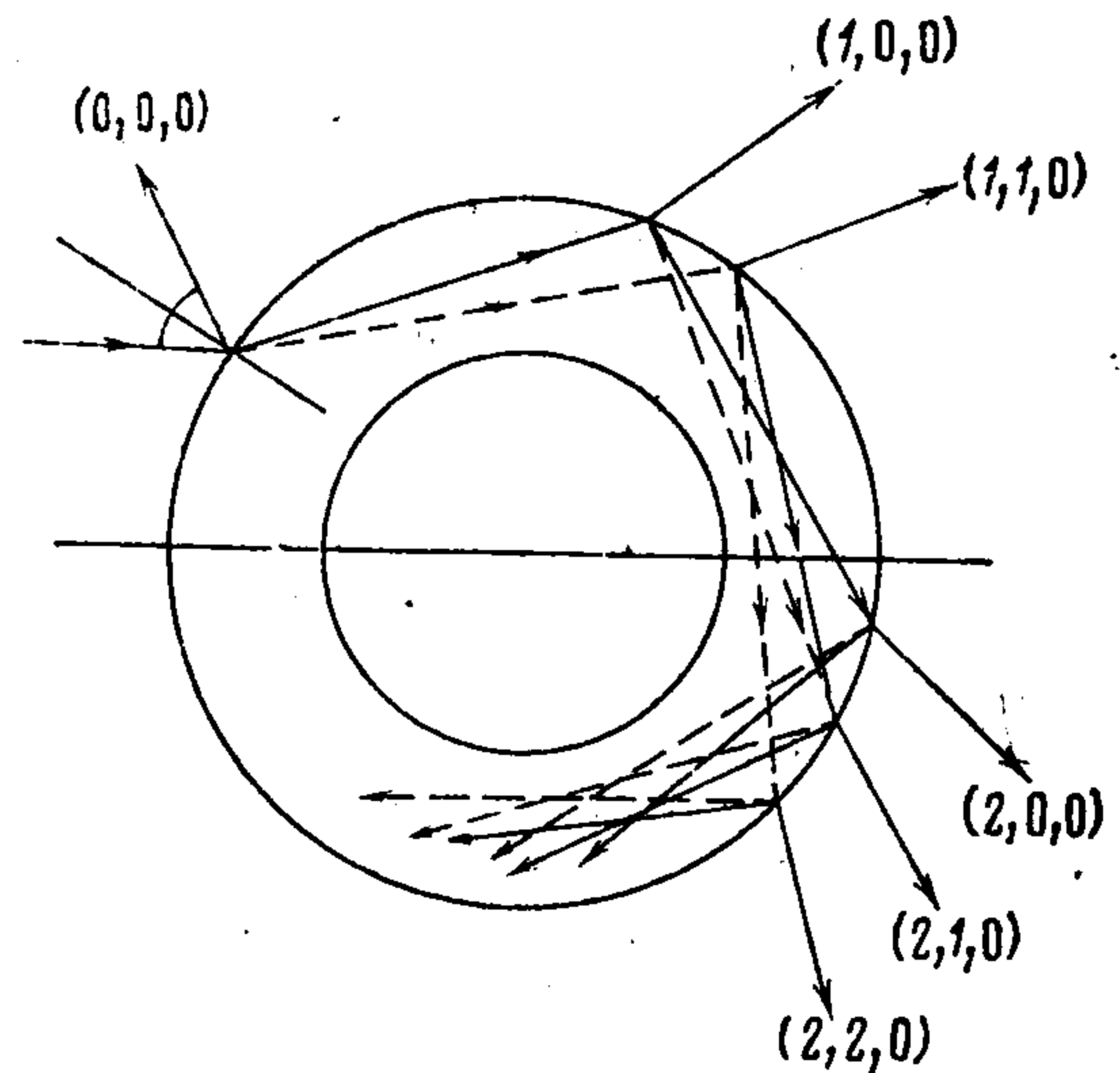
$$f(\tau) = \sin \omega_0 \tau [U(\tau) - U(\tau - \tau_0)],$$

$$\tau = \frac{ct}{a}, \quad \tau_0 = \frac{ct_0}{a}$$

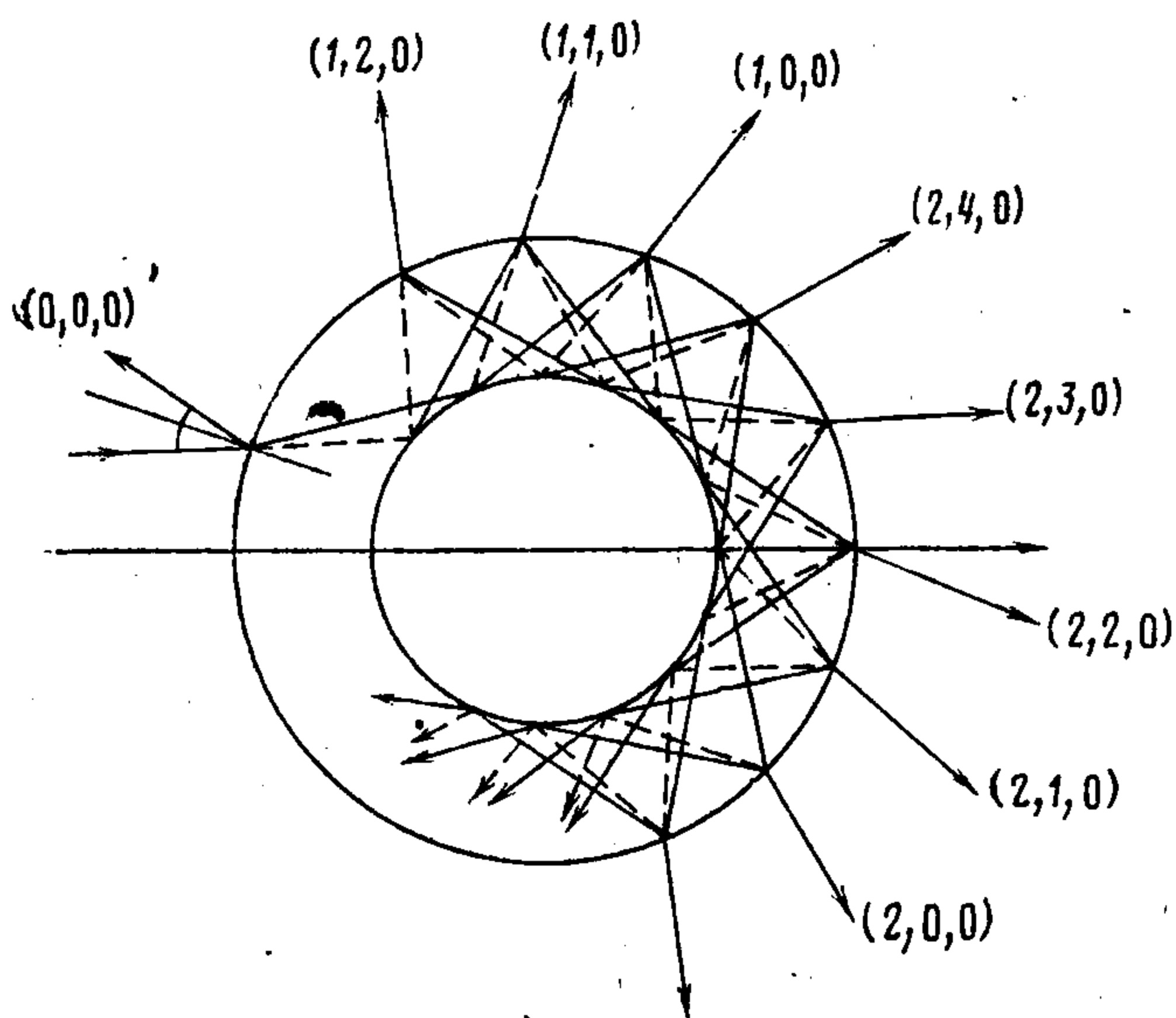
где  $\omega_0$  — несущая частота,  $t$  — время,  $t_0$  — длительность сигнала, составляющие геометрической части эхо-сигнала дадут

$$(3.2) \quad p_g \approx \frac{1}{r} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{s=0}^{\infty} S_{nms} R_{nms} (N_{nms}^{\circ}) \times$$

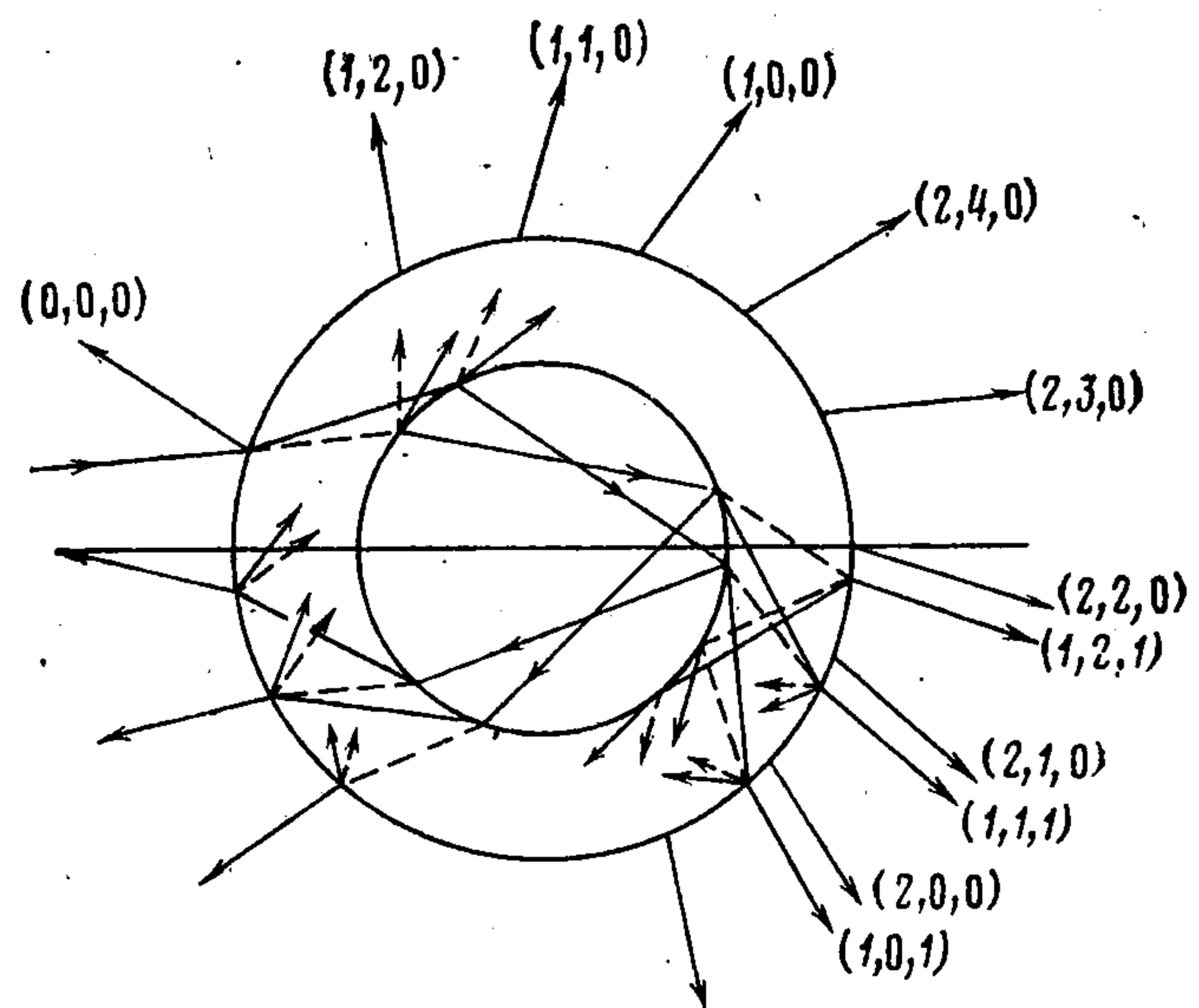
$$\times f(\tau - L_{nms}^+), \quad N_{nms}^{\circ} = N_{nms}(\omega_0)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При этом  $N_{nms}(\omega) \equiv N = v/\omega = \sin \gamma$  — действительные решения уравнения седловой точки [16]

$$(3.3) \quad \theta_{nms} = 2\gamma - \kappa_0 - \kappa_1 - (2n - m)(\gamma_L - \bar{\gamma}_L) - m(\gamma_T - \bar{\gamma}_T) -$$

$$- 2s\bar{\gamma}_F + \frac{\pi}{2} \{mU(1 - \beta_T N) + (2n - m)[U(1 - \beta_L N) -$$

$$- U(\epsilon - \beta_L N)] + (2s - m)U(\epsilon - \beta_T N)\}$$

$$\sin \gamma = r \sin \kappa_1 = l_0 \sin \kappa_0 = \beta_A^{-1} \sin \gamma_A =$$

$$= \epsilon \beta_B^{-1} \sin \bar{\gamma}_B \quad (A = L, T; B = L, T, F)$$

$$(3.4) \quad S_{nms} = \frac{1}{\cos \kappa_0 \cos \kappa_1} \left( \frac{\sin \gamma}{\sin \theta |L_{nms}^-|} \right)^{1/2} \exp\left(i \frac{\pi}{4} f_{nms}^{\circ}\right)$$

$$L_{nms}^{\pm} = (l_0 \cos \kappa_0)^{\alpha} + (r \cos \kappa_1)^{\alpha} - 2(\cos \gamma)^{\alpha} + (2n - m)[(\beta_L^{-1} \cos \gamma_L)^{\alpha} -$$

$$- (\epsilon \beta_L^{-1} \cos \bar{\gamma}_L)^{\alpha}] + m[(\beta_T^{-1} \cos \gamma_T)^{\alpha} - (\epsilon \beta_T^{-1} \cos \bar{\gamma}_T)^{\alpha}] +$$

$$+ 2s(\epsilon \beta_F^{-1} \cos \bar{\gamma}_F)^{\alpha}, \quad \alpha = \pm 1/2$$

$$f_{nms}^{\circ} = -3 + \text{sign}(L_{nms}^-) + f_{nms}^1$$

$$f_{nms}^1 = m[U(N\beta_L - 1)U(\beta_T - \epsilon\beta_L) + U(N\beta_T - \epsilon) \times$$

$$\times U(\epsilon\beta_L - \beta_T) - U(N\beta_T - 1)] + 2[nU(\beta_T - \epsilon\beta_L) +$$

$$\begin{aligned}
& + sU (\varepsilon\beta_L - \beta_T) [U (N\beta_T - \varepsilon) - U (N\beta_L - 1)] + \\
& + (2n - m - 2s) [U (N\beta_L - \varepsilon) - U (N\beta_T - \varepsilon) U (\beta_T - \\
& - \varepsilon\beta_L) - U (N\beta_L - 1) U (\varepsilon\beta_L - \beta_T)] - 2sU (\varepsilon - N\beta_T)
\end{aligned}$$

Здесь и ниже  $U(x)$  и  $U_{\pm}(x)$  — симметричные и асимметричные единичные функции.

Для функций  $R_{nms}$  имеем

$$(3.5) \quad R_{000} = R_{12}, \quad R_{nm0} = B_{nm}^{\circ}, \quad R_{nms} = -B_{nm}^s \quad (n, m, s \neq 0)$$

Коэффициент  $B_{nm}^{\circ}$  отвечает переотражению на поверхностях оболочки и преломлению обратно во внешнюю среду, а  $B_{nm}^s$  — прохождению в заполнитель, переотражению на поверхностях заполнителя и преломлению в акустическую внешнюю среду.

На фиг. 2—4 схематически изображена лучевая картина отражения, преломления и переотражения геометрических волн при разных углах падения звукового импульса на поверхность оболочки. Принятые обозначения соответствуют индексам  $(nms)$  амплитудных функций  $R_{nms}$  (3.5).

Для  $B_{nm}^{\circ}$ ,  $B_{nm}^s$ , как функций  $N_{nms}$ , получены следующие зависимости от коэффициентов отражения и прохождения в толще оболочки и заполнителя (2.10):

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad B_{nm}^{\circ} &= (e_L A_{n-1, m}^{\circ} + g A_{n-2, m-2}^{\circ})_{m \neq \{2n-1, 2n\}} + e_T A_{n-1, m-2}^{\circ} - \\
&- f (A_{n-1, m-1}^{\circ})_{m \neq 2n} \\
B_{nm}^s &= (\bar{h}_L W_{n-1, m}^s - \bar{j} W_{n-2, m-2}^s - \bar{n}_T W_{n-3, m-4}^s)_{m \neq \{2n-1, 2n\}} + \\
&+ \bar{h}_T W_{n-1, m-2}^s - \bar{n}_L (W_{n-3, m-2}^s)_{m \neq \{2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n\}} + \\
&+ (\bar{i} W_{n-1, m-1}^s + \bar{k}_T W_{n-2, m-3}^s)_{m \neq 2n} + (\bar{k}_L W_{n-2, m-1}^s + \\
&+ \bar{l} W_{n-3, m-3}^s)_{m \neq \{2n-2, 2n-1, 2n\}} \\
W_{nm}^s &= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{\kappa} A_{n-p, m-q}^{\circ} A_{pq}^{s-1-k} (-\bar{R}_{12})^k \\
\kappa &= \min \{m, 2p\}, \quad A_{2n, 2m}^s = C_{nm0}^{0s}, \quad A_{2n, 2m+1}^s = C_{nm0}^{1s} \\
A_{2n+1, 2m}^s &= \sum_{k=0}^s [(\bar{b}_L^{s-k} C_{nm1}^{0k} + \bar{c}^{s-k} C_{n, m-1, 1}^{1k})_{m \neq 2n+1} + \bar{b}_T^{s-k} C_{n, m-1, 1}^{0k}] \\
A_{2n+1, 2m+1}^s &= \sum_{k=0}^s [\bar{b}_L^{s-k} (C_{nm1}^{1k})_{m \neq 2n} + \bar{b}_T^{s-k} C_{n, m+1, 1}^{1k} + \bar{c}^{s-k} C_{nm1}^{0k}] \\
C_{nmj}^{ks} &= A_{nmj}^{ks} U_-(n - m - k) + B_{nmj}^{ks} U_+(n - m + k) \\
A_{nmj}^{ks} &= \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^{\alpha+k} \sum_{q=0}^{\kappa} C_{2n+\alpha-m+j}^{m+\alpha} C_{2n+2\alpha-2m}^{\alpha+\beta} C_{\alpha+\beta}^{2\beta-k} \Omega_{nm\alpha\beta q}^1 N_{s-q, q}, \\
B_{nmj}^{kw} &= \sum_{\alpha=k}^{2n-m} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\eta} C_{m+\alpha+j}^{2n+m-\alpha} C_{2m+2\alpha-2n}^{2m+\alpha+\beta-2n} C_{2m+\alpha+\beta-2n}^{2\beta-k} \Omega_{nm\alpha\beta q}^2 N_{s-q, q} \\
\kappa &= \min \{s, 2n + \alpha - m\}, \quad \eta = \min \{s, m + \alpha\}, \quad N_{0q} = 1 \\
N_{mq} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (kq - m + k) (-\bar{R}_{12})^k N_{m-k, q}, \quad m \geq 1 \\
\Omega_{nm\alpha\beta q}^j &= \sum_{i=1}^3 \sum_{q_i=q_{ij}}^{Q_{ij}} \prod_{s=1}^3 C_{p_{sj}}^{q_j} C_{p_{4j}}^{Q_s} b_s^{p_{sj}-q_s} d_1^{p_{4j}-Q_s} \bar{b}_s^{q_s} \bar{d}_2^{Q_s}, \quad Q_i = q - \sum_{j=1}^i q_j \\
q_{ij} &= \max \{0, Q_{i-1} - \sum_{s=i+1}^4 p_{sj}\}, \quad Q_{ij} = \max \{p_{ij}, Q_{i-1}\} \\
p_{11} &= p_{12} + a_{nm}, \quad p_{21} = p_{12} + k, \quad p_{31} = 2\beta - k, \quad p_{41} = m - \alpha \\
p_{12} &= \alpha - \beta, \quad p_{22} = p_{21} - a_{nm}, \quad p_{32} = p_{31}, \quad p_{42} = p_{41} + a_{nm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{nm} &= 2(n-m), \quad b_1 = a_L, \quad b_2 = a_T, \quad b_3 = -(b_{LT} + b_{TL}) \\
f &= f_{LT} + f_{TL}, \quad \bar{b}_1 = \bar{e}_L, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_T, \quad \bar{b}_3 = -(f_{LT} + f_{TL}) \\
\bar{b}_A^0 &= a_A, \quad \bar{c}^0 = b_3, \quad \bar{b}_A^m = (-\bar{R}_{12})^{m-1} \bar{e}_A \\
\bar{c}_A^m &= (-\bar{R}_{12})^{m-1} \bar{b}_3 \quad (m \geq 1), \quad \bar{i} = \bar{i}_{LT} + \bar{i}_{TL}, \quad \bar{l} = \bar{l}_{LT} + \bar{l}_{TL}
\end{aligned}$$

Здесь  $C_n^m$  — биномиальный коэффициент. Соотношения (3.2) — (3.4) при учете (2.10) позволяют в явном виде оценить амплитуды любого из геометрических эхо-импульсов, времена поступления к наблюдателю которых определяются из равенства  $\tau = L_{nms}^+ = \text{const}$  (3.4).

Автор благодарит Я. С. Подстригача и Н. Д. Векслера за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Метлов Л. С., Пономаренко В. Г. К определению звукового поля в слое. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1129—1132.
2. Поддубняк А. П. Отражение и преломление плоского звукового импульса на двухслойной акустической сфере. — В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Вып. 12. Киев: Наук. думка, 1980, с. 46—50.
3. Nussenzveig H. M. High-frequency scattering by a transparent sphere. I. Direct reflection and transmission. — J. Math. Phys., 1969, v. 10, No. 1, p. 82—124.
4. Brill D., Uberall H. Transmitted waves in the diffraction of sound from liquid cylinders. — J. Acoust. Soc. America, 1970, v. 47, No. 5, pt 2, p. 1467—1469.
5. Brill D., Uberall H. Acoustic waves transmitted through solid elastic cylinders. — J. Acoust. Soc. America, 1971, v. 50, No. 3, pt. 2, p. 921—939.
6. de Billy M., Welton P. J. Diffusion des ondes ultrasonores brèves par des cylindres élastiques. — Rev. SETHEDEC, 1979, v. 16, No. 60, p. 189—196.
7. Welton P. J., de Billy M., Hayman A., Quentin G. Backscattering of short ultrasonic pulses by solid elastic cylinders at large  $ka$ . — J. Acoust. Soc. America, 1980, v. 67, No. 2, p. 470—476.
8. Quentin G. J., de Billy M., Hayman A. Comparison of backscattering of short pulses by solid spheres and cylinders at large  $ka$ . — J. Acoust. Soc. America, 1981, v. 70, No. 3, p. 870—878.
9. Подстригач Я. С., Поддубняк А. П., Пырьев Ю. А., Пороховский В. В., Дзюбачик Н. И. Нестационарное взаимодействие звуковых импульсов с упругими сферическими объектами. — В кн.: Тезисы докл. Всес. конференции по теории упругости. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979, с. 280—282.
10. Векслер Н. Д. Рассеяние импульсов на упругих цилиндрах. Таллин: Валгус, 1980. 180 с.
11. Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. Т. 2. Таллин: Изд-е Ин-та кибернетики АН ЭССР, 1974. 345 с.
12. Хёна Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
13. Uberall H. Surface waves in acoustics. — In: Physical Acoustics. Principles and Methods. V. 10. N. Y. — L.: Acad. press, 1973, p. 1—60.
14. Nussenzveig H. M. High-frequency scattering by a transparent sphere. II. Theory of the rainbow and the glory. — J. Math. Phys., 1969, v. 10, No. 1, p. 125—176.
15. Nussenzveig H. M. The theory of the rainbow. — Scient. American, 1977, v. 236, No. 4, p. 116—127. — Рус. перев.: Успехи физ. наук, 1978, т. 125, № 3, с. 527—547.
16. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Львов

Поступила в редакцию  
29.VII.1982