Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 532.546

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Басак Н. К., Домбровский Г. А.

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости с предельным градиентом [1]. Вводится специальный нелинейный закон фильтрации, для которого основная система уравнений, полученная преобразованием годографа, имеет известное [2] общее решение, позволяющее эффективно применять аппарат теории функций комплексного переменного. В качестве частного случая предлагаемый закон содержит закон, рассмотренный в работе [3]. Приводятся решения задач о движении, создаваемом источником в полосе, и о движении от пары источник — сток.

1. Пусть x, y — прямоугольные декартовы координаты точки плоскости движения; $z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$; v — модуль вектора скорости фильтрации; θ — угол наклона вектора скорости фильтрации к оси x; $\varphi = -H + \mathrm{const}$, где H — напор, ψ — функция тока; $\Phi(v)$ — функция, характеризующая закон фильтрации [4].

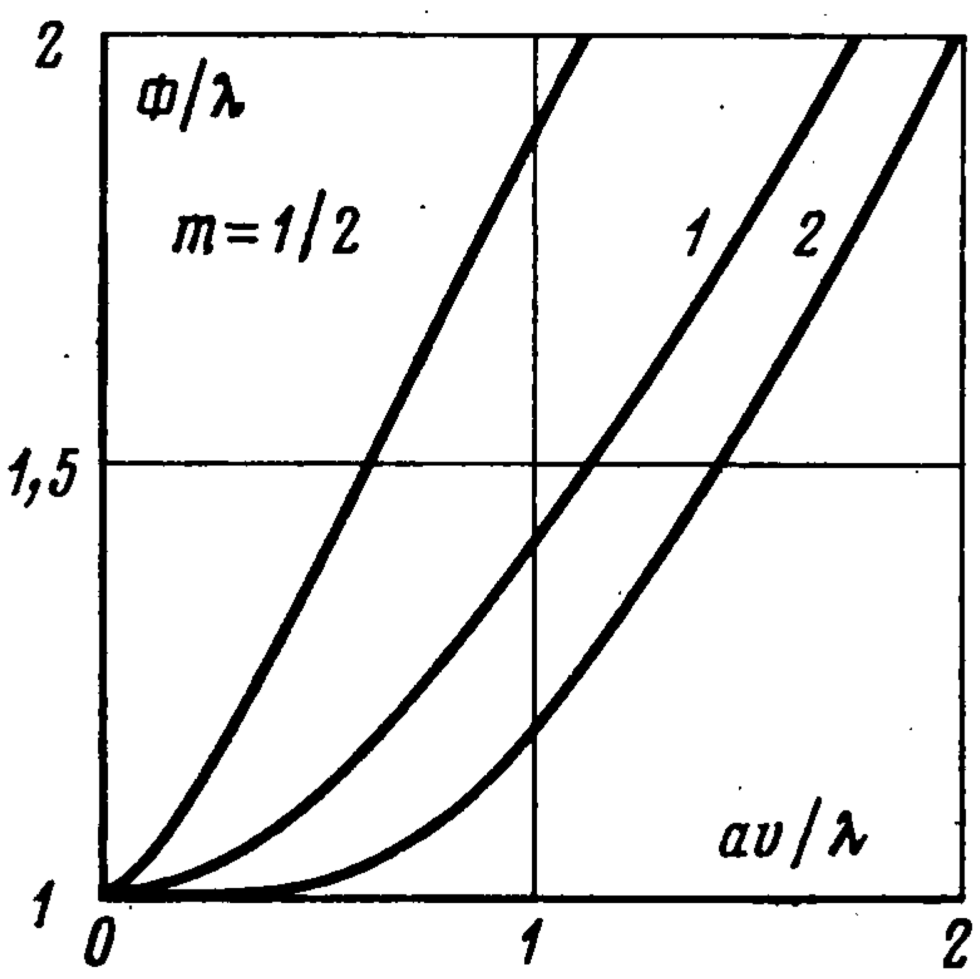
Смысл функций ψ и $\Phi(v)$ может быть выражен дифференциальным соотношением

$$dz = e^{i\theta}\left[\frac{d\varphi}{\Phi(v)} + \frac{id\psi}{v}\right] \tag{1.1}$$

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(v)$ параметрически (параметр σ, $\sigma \geqslant 0$) формулами

$$\Phi = \frac{\lambda m e^{\sigma}}{m + \operatorname{th} m\sigma}, \quad v = \frac{\lambda m}{a}\frac{e^{\sigma}}{m + \operatorname{cth} m\sigma} \tag{1.2}$$

где λ, m и a — произвольные положительные постоянные.



Фиг. 1

Полагая $\sigma = 0$, получаем $v = 0$, $\Phi = \lambda$. Имеем, следовательно, закон фильтрации с предельным градиентом. Если $\sigma \to \infty$, то $v \to \infty$, $\Phi \to \infty$. На фиг. 1 изображены, согласно формулам (1.2), зависимости Φ/λ от av/λ при разных m.

Случай $m = 1$, $a = 1$ был рассмотрен ранее [3]. В этом случае

$$\Phi(v) = (v^2 + \lambda^2)^{1/2} \tag{1.3}$$

Будем считать φ и ψ функциями переменных σ и θ. Из условия интегрируемости правой части дифференциального соотношения (1.1) следует основная линейная система

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = a \operatorname{cth}^2 m\sigma \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = -a \operatorname{cth}^2 m\sigma \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{1.4}$$

Общее решение этой системы можно представить в форме [2]

$$\begin{aligned} \varphi &= -a \operatorname{Re}[mF(\omega) - \operatorname{cth} m\sigma F'(\omega)] \\ \psi &= \operatorname{Im}[mF(\omega) - \operatorname{th} m\sigma F'(\omega)] \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $F(\omega)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\omega = \sigma + i\theta$.

Важным этапом при решении задач методом годографа является переход к физической плоскости движения. На основании (1.1), (1.2) и (1.5) получаем следующую удобную для применений формулу перехода [2] (C — произвольная постоянная):

$$\frac{\lambda}{a}\bar{z}=\frac{e^{-2\sigma}}{\operatorname{sh} 2m\sigma}\overline{e^{\omega}F'(\omega)}+\left(\frac{1}{m}+\operatorname{cth} 2m\sigma\right)e^{-\omega}F'(\omega)-\\ -\frac{m^2-1}{m}\int e^{-\omega}F'(\omega)\,d\omega+C \tag{1.6}$$

Обратим внимание на функцию $F(\omega)=R\operatorname{ch} m\omega$, где R — действительная постоянная. Если $F(\omega)=R\operatorname{ch} m\omega$, то, согласно (1.5) и (1.6), $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$, $z\equiv \mathrm{const}$. Эта функция может оказаться полезной при построении решений конкретных краевых задач.

2. Ниже приводится для закона (1.2) решение задачи об источнике в полосе с непроницаемыми границами. Решение этой задачи для закона

$$\Phi(v)=v+\lambda,\quad \lambda=\mathrm{const} \tag{2.1}$$

дано в [5] (см. также [1]). В работе [3] решение получено при $m=1$, $a=1$ (закон (1.3)).

Пусть полоса шириной $2l$ ограничена прямыми $x=l$ и $x=-l$. Источник интенсивности $4q$ находится в начале координат. Значение модуля скорости в бесконечно удаленных точках полосы обозначим v_1, соответствующее значение σ обозначим σ_1.

Достаточно исследовать только часть потока в первом квадранте. Этой части потока в плоскости ω соответствует полуполоса $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $\sigma\geqslant 0$. Граничное условие для функции $\psi(\sigma,\theta)$ будет следующим:

$$\psi(\sigma,0)=0\ (\sigma\geqslant 0),\quad \psi(0,\theta)=0\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$$
$$\psi(\sigma,\pi/2)=0\ (0\leqslant\sigma<\sigma_1),\quad \psi(\sigma,\pi/2)=q\ (\sigma>\sigma_1)$$

Решаем задачу методом аналитического продолжения [6]. Для этого разбиваем полуполосу $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $\sigma\geqslant 0$ отрезком прямой $\sigma=\sigma_1$ на две подобласти: бесконечную и конечную. В первой подобласти функцию $F(\omega)$ представляем в виде

$$F_1(\omega)=\frac{2q}{\pi}\left(A+\frac{\omega}{m}-\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-2k\omega}\right) \tag{2.2}$$

во второй подобласти — в виде

$$F_2(\omega)=\frac{2q}{\pi}\left(B+R\operatorname{ch} m\omega+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\operatorname{ch} 2k\omega\right) \tag{2.3}$$

где A, B, R, A_k, B_k — действительные постоянные ($k=1,2,\ldots$).

Граничное условие для функции $\psi(\sigma,\theta)$ при этом удовлетворяется. Применяя на линии $\sigma=\sigma_1$ условие аналитического продолжения функции $\psi(\sigma,\theta)$, находим

$$A_k=\frac{(-1)^k}{2k\operatorname{sh} m\sigma_1}\left[\frac{\operatorname{sh}(2k+m)\sigma_1}{2k+m}+\frac{\operatorname{sh}(2k-m)\sigma_1}{2k-m}\right] \tag{2.4}$$

$$B_k=\frac{(-1)^k e^{-2k\sigma_1}}{2k\operatorname{sh} m\sigma_1}\left[\frac{e^{-m\sigma_1}}{2k+m}+\frac{e^{m\sigma_1}}{2k-m}\right] \tag{2.5}$$

Этот результат позволяет просуммировать ряды, входящие в выражения для $F_1'(\omega)$ и $F_2'(\omega)$. Если положить

$$R=\frac{\pi\operatorname{cosec}(m\pi/2)}{2m\operatorname{sh} m\sigma_1} \tag{2.6}$$

то придем к единому для всей полуполосы виду решения

$$F(\omega)=\frac{2q}{\pi}\int_{0}^{\omega}\left[\frac{1}{m}+I_1(\omega)+I_2(\omega)\right]d\omega \tag{2.7}$$

$$I_1(\omega)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,m\sigma_1}\int_{\omega+\sigma_1}^{\omega-\sigma_1}\frac{e^{m(\omega-t)}}{1+e^{2t}}\,dt$$

$$I_2(\omega)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,m\sigma_1}\int_{\omega+\sigma_1}^{\omega-\sigma_1}\frac{e^{m(t-\omega)}}{1+e^{2t}}\,dt$$

Отметим, что при рациональном m интегралы, входящие в выражения для $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$, могут быть представлены в виде конечных комбинаций элементарных функций.

При помощи формулы (1.6) после интегрирования и преобразований получаем следующую связь между координатами соответствующих точек плоскости ω и плоскости z:

$$\frac{\pi\lambda m\bar{z}}{2qa}=G(\sigma,\theta)e^{-\omega}-me^{-\omega}+(m+\mathrm{cth}\,m\sigma_1)e^{-\sigma_1}\,\mathrm{arc\,tg}\,e^{\sigma_1-\omega}+ + (m-\mathrm{cth}\,m\sigma_1)e^{\sigma_1}\,\mathrm{arctg}\,e^{-\sigma_1-\omega} \tag{2.8}$$

$$G(\sigma,\theta)=\frac{m}{\mathrm{sh}\,2m\sigma}\left[\overline{I_1(\omega)}+\overline{I_2(\omega)}+e^{-2m\sigma}I_1(\omega)+e^{2m\sigma}I_2(\omega)+ +\frac{2}{m}\mathrm{ch}^2 m\sigma\right] \tag{2.9}$$

Постоянная C определена из условия $\bar{z}=0$ при $\sigma=\infty$. При этом использованы равенства

$$\lim_{\sigma\to\infty}I_1(\sigma)=0,\quad \lim_{\sigma\to\infty}I_2(\sigma)=0$$

которые можно получить в результате применения обобщенной интегральной теоремы о среднем.

Найдем уравнение границы застойной зоны, для чего устремим в (2.8) σ к нулю. Функция в выражении (2.9), заключенная в квадратные скобки, при $\sigma=0$ обращается в нуль. Раскрывая в (2.9) неопределенность при $\sigma=0$, получаем

$$G(0,\theta)=\frac{1}{2}[I_1'(-i\theta)+I_2'(-i\theta)+I_1'(i\theta)+I_2'(i\theta)- -2mI_1(i\theta)+2mI_2(i\theta)]=\frac{\mathrm{sh}\,2\sigma_1}{\mathrm{th}\,m\sigma_1(\mathrm{ch}\,2\sigma_1+\cos 2\theta)} \tag{2.10}$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\mathrm{arc\,tg}\,e^{\sigma_1-i\theta}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,e^{-\sigma_1+i\theta} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{arc\,tg}\,e^{-\sigma_1+i\theta}=\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sh}\,\sigma_1}+\frac{i}{4}\ln\frac{\mathrm{ch}\,\sigma_1+\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\sigma_1-\sin\theta}$$

Учитывая (2.10) и (2.11), получаем уравнение границы застойной зоны в виде

$$z(\theta)=\frac{2qa}{\pi\lambda m}\left[\frac{\pi}{2}(m+\mathrm{cth}\,m\sigma_1)e^{-\sigma_1}+(m\,\mathrm{sh}\,\sigma_1-\mathrm{ch}\,\sigma_1\,\mathrm{cth}\,m\sigma_1)\times \times\mathrm{arctg}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sh}\,\sigma_1}+\left(\frac{\mathrm{sh}\,2\sigma_1\,\mathrm{cth}\,m\sigma_1}{\mathrm{ch}\,2\sigma_1+\cos 2\theta}-m\right)e^{i\theta}+ +\frac{i}{2}(m\,\mathrm{ch}\,\sigma_1-\mathrm{sh}\,\sigma_1\,\mathrm{cth}\,m\sigma_1)\ln\frac{\mathrm{ch}\,\sigma_1+\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\sigma_1-\sin\theta}\right] \tag{2.12}$$

Оказалось, таким образом, возможным записать уравнение границы застойной зоны при помощи элементарных функций для любого m.

В предельном случае $\sigma_1 = 0$ ($v_1 = 0$, $l = \infty$) будем иметь

$$z(\theta) = \frac{2qa}{\pi\lambda m}\left[\frac{\pi}{2}\left(m-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m\cos\theta}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-m^2\cos^2\theta}{m\cos^2\theta}e^{i\theta}+\frac{i}{2}\left(m-\frac{1}{m}\right)\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right] \tag{2.13}$$

Если положить $m = 1$, $a = 1$, то из (2.12) и (2.13) получим формулы работы [3].

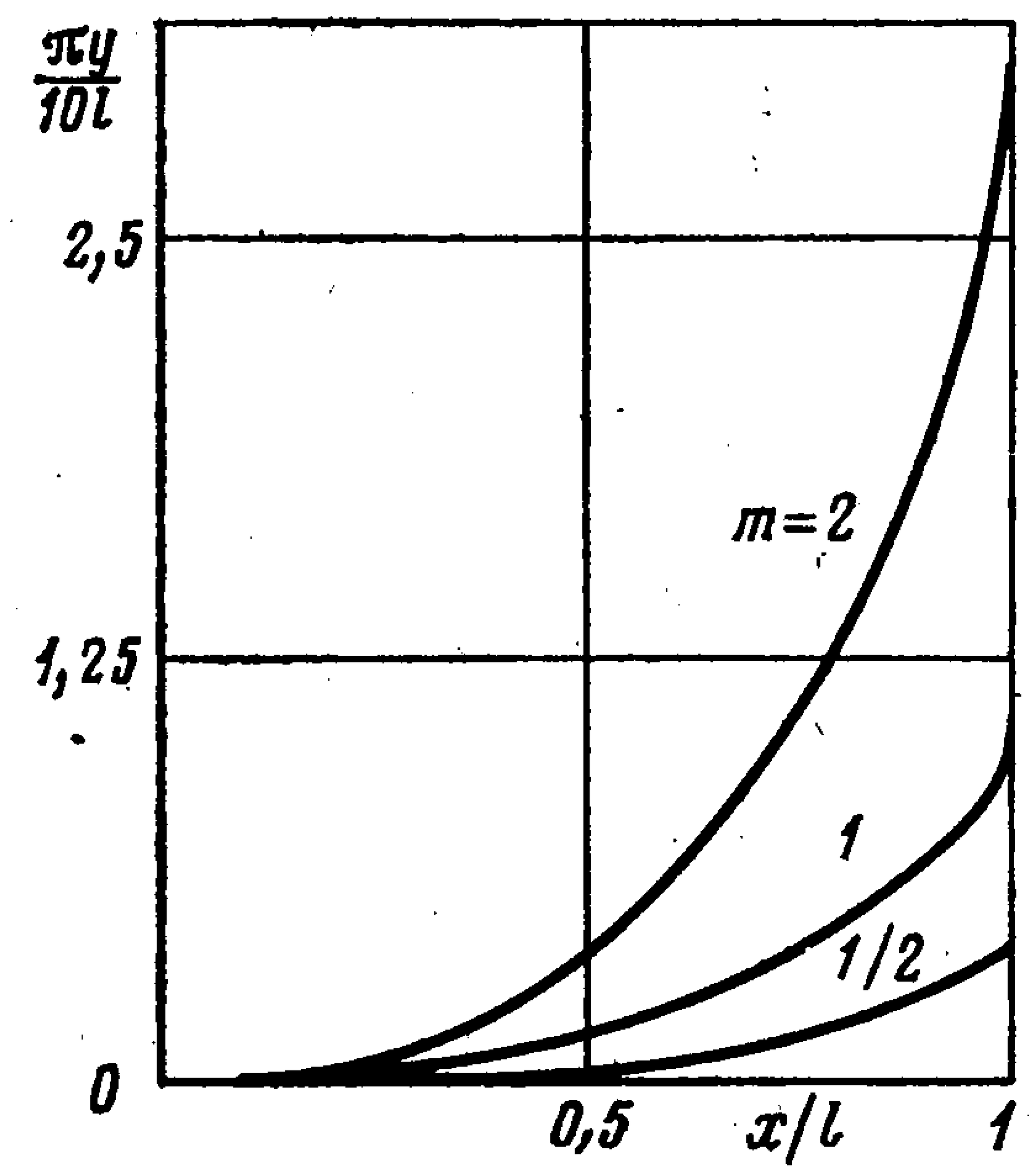
Проведен расчет по формуле (2.12) с привлечением равенства

$$\frac{qa}{\lambda m} = \frac{le^{\sigma_1}}{m + \operatorname{cth} m\sigma_1}$$

которое следует из очевидного равенства $q = lv_1$. При проведении расчета был введен параметр

$$b = \frac{av_1}{\lambda} = \frac{me^{\sigma_1}}{m + \operatorname{cth} m\sigma_1}$$

На фиг. 2 представлены результаты расчета при $b = 0{,}2$ и разных m. Характер исходного закона фильтрации, как видно из приведенных результатов, заметным образом влияет на размеры застойной зоны.



Фиг. 2

3. Приложим теперь предлагаемый закон фильтрации к решению задачи о движении, создаваемом парой источник — сток. Приближенное решение этой задачи для закона (2.1) дано в работе [7] (см. также [1]). Задача рассматривалась также в предположении, что функция $\Phi(v)$ имеет вид (1.3) [1]. Избранный при этом путь решения отличается от принятого в данной статье.

Пусть источник интенсивности $2q$ находится в точке с координатами $x = l$, $y = 0$, сток такой же интенсивности — в точке с координатами $x = -l$, $y = 0$ ($l > 0$). Скорость в начале координат обозначим v_0, соответствующее значение σ обозначим σ_0.

Движению в первом квадранте плоскости z соответствует в плоскости ω полуполоса $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\sigma \geqslant 0$. На границе этой полуполосы имеем следующее условие:

$$\psi(\sigma, 0) = 0\ (\sigma \geqslant 0),\ \psi(0, \theta) = 0\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$
$$\varphi(\sigma, \pi) = \text{const}\ (0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0),\ \psi(\sigma, \pi) = q\ (\sigma \geqslant \sigma_0)$$

Решение системы (1.4) возьмем в форме

$$\varphi = -a\operatorname{Re}\left[m\int_0^\omega W(\omega)\,d\omega - \operatorname{cth} m\sigma W(\omega)\right] \tag{3.1}$$
$$\psi = \operatorname{Im}\left[m\int_0^\omega W(\omega)\,d\omega - \operatorname{th} m\sigma W(\omega)\right]$$

где $W(\omega)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного ω, $W(\omega) = F'(\omega)$.

[1] *Панько С. В.* О некоторых плоских стационарных задачах фильтрации с предельным градиентом: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Томск: Томский гос. ун-т, 1975. 9 с.

Три первых равенства записанного граничного условия выполняются, если функция $W(\omega)$ удовлетворяет следующему граничному условию: $\operatorname{Im} W = 0$ при $\theta = 0$, $\sigma \geqslant 0$; $\operatorname{Re} W = 0$ при $\sigma = 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\operatorname{Re} W = R \operatorname{sh} m\sigma$ при $\theta = \pi$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$, где R — произвольная постоянная; $\operatorname{Im} W = 0$ при $\theta = \pi$, $\sigma \geqslant \sigma_0$. При этом на части границы $\theta = \pi$, $\sigma \geqslant \sigma_0$ функция ψ принимает некоторое постоянное значение. Как будет показано ниже, постоянная R может быть определена так, чтобы на этой части границы функция ψ принимала требуемое значение q.

При помощи функции $\zeta = \operatorname{ch} \omega$ отобразим полуполосу $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\sigma \geqslant 0$ на верхнюю полуплоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. На границе $\eta = 0$ будем иметь условие:

$$\operatorname{Im} W = 0 \ (\xi \geqslant 1), \quad \operatorname{Re} W = 0 \ (-1 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

$$\operatorname{Re} W = R \operatorname{sh} (m \operatorname{Arch} (-\xi)) \ (-\operatorname{ch} \sigma_0 \leqslant \xi \leqslant -1)$$

$$\operatorname{Im} W = 0 \ (\xi \leqslant -\operatorname{ch} \sigma_0)$$

Применяя формулу Келдыша — Седова [8, 9], получаем

$$W(\zeta) = \frac{1}{f(\zeta)} \left[\frac{R}{\pi i} \int\limits_{-\operatorname{ch}\sigma_0}^{-1} \frac{u(t) f(t)}{t - \zeta} dt + W(\infty) \right] \tag{3.2}$$

$$u(t) = \operatorname{sh}(m \operatorname{Arch}(-t)), \qquad f(t) = \left(\frac{t-1}{t + \operatorname{ch} \sigma_0} \right)^{1/2}$$

Постоянную $W(\infty)$ определяем из условия

$$\frac{R}{\pi i} \int\limits_{-\operatorname{ch}\sigma_0}^{-1} \frac{u(t) f(t)}{t - 1} dt + W(\infty) = 0 \tag{3.3}$$

Приходим к следующему выражению для функции $W(\omega)$:

$$W(\omega) = R \left(\frac{\operatorname{ch} \omega + \operatorname{ch}\sigma_0}{\operatorname{ch}\omega - 1} \right)^{1/2} [J(\omega) - J(0)] \tag{3.4}$$

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\operatorname{ch}\sigma_0}^{-1} \frac{u(t) f(t)}{t - \operatorname{ch} \omega} dt$$

Пусть σ_* — некоторое фиксированное значение σ, причем $\sigma_* > \sigma_0$. Пользуясь второй из формул (3.1), получаем

$$\operatorname{Im} \left(\int\limits_{\sigma_*}^{\sigma_* + \pi i} W(\omega) \, d\omega \right) = \frac{q}{m}$$

где в качестве пути интегрирования удобно принять отрезок прямой $\sigma = \sigma_*$. В пределе при $\sigma_* \to \infty$ приходим к равенству

$$-\pi R J(0) = q/m$$

откуда и определяется требуемое значение $R = R_m$.

Если m — целое число, то функция $W(\omega)$ может быть выражена в явном виде через элементарные функции

$$W(\omega) = W_1(\omega) - R_1 \operatorname{sh} \omega, \qquad W_1(\omega) = 2R_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\omega}{2} \right) \varkappa(\omega)$$

$$\varkappa(\omega) = \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\sigma_0}{2} \right)^{1/2}, \qquad R_1 = \frac{2q}{\pi (\operatorname{ch} \sigma_0 - 1)}, \qquad m = 1$$

$$W(\omega) = W_2(\omega) - R_2 \operatorname{sh} 2\omega,$$

$$W_2(\omega) = 4R_2 \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\sigma_0}{2} - 2\operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{\omega}{2} \varkappa(\omega)$$

$$R_2 = \frac{2q}{\pi (1 + 3 \operatorname{ch} \sigma_0)(\operatorname{ch} \sigma_0 - 1)}, \qquad m = 2$$

Вторые члены в приведенных выражениях для $W(\omega)$ могут быть опущены. Функции $\varphi(\sigma, \theta)$, $\psi(\sigma, \theta)$, определяемые формулами (3.1), удовлетворяют требуемому граничному условию, если $W = W_1$ при $m = 1$ и $W = W_2$ при $m = 2$.

Рассмотрим случай $m = 1$. В этом случае формула перехода к физической плоскости приобретает весьма простой вид

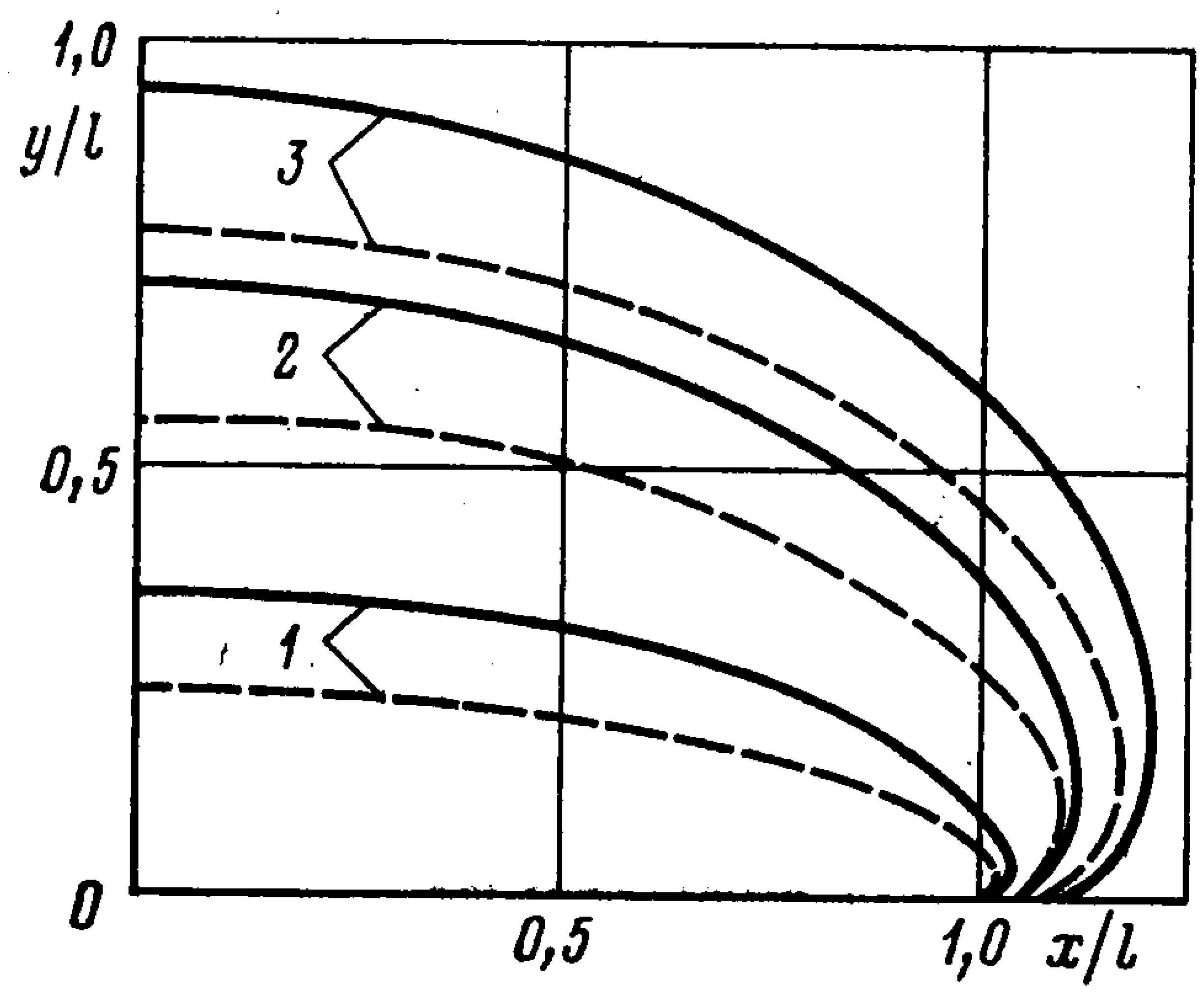
$$\frac{\lambda}{a}\bar{z} = \frac{e^{-\omega}}{\operatorname{sh} 2\sigma}\left[e^{2\sigma}W_1(\omega) + \overline{W_1(\omega)}\right] \tag{3.5}$$

(постоянная C определена из условия $\bar{z} = 0$ при $\omega = \sigma_0 + \pi i$).

Положим в этой формуле $\sigma = \infty$, $\bar{z} = l$. Приходим к равенству

$$\lambda l = R_1 a \tag{3.6}$$

из которого может быть определена зависимость σ_0 от параметра $b = aq/(\lambda l)$.



Фиг. 3

Переходя в (3.5) к пределу при $\sigma \to 0$ и пользуясь равенством (3.6), получаем уравнение границы застойной зоны

$$\frac{z(\theta)}{l} = \frac{e^{i\theta/2}}{4\varkappa(i\theta)}(\alpha_1\cos\theta - i\alpha_2\sin\theta + \alpha_3) \tag{3.7}$$

$$\alpha_1 = 3 - \operatorname{ch}\sigma_0, \quad \alpha_2 = 1 + \operatorname{ch}\sigma_0, \quad \alpha_3 = 3\operatorname{ch}\sigma_0 - 1$$

Аналогично можно рассмотреть случай $m = 2$. После вычисления интеграла в (1.6) и преобразований получаем

$$\frac{\lambda}{a}\bar{z} = \frac{e^{-\omega}}{\operatorname{sh} 4\sigma}\left[e^{4\sigma}W_2(\omega) + \overline{W_2(\omega)}\right] + \frac{R_2}{2}e^{-\omega/2}s(\omega)\varkappa(\omega) + 6R_2\beta_0 \times$$

$$\times \ln\frac{\operatorname{ch}(\omega/2) + \varkappa(\omega)}{\operatorname{th}(\sigma_0/2)\left[\operatorname{sh}(\omega/2) + \varkappa(\omega)\right]}$$

$$s(\omega) = 4e^{\omega} + 1 + 2\operatorname{ch}\sigma_0 - 3\operatorname{ch}^2\sigma_0, \quad \beta_0 = \operatorname{sh}^2\frac{\sigma_0}{2}\operatorname{ch}^4\frac{\sigma_0}{2}$$

Связь между σ_0 и b при $m = 2$ устанавливается при помощи равенства

$$\lambda l = R_2 a\delta_0, \quad \delta_0 = 1 - 3\operatorname{sh}^4\frac{\sigma_0}{2} + 6\beta_0\ln\left(\operatorname{cth}\frac{\sigma_0}{2}\right)$$

Уравнение границы застойной зоны при $m = 2$ имеет вид

$$\frac{\delta_0 z(\theta)}{l} = 6\beta_0\ln\frac{\cos(\theta/2) + \varkappa(i\theta)}{\operatorname{sh}(\sigma_0/2)} + 6i\beta_0\operatorname{arctg}\frac{\sin(\theta/2)}{\varkappa(i\theta)} +$$

$$+ \frac{e^{i\theta/2}}{8\varkappa(i\theta)}(\beta_1\cos\theta + i\beta_2\sin\theta + \beta_3)$$

$$\beta_1 = 3 + 10\operatorname{ch}\sigma_0 - 9\operatorname{ch}^2\sigma_0, \quad \beta_2 = 1 - 2\operatorname{ch}\sigma_0 - 3\operatorname{ch}^2\sigma_0$$

$$\beta_3 = 1 + 9\operatorname{ch}^2\sigma_0 - 6\operatorname{ch}^3\sigma_0$$

На фиг. 3 показаны границы застойных зон, полученные при $m = 1$ (сплошные линии) и $m = 2$ (штриховые). Кривые *1—3* соответствуют значениям параметра $b = aq/(\lambda l)$, равным 0,1; 0,4 и 0,7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
2. *Домбровский Г. А.* Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа. М.: Наука, 1964. 158 с.
3. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4, с. 177—181.
4. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 33—52.
5. *Ентов В. М.* Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 487—492.
6. *Фалькович С. В.* К теории газовых струй.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 459—464.
7. *Ентов В. М.* О парных интегральных уравнениях, возникающих в задачах фильтрации с предельным градиентом.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 532—542.
8. *Келдыш М. В., Седов Л. И.* Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций.— Докл. АН СССР, 1937, т. 16, № 1, с. 7—10.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е, испр. М.: Наука, 1973. 736 с.

Харьков

Поступила в редакцию
30.III.1983