

УДК 531.38

БИФУРКАЦИИ СОВМЕСТНЫХ УРОВНЕЙ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В СЛУЧАЕ КОВАЛЕВСКОЙ

Харламов М. П.

Изучается структура интегральных многообразий задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской. Получено аналитическое описание бифуркационного множества, построены бифуркационные диаграммы. Для каждой связной компоненты дополнения к бифуркационному множеству в пространстве констант первых интегралов указано число двумерных торов, входящих в состав интегрального многообразия.

Исследованию решения задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки, найденного С. В. Ковалевской [1], посвящено много работ. Отметим лишь некоторые из них. Г. Г. Аппельрот [2] первым выделил четыре класса особых движений гироскопа Ковалевской. Более подробно особые движения изучены в [3], где дана геометрическая трактовка классов Аппельрота как отвечающих частям поверхности кратных корней многочлена Ковалевской в пространстве констант первых интегралов. В работах [4, 5] методом годографов полностью изучены движения, относящиеся к первому и второму классам, и так называемые особо замечательные движения третьего класса, в которых подвижный годограф угловой скорости тела — замкнутая кривая.

Классам Аппельрота в пространстве констант первых интегралов отвечает множество меры нуль. Остальные движения не были сколько-нибудь изучены. Лишь недавно [6] установлены их существенные качественные свойства. При этом предполагалась независимость на рассматриваемых движениях первых интегралов уравнений Эйлера — Пуассона. До сих пор, однако, не было известно, при каких именно значениях постоянных интегралов последние являются независимыми. Ниже доказывается, что случаям зависимости интегралов отвечают именно классы Аппельрота. Кроме того, изучение этого вопроса позволяет во всех случаях указать число связных компонент интегрального многообразия, каждая из которых в пространстве переменных Эйлера — Пуассона есть двумерный тор, несущий условно-периодические движения [7, 8]. Тот факт, что интегральные многообразия, не вырождающиеся при стремлении к нулю параметра Пуанкаре, состоят из двух торов, указан в [6].

Исследование интегральных многообразий — составная часть решения проблемы топологического анализа классических динамических систем, идейно восходящей к Пуанкаре и Биркгофу и в современных терминах сформулированной Смейлом [9].

Отметим, наконец, работу [10], где, с некоторыми неточностями, устраненными [11] при исследовании общих случаев, решена частная задача о бифуркациях интегралов энергии и площадей. Интеграл Ковалевской, а тем самым и полная интегрируемость системы, таким образом, игнорированы.

1. Пусть p, q, r — компоненты вектора ω угловой скорости, а v_1, v_2, v_3 — компоненты единичного вектора ν вертикали в триэдре, сопутствующем твердому телу. Подходящим выбором подвижных осей и единиц измерения приведем уравнения Эйлера — Пуассона в случае Ковалевской к виду

$$(1.1) \quad \begin{aligned} 2p' &= qr, & 2q' &= -(pr + v_3), & r' &= v_2 \\ v_1' &= rv_2 - qv_3, & v_2' &= pv_3 - rv_1, & v_3' &= qv_1 - pv_2 \end{aligned}$$

Их первые интегралы таковы:

$$(1.2) \quad 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2v_1 = 2h$$

$$(1.3) \quad 2(pv_1 + qv_2) + rv_3 = 2l$$

$$(1.4) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

$$(1.5) \quad (p^2 - q^2 + v_1)^2 + (2pq + v_2)^2 = k$$

Напомним суть классификации Аппельрота. Введем, следуя [1], переменные s_1, s_2 :

$$(1.6) \quad s_{1,2} = h + [R(x_1, x_2) \mp \sqrt{R(x_1)R(x_2)}]/(x_1 - x_2)^2$$

Здесь

$$(1.7) \quad x_1 = p + iq, \quad x_2 = p - iq$$

$$(1.8) \quad R(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + 2hx_1 x_2 + 2l(x_1 + x_2) + 1 - k$$

$$(1.9) \quad R(x) = -x^4 + 2hx^2 + 4lx + 1 - k$$

Зависимость переменных (1.6) от времени определяется уравнениями

$$(s_1 - s_2)^2 s_1'^2 = -2\Phi(s_1), \quad (s_1 - s_2)^2 s_2'^2 = -2\Phi(s_2)$$

$$\Phi(s) = (s - h + \sqrt{k})(s - h - \sqrt{k})\varphi(s)$$

$$\varphi(s) = s^3 - 2hs^2 + (h^2 + 1 - k)s - 2l^2$$

($\varphi(s)$ — резольвента Эйлера многочлена (1.9)).

Движения, отвечающие таким постоянным первым интегралов, при которых многочлен $\Phi(s)$ имеет кратный корень, Аппельрот назвал простейшими. Поверхность кратных корней в $\mathbb{R}^3(h, k, l)$ состоит из плоскости

$$(1.10) \quad k = 0$$

(первый класс простейших движений или класс Делоне), поверхности

$$(1.11) \quad k = (h - 2l^2)^2$$

(второй и третий классы простейших движений) и поверхности кратных корней резольвенты $\varphi(s)$, имеющей уравнение [3]

$$(1.12) \quad (1 - k)(h^2 + 1 - k)^2 - 2[9h(1 - k) + h^3]l^2 + 27l^4 = 0$$

(четвертый класс простейших движений). Поверхность (1.12) можно представить и в параметрической форме

$$(1.13) \quad h = s + \frac{l^2}{s^2}, \quad k = 1 - \frac{2l^2}{s} + \frac{l^4}{s^4}$$

или

$$(1.14) \quad h = (x^3 - l)/x, \quad k = 1 + 2lx + x^4$$

В записи (1.13) параметр s играет роль кратного корня $\varphi(s)$, а в записи (1.14) x — кратный корень исходного многочлена (1.9).

2. Вернемся к системе (1.2)–(1.5). При фиксированных k, h, l она определяет в $\mathbb{R}^6(\omega, \nu)$ поверхность $J_{k,h,l}$, инвариантную относительно фазового потока (1.1) и называемую интегральным многообразием. Перечислим некоторые известные факты в применении к рассматриваемой задаче.

Точка $(\omega, \nu) \in \mathbb{R}^6$ называется критической, если в этой точке ранг матрицы Якоби меньше четырех, т. е.

$$(2.1) \quad \text{rang} \begin{vmatrix} 2p & 2q & -1 & 0 & r & 0 \\ 2\nu_1 & 2\nu_2 & 2p & 2q & \nu_3 & r \\ 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & 0 & \nu_3 \\ 2(p\eta_1 + q\eta_2) & 2(p\eta_2 - q\eta_1) & \eta_1 & \eta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} < 4$$

$$(2.2) \quad \eta_1 = p^2 - q^2 + \nu_1, \quad \eta_2 = 2pq + \nu_2$$

Набор $(k, h, l) \in \mathbb{R}^3$ называют регулярным значением, если на соответствующей поверхности $J_{k,h,l}$ нет критических точек (в частности, если $J_{k,h,l} = \emptyset$). Набор (k, h, l) , не являющийся регулярным значением, есть

по определению критическое значение. Критические значения заполняют в \mathbb{R}^3 множество Σ , называемое бифуркационным.

Вследствие очевидной компактности множеств $J_{k,h,l}$ (что обеспечивается уже соотношениями (1.2), (1.4)), их дифференцируемый тип может измениться лишь при переходе через Σ . По теореме Лиувилля — Арнольда для $(k, h, l) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ множество $J_{k,h,l}$ — объединение конечного числа двумерных торов. Таким образом, для полного исследования интегральных многообразий достаточно построить множество Σ и установить число торов в каждой из связных компонент $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$.

Рассмотрим некоторые особые случаи. Пусть в соотношениях (1.2)–(1.5)

$$(2.3) \quad q = 0$$

Внесем значения h, l, k из (1.2), (1.3), (1.5) в многочлен (1.9) и его производную, полагая попутно $x = p$. Получим

$$(2.4) \quad R(p) = (pr + v_3)^2, \quad R'(p) = 2r(pr + v_3)$$

Заменим в матрице (2.1) последнюю строку на комбинацию строк с коэффициентами $p^2, p, 1, -1$ соответственно. После элементарных преобразований, сводящихся к сокращению общих множителей и перестановке строк и столбцов, приходим к условию

$$(2.5) \quad \text{rank} \begin{vmatrix} pr + v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(pr + v_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & p & r \\ r & 2p & v_2 & 0 & v_1 & v_3 \\ v_3 & v_1 & 0 & v_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} < 4$$

Равенство нулю определителя, составленного из первых столбцов, дает $(pr + v_3)v_2 = 0$. Если $pr + v_3 = 0$, то в силу (2.4) многочлен (1.9) имеет кратный корень и выполнено условие (1.14) с $x = p$. Пусть

$$(2.6) \quad v_2 = 0, \quad pr + v_3 \neq 0$$

Условие (2.5) примет вид $(p^2 + v_1)(2pv_3 - rv_1) = 0$. Случай $p^2 + v_1 = 0$ вместе с (2.3), (2.6) приводит к (1.10). Если же

$$(2.7) \quad 2pv_3 - rv_1 = 0$$

то из (1.4), (2.3), (2.6) находим $h - 2l^2 = -(p^2 + v_1)$, $k = (p^2 + v_1)^2$, откуда вытекает (1.11). Итак, все критические значения, достигаемые в случае (2.3), отвечают классам Анпельрота.

Исследуем еще одну возможность:

$$(2.8) \quad r = 0, \quad v_3 = 0, \quad q \neq 0$$

В матрице (2.1) последние два столбца нулевые. Приравняв нулю оставшийся определитель четвертого порядка, получаем $2(p^2 - q^2 + v_1)v_1v_2 - (2pq + v_2)(v_1^2 - v_2^2) = 0$, что позволяет ввести неопределенный множитель κ

$$(2.9) \quad p^2 - q^2 + v_1 = \kappa(v_1^2 - v_2^2), \quad 2pq + v_2 = 2\kappa v_1 v_2$$

Подстановка этих выражений в (1.5) с учетом (1.4) дает

$$(2.10) \quad \kappa = \pm \sqrt{k}$$

Из (1.4) и (2.9) находим

$$(2.11) \quad (p^2 + q^2)^2 = (\kappa v_1 - 1)^2 + \kappa^2 v_2^2$$

Систему (2.9) перепишем в виде

$$(\kappa v_1 - 1)(pv_1 + qv_2) + \kappa v_2(qv_1 - pv_2) = p(p^2 + q^2)$$

$$\kappa v_2(pv_1 + qv_2) - (\kappa v_1 - 1)(qv_1 - pv_2) = q(p^2 + q^2)$$

откуда, учитывая (2.11), получим

$$v_1 = \frac{p^2 - q^2 + \kappa}{\kappa^2 - (p^2 + q^2)^2}, \quad v_2 = \frac{2pq}{\kappa^2 - (p^2 + q^2)^2}$$

Найденные выражения вместе с (2.8) внесем в (1.2)–(1.4). Получим

$$(2.12) \quad h = p^2 + q^2 - \frac{p^2 - q^2 + \kappa}{\kappa^2 - (p^2 + q^2)^2}, \quad l = \frac{p}{\kappa - p^2 - q^2}$$

$$(p^2 + q^2)^4 - (1 + 2\kappa^2)(p^2 + q^2)^2 - 2\kappa(p^2 - q^2) - \kappa^2(1 - \kappa^2) = 0$$

откуда $h - 2l^2 + \kappa = 0$. Последнее в силу (2.10) приводит к соотношению (1.11). Таким образом, и при условии (2.8) критические значения отвечают классам Аппельрота.

Покажем, что в предположении

$$(2.13) \quad r^2 + v_3^2 \neq 0, \quad q \neq 0$$

новых критических значений система (1.2)–(1.5) не имеет.

Отметим вначале вытекающее из (1.2)–(1.5), (1.7), (1.8) тождество $R(x_1, x_2) = (pr + v_3)^2 + q^2 r^2$, так что при условии (2.13)

$$(2.14) \quad R(x_1, x_2) \neq 0, \quad x_1 \neq x_2$$

Введем в дополнение к (1.7) переменные [1] $\xi_1 = \eta_1 + i\eta_2$, $\xi_2 = \eta_1 - i\eta_2$. Согласно (2.2), они связаны невырожденным преобразованием с v_1, v_2 . Исключая из (1.2)–(1.5) величины r, v_3 , приходим к двум соотношениям [1]

$$(2.15) \quad \xi_1 \xi_2 = k$$

$$R(x_2) \xi_1 + R(x_1) \xi_2 + R_1(x_1, x_2) + (x_1 - x_2)^2 k = 0$$

где

$$(2.16) \quad R_1(x_1, x_2) = -2hx_1^2 x_2^2 - 4l(x_1 + x_2)x_1 x_2 - (1 - k)(x_1 + x_2)^2 + 2(1 - k)h - 4l^2$$

Первого неравенства (2.13) достаточно для того, чтобы условие (2.1) было равносильно системе, определяющей критические точки (2.15)

$$(2.17) \quad R(x_1) \xi_2 = R(x_2) \xi_1$$

$$(2.18) \quad R'(x_1) \xi_2 + \partial R_1(x_1, x_2)/\partial x_1 + 2(x_1 - x_2)k = 0$$

$$R'(x_2) \xi_1 + \partial R_1(x_1, x_2)/\partial x_2 - 2(x_1 - x_2)k = 0$$

Следуя [1], выразим ξ_1, ξ_2 из (2.15)

$$(2.19) \quad 2R(x_2) \xi_1 = -[R_1(x_1, x_2) + (x_1 - x_2)^2 k] + W(x_1, x_2)$$

$$2R(x_1) \xi_2 = -[R_1(x_1, x_2) + (x_1 - x_2)^2 k] - W(x_1, x_2)$$

$$(W(x_1, x_2) = \{[R_1(x_1, x_2) - (x_1 - x_2)^2 k]^2 - 4kR^2(x_1, x_2)\}^{1/2})$$

Условие (2.17) дает, таким образом, $W(x_1, x_2) = 0$. Принимая обозначение (2.10), получим

$$(2.20) \quad R_1(x_1, x_2) - (x_1 - x_2)^2 \kappa^2 = 2\kappa R(x_1, x_2)$$

Кроме того, подстановка ξ_1, ξ_2 из (2.19) в (2.18) дает

$$(2.21) \quad 2(1 - \kappa^2)^2 + 2(1 - \kappa^2)[h^2 - 1 + x_1^2 x_2^2 + 3l(x_1 + x_2)] + \\ + 2h^2 x_1^2 x_2^2 + h[-(x_1 + x_2)^2 + 4l(x_1 + x_2)x_1 x_2 - 4l^2] + \\ + (x_1^2 + x_2^2)x_1 x_2 + 2l(x_1^2 x_2^2 - 2)(x_1 + x_2) + 4l^2(x_1^2 + \\ + 3x_1 x_2 + x_2^2) = 0,$$

$$(2.22) \quad [R_1(x_1, x_2) - (x_1 - x_2)^2 \kappa^2] l + (x_1 + x_2 + 2lx_1 x_2) R(x_1, x_2) = 0$$

Из (2.20), (2.22) $[x_1 + x_2 + 2l(x_1 x_2 + \kappa)] R(x_1, x_2) = 0$, так что по предположению (2.14)

$$(2.23) \quad x_1 + x_2 = -2l(x_1 x_2 + \kappa)$$

Найденное выражение для $x_1 + x_2$ внесем в (2.21), (2.22). Получим

$$(\kappa - h + 2l^2)[4l^2(x_1 x_2 + \kappa)^2 - (h + \kappa)(x_1^2 x_2^2 + 1 - \kappa^2)] = 0 \\ (\kappa - h + 2l^2)[(x_1 x_2 + \kappa)^2 - 1] = 0$$

Отсюда либо $\kappa - h + 2l^2 = 0$, что вновь приводит к (1.13), либо $x_1 x_2 = \pm 1 - \kappa$, $x_1 + x_2 = \mp 2l$, $2l^2 = (h + \kappa)(1 \mp \kappa)$. В последнем случае непосредственная проверка дает $R(x_1, x_2) = 0$, а это противоречит (2.14). Тем самым доказано, что бифуркационное множество Σ представляет собой часть поверхности кратных корней многочлена $\Phi(s)$, отвечающую действительным решениям системы (1.2)–(1.5).

Отметим, что множество критических точек состоит из тех траекторий уравнений (1.1), которые в терминологии Апфельбота соответствуют особо замечательным движениям (одна из величин (1.6) остается в процессе движения постоянной).

3. Вид уравнений (1.11), (1.14) показывает, что удобно рассмотреть сечения $\Sigma_l \subset \mathbb{R}^2(k, h)$ множества Σ плоскостями $l = \text{const}$. Такой подход более экономичен и лучше отвечает цели настоящего исследования, чем метод, принятый в [3], где, например, изучаются решения уравнения (1.12) относительно l и проекции поверхности кратных корней на плоскости lh и lk . Поскольку $\Sigma_l = \Sigma_{-l}$, ограничимся случаем $l \geq 0$.

Уравнение (1.11) определяет на плоскости kh параболу с вершиной $(0, 2l^2)$.

Обратимся к кривой (1.12). При $l = 0$ она распадается на прямую $k = 1$ и параболу $k = 1 + h^2$. Если $l > 0$, воспользуемся записью (1.14). Исследуемая кривая имеет точку возврата $x = (-l/2)^{1/2}$, вертикальную асимптоту $k = 1$ ($x \rightarrow \pm 0, h \rightarrow \mp \infty$). При $x \rightarrow \pm \infty$ обе координаты k, h стремятся к $+\infty$ так, что точка $(k(x), h(x))$ асимптотически приближается к соответствующей из кривых $k = h^2 \pm 4l\sqrt{h} + 1$.

В общем случае кривая (1.14) имеет с параболой (1.11) две точки пересечения

$$(3.1) \quad (k, h) = ((l^2 + 1)^2, l^2 - 1), \quad x = l$$

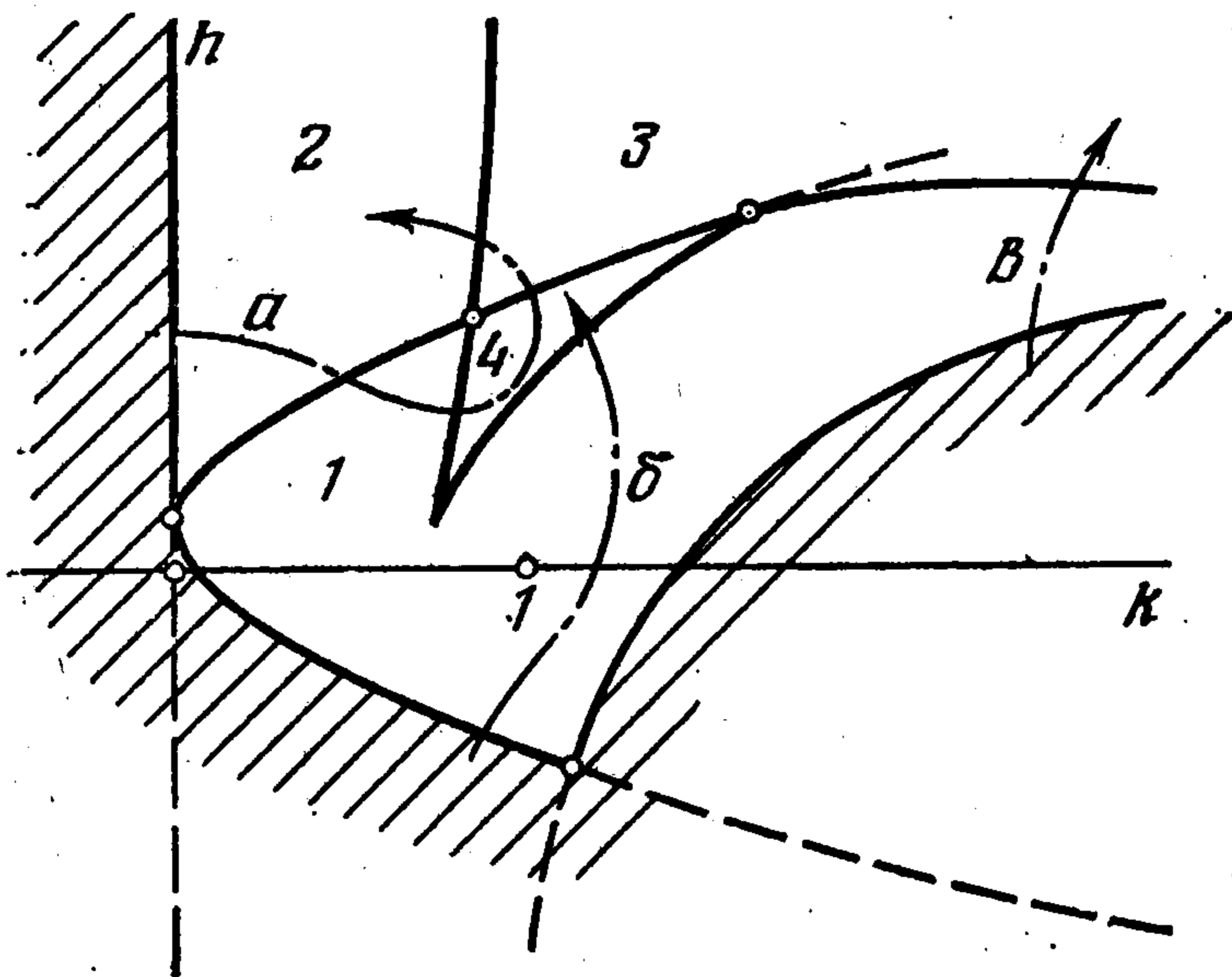
$$(3.2) \quad (k, h) = ((l^2 - 1)^2, l^2 + 1), \quad x = -l$$

и точку касания

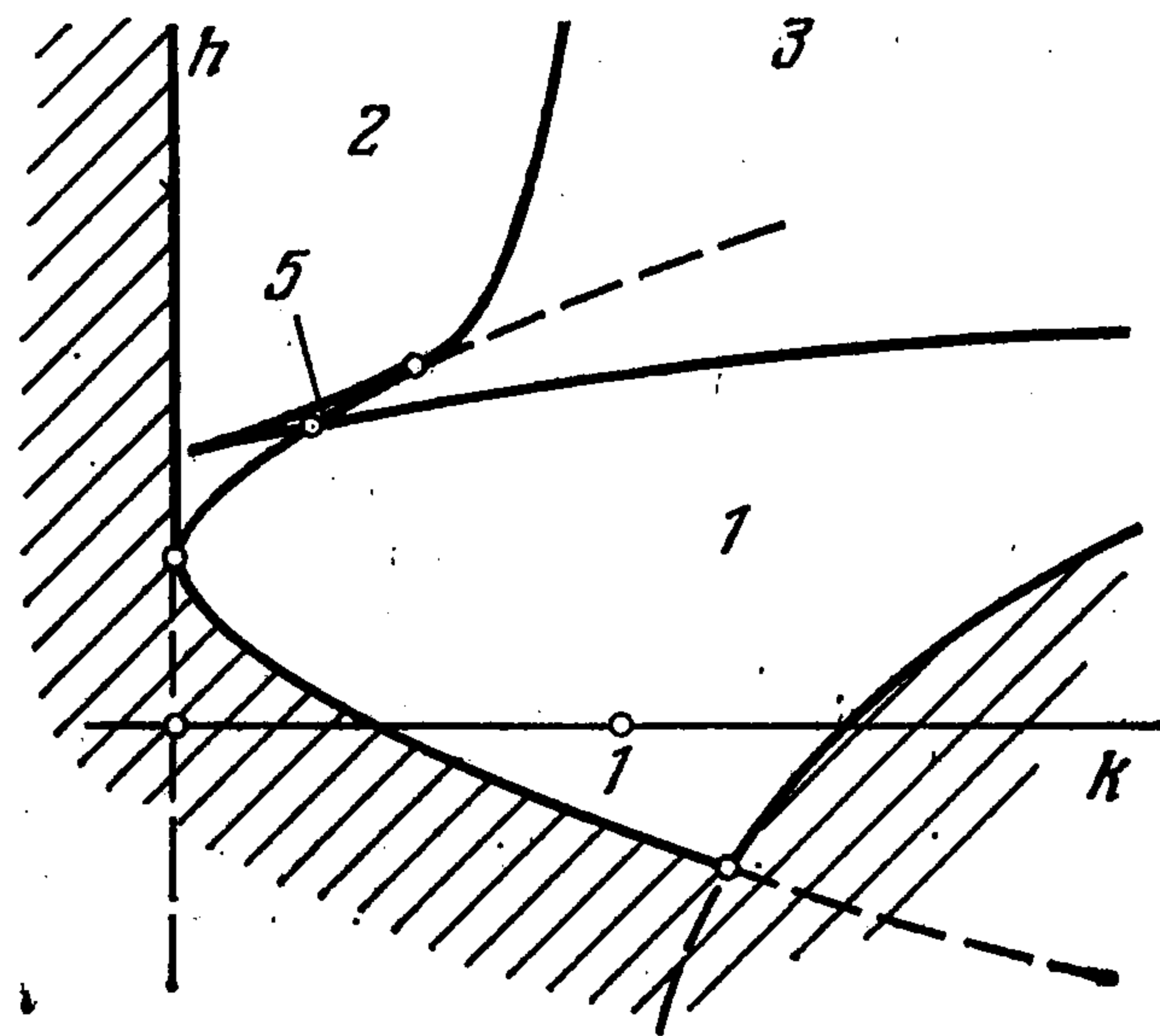
$$(3.3) \quad (k, h) = \left(\frac{1}{16l^4}, \frac{1}{4l^2} + 2l^2 \right), \quad x = -\frac{1}{2l}$$

Исключение составляет значение $l^2 = 1/2$, когда точки (3.2), (3.3) совпадают между собой и с точкой возврата. При $l^2 = 4/(3\sqrt{3})$ точка возврата попадает на ось $k = 0$ (являющуюся, очевидно, частью границы области существования движений). Еще одна особенность возникает при $l = 1$ — точка (3.1) переходит с одной ветви параболы (1.11) на другую.

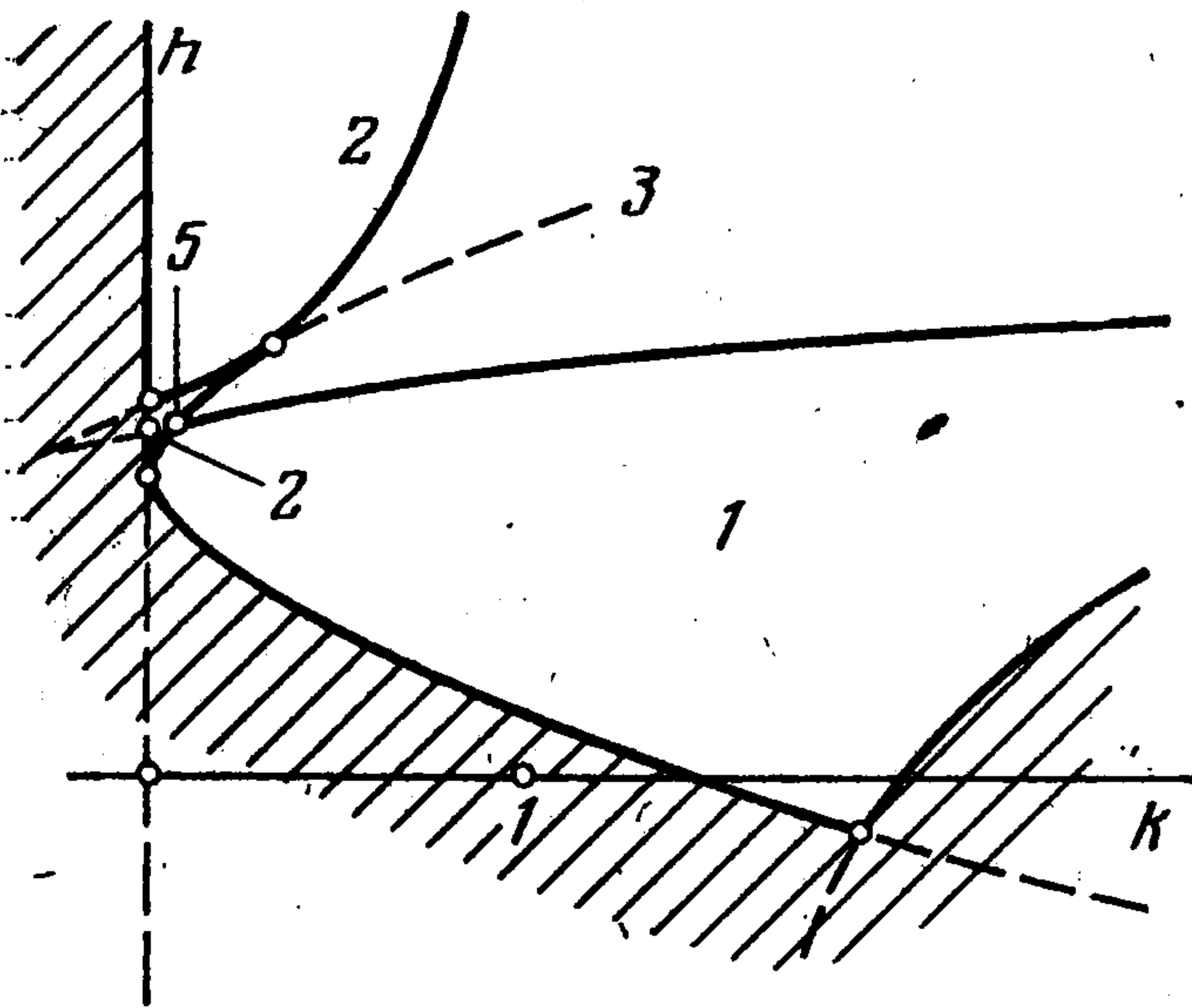
Интересно проследить трансформацию кривой (1.14) при $l \rightarrow 0$. Ветвь $-\infty < x < 0$ переходит в луч $\{k = 1, h \geq 0\}$ и верхнюю часть параболы $k = h^2 + 1$ ($h \geq 0$). Точка возврата, следовательно, попадает в точку $(1, 0)$. Ветвь $0 < x < +\infty$ «склеивается» с лучом $\{k = 1, h \leq 0\}$ и той же верхней половиной параболы $k = h^2 + 1$. Точка касания кривой (1.14) и параболы (1.11) при $l \rightarrow 0$ уходит в бесконечность.



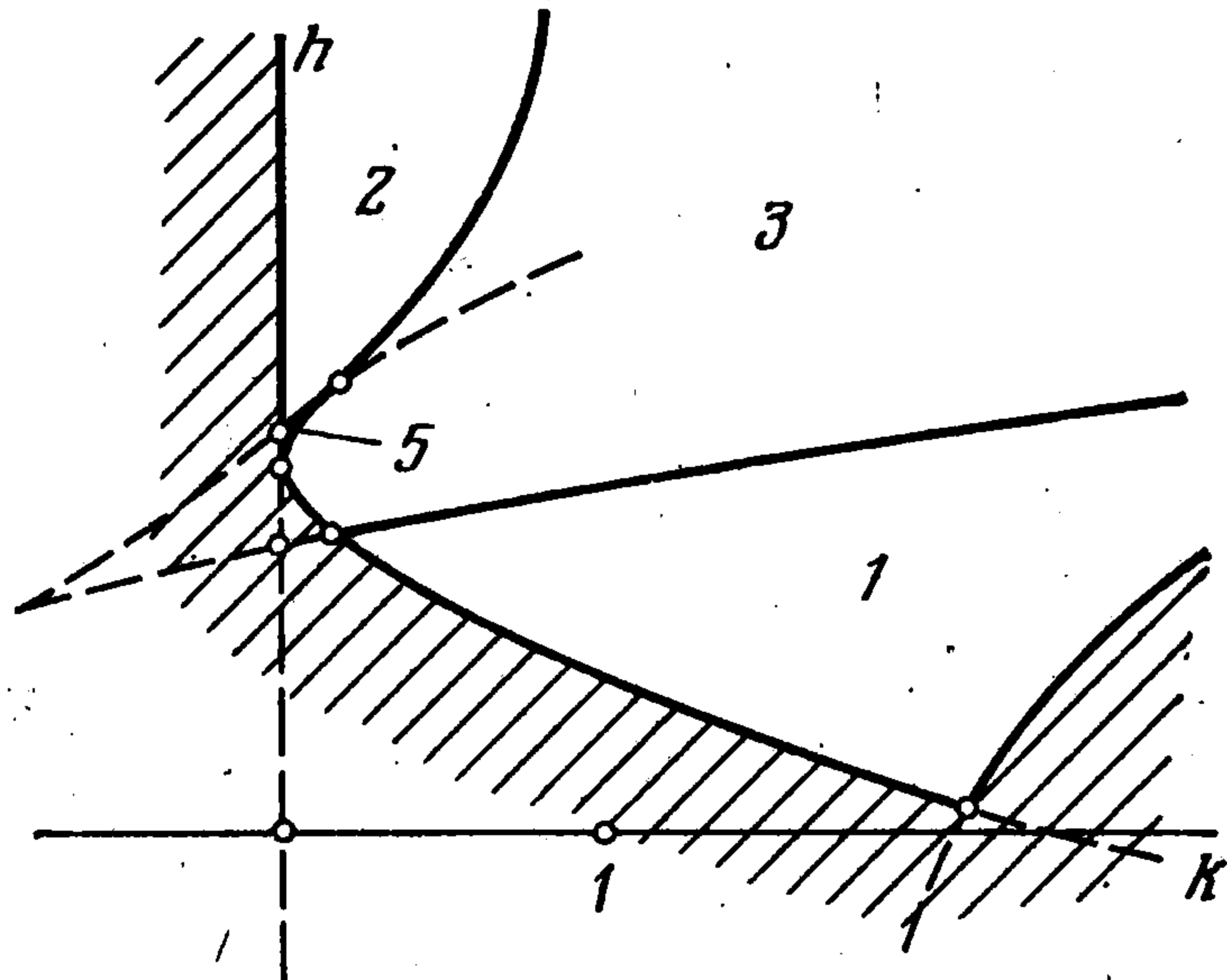
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1—4 указаны виды множеств Σ_l для следующих значений постоянной площадей: $0 < l^2 < 1/2$; $1/2 < l^2 < 4/(3\sqrt{3})$; $4/(3\sqrt{3}) < l^2 < 1$; $l^2 > 1$.

4. Как уже отмечалось, вид многообразия $J_{k, h, l}$ может измениться лишь при переходе точки (k, h, l) через критическое значение, т. е. по доказанному через множество (1.10) — (1.12). Следовательно, в заштрихованных областях плоскости kh , содержащих точки с $k < 0$ или $h < -1$, $J_{k, h, l} = \emptyset$.

Покажем, что в Σ_l не включается часть верхней ветви

$$(4.1) \quad h = 2l^2 + \sqrt{k}$$

параболы (1.11), лежащая правее точки (3.3) касания с кривой (1.14). Для этого достаточно доказать, что при условии (4.1) действительным критическим точкам отвечают значения

$$(4.2) \quad \sqrt{k} \leq 1 / (4l^2)$$

(этот факт соответствует утверждению [2, 3] об отсутствии в третьем классе при $\sqrt{k} > 1/(4l^2)$ особо замечательных движений).

Значения (4.1) достигаются, во-первых, если выполнены равенства (2.3), (2.6), (2.7)

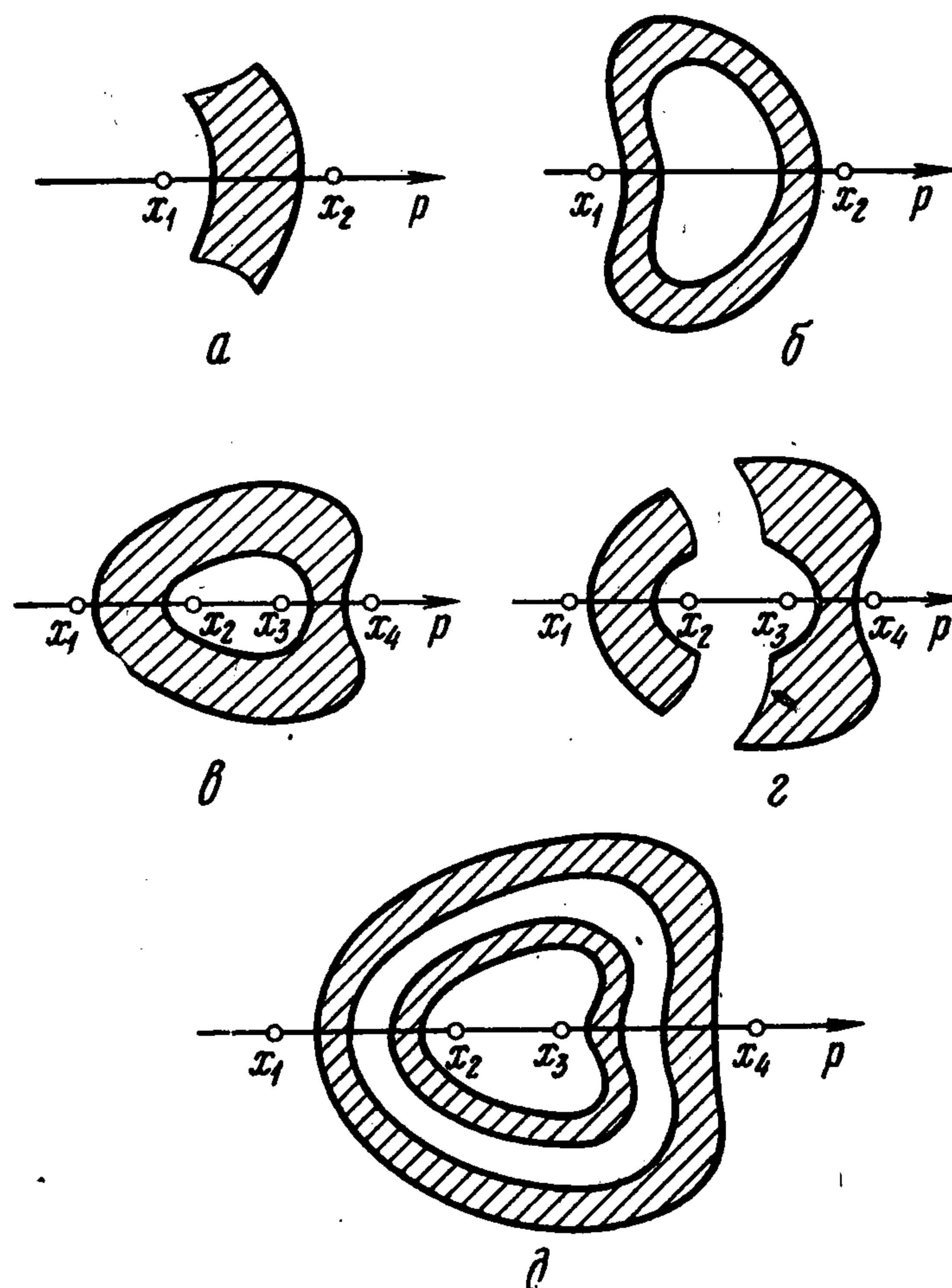
$$(4.3) \quad 2pv_3 - rv_1 = 0, \quad q = 0, \quad v_2 = 0$$

во-вторых, при условиях (2.12) с $\kappa = -\sqrt{k}$; в-третьих, в случае (2.23) с $\kappa = \sqrt{k}$.

Две последние возможности приводят к уравнению

$$(4.4) \quad l(p^2 + q^2) + p + l\sqrt{k} = 0$$

Оно имеет действительные решения относительно p, q тогда и только тогда, когда имеет действительные корни трехчлен $lp^2 + p + l\sqrt{k}$, что и приводит к неравенству (4.2).



Фиг. 5

Обратимся к случаю (4.3). Из (1.3) и первого уравнения (4.3) находим $v_1 = 4lp/(4p^2 + r^2)$, $v_3 = 2lr/(4p^2 + r^2)$. Подстановка в (1.4) дает $4p^2 + r^2 = 4l^2$, после чего соотношение (1.5) принимает вид (4.4). Итак, и здесь необходимо выполнение неравенства (4.2).

На фиг. 1—4 одинаковыми цифрами занумерованы области, объединение которых в $\mathbb{R}^3(k, h, l)$ дает связную компоненту $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$. Таким образом, имеется пять компонент, в которых интегральные многообразия не пусты. Чтобы установить число торов, входящих в $J_{k, h, l}$, рассмотрим образ последнего на плоскости pq , названный в [2] областью действительных движений. Нетрудно установить связь между подобластями 1—5 в $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ и случаями, рассмотренными в [2]. В результате для подобластей 1—5 получаем проекции на плоскость pq , указанные соответственно на фиг. 5, а — д (ось q вертикальна, x_i — вещественные корни многочлена $R(x)$).

Установим число прообразов каждой внутренней точки заштрихованных множеств. Поскольку все они имеют выход на ось p , достаточно сделать это при $q=0$. Имеем из (1.2)–(1.5) с учетом обозначений (1.8), (2.16)

$$(4.5) \quad v_1 = p^2 + \frac{1}{2} r^2 - h, \quad r v_3 = -pr^2 + 2(l + hp - p^3)$$

$$4R(p)r^2 = [R'(p)]^2, \quad 4R^2(p)v_2^2 = 4kR^2(p) - R_1^2(p, p)$$

Во внутренних точках отрезков, по которым область действительных движений пересекается с осью p , система (4.5) имеет четыре решения относительно p, q, r, v_1, v_2, v_3 . Таким образом, в каждую внутреннюю точку областей, указанных на фиг. 5, проектируется четыре точки интегрального многообразия. Следовательно, в область, диффеоморфную кольцу, отображаются два интегральных тора, а в область, диффеоморфную прямоугольнику, — один. Окончательно, в компоненте 1 множества $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ интегральное многообразие состоит из одного двумерного тора, в компонентах 2–4 из двух, а в компоненте 5 из четырех двумерных торов.

Характер бифуркаций установим анализом областей действительных движений в точках Σ (их внешние контуры приведены в [3]) и возможных изменений в этих областях числа прообразов при проектировании на плоскость pq интегральной поверхности, не являющейся в этом случае гладким многообразием (подробности метода изложены в [12]).

Введем следующие обозначения: S — множество, гомеоморфное окружности; $V = S \vee S$ — «восьмерка»; W — множество, гомеоморфное пересечению двумерной сферы с парой плоскостей, проходящих через ее центр; P — косое произведение окружности на восьмерку (получается из $[0, 1] \times \times V$ отождествлением $\{0\} \times V$ с $\{1\} \times V$ по отображению, гомотопному центральной симметрии восьмерки); $Q = W \times S$; $U = V \times S$.

Пусть γ — граница ε -окрестности поверхности P , вложенной в \mathbb{R}^3 . Тогда, очевидно, $\gamma = 2T^2$. Можно представить себе однопараметрическое семейство поверхностей P_τ , $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, такое, что $P_\tau = T^2$ при $\tau \neq 0$ и $P_0 = P$. Происходящей при изменении параметра τ перестройке $T^2 \rightarrow \rightarrow P \rightarrow T^2$ присвоим тип (1, 1). Аналогично определяются перестройки типа (2, 2): $2T^2 \rightarrow Q \rightarrow 2T^2$; (1, 2): $T^2 \rightarrow U \rightarrow 2T^2$; (0, 1): $\emptyset \rightarrow S \rightarrow T^2$. Две последние перестройки, происходящие в обратном порядке, обозначим соответственно символами (2, 1) и (1, 0). Запись (1 : 1) будет означать непрерывную деформацию связной компоненты интегрального многообразия, на которой не возникает критических точек. Символы одновременно происходящих перестроек будем соединять знаком плюс или указывать целочисленный множитель, если они одинаковы.

Перечислим теперь последовательности бифуркаций, имеющих место вдоль штрихпунктирных стрелок на фиг. 1: а) 2 (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), 2 (1, 1); б) (0, 1), (1 : 1) + (0, 1); в) (0, 1), (1, 2). Переход из компоненты 2 в компоненту 5 сверху (фиг. 3) сопровождается бифуркацией 2 (1 : 1) + 2 (0, 1), снизу — 2 (1, 2). При переходе из компоненты 5 в 3 происходит бифуркация 2 (2, 1), а при выходе из компоненты 5 в область $k < 0$ — бифуркация 4 (1, 0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. — В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 11—49.
2. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. — В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61—155.
3. Ипатов А. Ф. Движение гироскопа С. В. Ковалевской на границе области ультраэллиптичности. — Уч. зап. Петрозаводск. ун-та. Матем. н., 1970, т. 18, вып. 2, с. 6—93.
4. Харламов П. В., Мозалевская Г. В. Геометрическое истолкование некоторых движений гироскопа С. В. Ковалевской. — В кн.: Механика твердого тела. Вып. 5. Киев: Наук. думка, 1973, с. 5—24.
5. Коваль В. И., Харламов П. В. О годографах угловой скорости гироскопа Ковалевской в случае Делоне. — В кн.: Механика твердого тела. Вып. 11. Киев: Наук. думка, 1979, с. 3—17.
6. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
7. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
8. Козлов В. В. О некоторых свойствах частных интегралов канонических уравнений. — Вестн. МГУ. Сер. мат. и мех., 1973, № 1, с. 81—84.
9. Смейл С. Топология и механика. — Успехи мат. наук, 1972, т. 27, вып. 2, с. 77—120.
10. Jakob A. Invariant manifolds in the motion of a rigid body about a fixed point. — Rev. Roum. Math. Pures. Appl., 1971, v. 16, № 10, p. 1497—1521.
11. Татаринцов Я. В. К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией. — Вестн. МГУ. Сер. мат. и мех., 1973, № 5, с. 70—77.
12. Харламов М. П. К исследованию областей возможности движения в механических системах. — Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 3, с. 571—573.

Волгоград

Поступила в редакцию
16.XI.1982