Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 531.384

О ДВИЖЕНИИ ШАРА ЧАПЛЫГИНА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Мощук Н. К.

Рассматривается задача о движении тяжелого шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Предполагается, что центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром, а главные центральные моменты различны (шар Чаплыгина). Методом усреднения исследуется движение шара со скольжением при наличии малого вязкого, а также малого сухого трения. Показано, что при движении шара с вязким трением для большинства начальных данных шар стремится к вращению вокруг оси наибольшего из главных центральных моментов инерции. Центр шара стремится к равномерному движению так, что скорость проскальзывания экспоненциально стремится к нулю. В случае почти равных моментов инерции при наличии сухого трения получена система усредненных уравнений, которая полностью интегрируется. Проведен анализ полученных решений.

1. Пусть под действием начального толчка тяжелый шар движется по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своей поверхности. Геометрический центр шара совпадает с центром тяжести, а главные центральные моменты инерции, вообще говоря, различны ($A > B > C$) [1]. Выберем неподвижную систему координат $O_1X_1X_2X_3$ так, что $O_1X_1X_2$ совпадает с опорной плоскостью, по которой движется шар, а ось X_3 направлена вертикально вверх.

Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты центра шара O относительно неподвижной системы координат. Тогда $x_3 \equiv R$, где R — радиус шара, а x_1 и x_2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$Mx_1^{\cdot\cdot} = F_1, \quad Mx_2^{\cdot\cdot} = F_2 \tag{1.1}$$

Здесь M — масса шара, F_1 и F_2 — составляющие силы трения по осям X_1 и X_2.

Для вязкого трения

$$F_1 = -fMV_1, \quad F_2 = -fMV_2 \tag{1.2}$$

где f — коэффициент трения, V_1 и V_2 — проекции абсолютной скорости $\mathbf{V}$ точки шара, которой он касается опорной плоскости, на оси X_1 и X_2 соответственно.

Пусть G_1, G_2, G_3 — проекции вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ шара, относительно его центра, на оси X_1, X_2, X_3 соответственно. Все силы, приложенные к шару, пересекают ось X_3, поэтому $G_3 = G_{30} = \text{const}$. Выпишем уравнения моментов в проекциях на оси X_1, X_2

$$G_1^{\cdot} = F_2R, \quad G_2^{\cdot} = -F_1R \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) перепишем (1.1) и (1.3)

$$x_1^{\cdot\cdot} = -fV_1, \quad x_2^{\cdot\cdot} = -fV_2, \quad G_1^{\cdot} = -fMRV_2, \quad G_2^{\cdot} = fMRV_1 \tag{1.4}$$

Обозначим через ω_1 и ω_2 проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости шара на оси X_1 и X_2 соответственно. Тогда

$$V_1 = x_1^{\cdot} - \omega_2R, \quad V_2 = x_2^{\cdot} + \omega_1R \tag{1.5}$$

Выпишем также выражение для производной кинетической энергии T движения шара относительно его центра масс

$$T^{\cdot} = fMR\,(\omega_2V_1 - \omega_1V_2) \tag{1.6}$$

Уравнения (1.4) имеют два первых интеграла

(1.7) $$G_1 - MRx_2^{\cdot} = K_1 = \mathrm{const}, \quad G_2 + MRx_1^{\cdot} = K_2 = \mathrm{const}$$

представляющие собой следствие сохранения вектора кинетического момента относительно точки касания. Выразим из (1.7) $x_1^{\cdot}$ и $x_2^{\cdot}$ и подставим в (1.6) и в последние два уравнения (1.4). Тогда уравнения (1.4) и (1.6) будут иметь вид

(1.8) $$G_i^{\cdot} = -f(G_i - K_i + \omega_i MR^2); \; i = 1, 2$$
$$\varkappa^{\cdot} = 2f\{(G_1 - K_1)(\varkappa G_1 - \omega_1) + (G_2 - K_2)(\varkappa G_2 - \omega_2) + MR^2[\varkappa(\omega_1 G_1 + \omega_2 G_2) - \omega_1^2 - \omega_2^2]\}/G^2, \quad \varkappa = 2T/G^2$$

Обозначим через a, b, c величины, обратные A, B, C $(a < b < c)$. Ясно, что $a \leqslant \varkappa \leqslant c$. Это неравенство определяет в пространстве переменных $G_1, G_2, \varkappa$ область, которая представляет собой пространство между двумя плоскостями, соответствующими вращениям шара вокруг оси наибольшего $(\varkappa = a)$ и наименьшего $(\varkappa = c)$ момента инерции.

Пусть трение мало, т. е. f — малый параметр. Тогда в невозмущенной задаче $(f = 0)$ центр шара движется прямолинейно и равномерно, вектор главного кинетического момента G постоянен, $\varkappa = \mathrm{const}$, а шар совершает движение Эйлера — Пуансо относительно своего центра. Согласно геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела [2], величина $\varkappa$ равна квадрату расстояния от центра шара до плоскости, касательной к эллипсоиду инерции и перпендикулярной G. Вращениям шара вокруг большей, меньшей и средней осей эллипсоида инерции соответствуют значения $\varkappa = c$, $\varkappa = a$, $\varkappa = b$.

Возмущенное движение будем исследовать методом усреднения. Усредняя правые части уравнений (1.8) по невозмущенному движению Эйлера — Пуансо, получаем (сохраняя для медленных переменных прежние обозначения)

$$dG_i/d\tau = -(G_i - K_i + \langle\omega_i\rangle MR^2); \; i = 1, 2$$
$$d\varkappa/d\tau = 2\{(G_1 - K_1)(\varkappa G_1 - \langle\omega_1\rangle) + (G_2 - K_2)\times(\varkappa G_2 - \langle\omega_2\rangle) + MR^2[\varkappa(\langle\omega_1\rangle G_1 + \langle\omega_2\rangle G_2) - \langle\omega_1^2\rangle - \langle\omega_2^2\rangle]\}/G^2$$

Здесь $\tau = ft$, угловые скобки означают усреднение по быстрым переменным, как функциям времени и медленных переменных G_1, G_2, $\varkappa$.

Процедура усреднения подробно изложена в [3], где впервые было проведено усреднение по движению Эйлера — Пуансо в нерезонансном случае. Вычисления показывают

$$\langle\omega_1\rangle = \varkappa G_1, \quad \langle\omega_2\rangle = \varkappa G_2, \quad \langle\omega_1^2 + \omega_2^2\rangle = \varkappa^2(G^2 - G_{30}^2) - {}^1/_2\,(G^2 + G_{30}^2)\,\lambda(\varkappa)$$
$$\lambda(\varkappa) = (\varkappa - a)(\varkappa - c) - h\,[1 - E(k)/K(k)]k^{-2}$$
$$h = \begin{cases} (b-c)(\varkappa - a), & \varkappa < b; \\ (b-a)(\varkappa - c), & \varkappa > b; \end{cases} \qquad k^2 = \begin{cases} \dfrac{c-b}{b-a}\,\dfrac{\varkappa - a}{c - \varkappa}, & \varkappa < b \\ \dfrac{b-a}{c-b}\,\dfrac{c-\varkappa}{\varkappa - a}, & \varkappa > b \end{cases}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Таким образом, получаем усредненную систему уравнений

(1.9) $$dG_i/d\tau = -G_i(1 + \varkappa MR^2) + K_i; \; i = 1, 2$$
$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = MR^2\left(1 + \frac{G_{30}^2}{G^2}\right)\lambda(\varkappa)$$

Рассмотрим последнее уравнение (1.9). Использовать модуль эллиптических функций k в качестве медленной переменной при исследовании усредненной по движению Эйлера — Пуансо системы уравнений возмущенного движения было предложено в [4, 5]. Там же на основании анализа усредненного уравнения для k^2 сделаны выводы об эволюции движения.

В данной работе используется переменная $\varkappa$, которая связана с k^2 простым соотношением. Хотя уравнения для k^2 в [4, 5] и в рассматриваемом случае (если от $\varkappa$ перейти к k^2) различны, методика их анализа общая. Она основана на использовании свойств полных эллиптических интегралов первого и второго рода. Поэтому кратко перечислим свойства функции $\lambda(\varkappa)$, необходимые для качественного исследования уравнений (1.9). Функция $\lambda(\varkappa)$ определена на $[a, c]$, если ее доопределить в точках a, b, c по непрерывности. Кроме того, $\lambda(\varkappa) < 0$ всюду, за исключением точек a, b, c, где она обращается в нуль. На основании асимптотических разложений функции $\lambda(\varkappa)$ в точках a, b, c и выше перечисленных свойств $\lambda(\varkappa)$ (с учетом того, что $1 \leqslant 1 + G_{30}^2/G^2 \leqslant 2$) можно сделать следующий вывод: если в начальный момент времени $\varkappa_0 \in (a, b)$, то с течением времени $\varkappa$ уменьшается и асимптотически стремится к a; если же $\varkappa_0 \in (b, c)$, то $\varkappa$ будет уменьшаться и достигнет значения b за конечное время. Таким образом, решения усредненной системы выходят на сепаратрису и переходят через нее. Но вблизи сепаратрисы метод усреднения в обычной форме неприменим.

Проблеме прохождения через сепаратрису посвящены работы [6, 7]. В них показано, что движение динамической системы описывается усредненными уравнениями вплоть до выхода на сепаратрису. О дальнейшем поведении можно говорить с определенной вероятностью. Мера множества начальных данных, для которых движение после пересечения сепаратрисы нельзя описать с помощью усредненной системы, мала вместе с возмущением.

В рассматриваемой задаче эволюция движения шара для большинства начальных данных с точностью $o(f|\ln f|)$ описывается решениями усредненной системы, «склеенными» из решений в разных областях, т. е. из решений в области $a < \varkappa < b$ и в области $b < \varkappa < c$. Все решения усредненной системы, получаемые склеиванием, стремятся при $\tau \to +\infty$ к равновесию на плоскости $\varkappa = a$, т. е. предельным движением шара будет вращение вокруг оси наибольшего из главных центральных моментов инерции.

Так как $\varkappa \to a$ при $\tau \to +\infty$, то из первых двух уравнений (1.9) видно, что

$$G_i - K_i/\Lambda \to 0, \quad \tau \to +\infty, \quad i = 1, 2; \quad \Lambda = 1 + MR^2/A \tag{1.10}$$

причем можно проверить, что характеристические числа функций $G_i(\tau) - K_i/\Lambda$ равны Λ.

Из (1.7) находим, что при $t \to +\infty$

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}} \to K_2R/A\Lambda, \quad x_2^{\boldsymbol{\cdot}} \to -K_1R/A\Lambda \tag{1.11}$$

Так как финальное движение шара — это вращение вокруг оси наибольшего момента инерции A, то при $t \to +\infty$ имеем $\boldsymbol{\omega} \to \mathrm{G}/A$, т. е.

$$\omega_i \to K_i/A\Lambda; \quad i = 1, 2; \quad \omega_3 \to G_{30}/A \tag{1.12}$$

Из (1.10) — (1.12) вытекает, что скорость проскальзывания экспоненциально стремится к нулю.

Таким образом, финальное движение шара для любых начальных данных из области $a < \varkappa < b$ и для большинства начальных данных из области $b < \varkappa < c$ таково, что его центр движется прямолинейно и равномерно, а сам он вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси наибольшего момента инерции, при этом скорость проскальзывания экспоненциально стремится к нулю.

2. Пусть по-прежнему центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром, а движение происходит со скольжением при наличии малого сухого трения (т. е. коэффициент трения f — малая величина). Моменты инерции A, B, C различны и близки. Будем использовать обозначения: $O_1X_1X_2X_3$, как и в п. 1,— неподвижная система координат; оси связанной системы координат $Oz_1z_2z_3$ направлены по главным центральным осям инерции; x_1, x_2 — координаты центра шара в неподвижной системе координат; p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости шара ω на оси z_1, z_2, z_3; a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы, определяющие переход от связанной системы координат к неподвижной. Величины $(A - B)/I_0$, $(B - C)/I_0$, $(A - C)/I_0$, f — одного порядка малости. Здесь $I_0 = 2MR^2/5$ — момент инерции однородного шара. Координаты точки касания в связанной системе координат: $-Ra_{31}$, $-Ra_{32}$, $-Ra_{33}$.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента, кинематические соотношения Пуассона позволяют выписать следующую [8] замкнутую систему уравнений относительно x_1, x_2, p, q, r, a_{ij}:

(2.1)
$$
\begin{gathered}
x_1^{\cdot\cdot} = -fg\cos\alpha, \quad x_2^{\cdot\cdot} = -fg\sin\alpha \\
Ap^{\cdot} + (C - B)\,qr = fMgR\,(-a_{11}\sin\alpha + a_{21}\cos\alpha) \\
Bq^{\cdot} + (A - C)\,pr = fMgR\,(-a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha) \\
Cr^{\cdot} + (B - A)\,pq = fMgR\,(-a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha) \\
a_{i1}^{\cdot} = a_{i2}r - a_{i3}q, \quad a_{i2}^{\cdot} = a_{i3}p - a_{i1}r, \quad a_{i3}^{\cdot} = a_{i1}p - a_{i2}q \\
(i = 1, 2, 3)
\end{gathered}
$$

Здесь α — угол между вектором $\mathbf{V}$ (см. п. 1) и осью X_1.

Уравнения (2.1) дополним следующими выражениями:

(2.2)
$$
V_1 = x_1^{\cdot} - R\,(pa_{21} + qa_{22} + ra_{23}), \quad V_2 = x_2^{\cdot} + R\,(pa_{11} + qa_{12} + ra_{13})
$$

Из (2.1), (2.2) можно получить дифференциальные уравнения для α и $\mathbf{V}$ в первом приближении [8]

(2.3)
$$
\begin{gathered}
\alpha^{\cdot} = (\Phi_1\cos\alpha + \Phi_2\sin\alpha)\,/\,V, \quad V^{\cdot} = -7fg/2 + (\Phi_1\sin\alpha - \Phi_2\cos\alpha) \\
\Phi_i = \frac{B-C}{A}\,qra_{i1} + \frac{C-A}{B}\,pra_{i2} + \frac{A-B}{C}\,pqa_{i3}; \quad i = 1, 2
\end{gathered}
$$

Как и в [8, 9], вместо переменных a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} введем ρ_i, ζ_i, γ_i по формулам

$$
\begin{gathered}
a_{i1} = \rho_i\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\gamma_i + \rho_i\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\frac{r}{\omega}\cos\gamma_i + \zeta_i\frac{p}{\omega} \\
a_{i2} = -\rho_i\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\gamma_i + \rho_i\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\frac{r}{\omega}\cos\gamma_i + \zeta_i\frac{q}{\omega} \\
a_{i3} = -\rho_i\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\omega}\cos\gamma_i + \zeta_i\frac{r}{\omega}
\end{gathered}
$$

Величины ζ_1, ζ_2, ζ_3 — косинусы углов между вектором ω и осями X_1, X_2, X_3. Величина $|R\zeta_3|$ — расстояние от центра шара до плоскости, перпендикулярной ω и проходящей через точку касания. Тривиальные интегралы кинематических уравнений Пуассона в новых переменных имеют вид $\rho_i^2 + \zeta_i^2 = 1$.

В невозмущенном движении $\gamma_i^{\cdot} = \omega$, а величины ζ_i и ρ_i постоянны. Сделаем еще одну замену переменных. Вместо ζ_1 и ζ_2 введем α_1 и α_2 по формулам

$$
\alpha_1 = \zeta_1\cos\alpha + \zeta_2\sin\alpha, \quad \alpha_2 = -\zeta_1\sin\alpha + \zeta_2\cos\alpha
$$

Величины α_1 и α_2 имеют следующий геометрический смысл: α_1 — косинус угла между векторами ω и $\mathbf{V}$, а α_2 — косинус угла между ω и вектором, перпендикулярным $\mathbf{V}$ и лежащим в горизонтальной плоскости, причем кратчайший поворот от ω к этому вектору происходит против часовой стрелки.

Уравнения (2.1), (2.3) в новых переменных для краткости не приводим. Отметим, что переменные $x_1^\cdot$, $x_2^\cdot$, p, q, r, α_1, α_2, ζ_3, α, V медленные, а γ_i — быстрые.

Усредняя правые части уравнений для медленных переменных по быстрым переменным γ_i, получим следующую систему первого приближения:

(2.4) $$x_1^{\cdot\cdot} = -fg\cos\alpha, \quad x_2^{\cdot\cdot} = -fg\sin\alpha$$

(2.5) $$Ap^\cdot + (C - B)\,qr = fMgR\alpha_2 p/\omega \ \{ABC,\ pqr\}$$

(2.6) $$\alpha_1^\cdot = -\frac{5}{2}fg\frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega R}, \quad \alpha_2^\cdot = \frac{5}{2}fg\frac{1-\alpha_2^2}{\omega R}$$

(2.7) $$\zeta_3^\cdot = -\frac{5}{2}fg\frac{\zeta_3\alpha_2}{\omega R}, \quad \alpha^\cdot = 0, \quad V^\cdot = -7fg/2$$

Для ω из (2.5) получаем следующее уравнение:

(2.8) $$\omega^\cdot = \frac{5}{2}fg\frac{\alpha_2}{R}$$

Из (2.7) находим, что скорость точки касания в первом приближении, как и в случае однородного шара [2], имеет в неподвижной системе координат постоянное направление ($\alpha = \mathrm{const}$), а ее модуль линейно уменьшается и по истечении времени $2V_0/7fg$ станет равным нулю. С этого момента начнется качение, поэтому решать усредненную систему следует на этом интервале времени. Именно на интервале времени порядка $1/f$ решения усредненной системы с погрешностью f аппроксимируют решения точной системы.

Из (2.4) следует, что траектория центра тяжести в первом приближении — парабола.

Уравнения (2.6) — (2.8) имеют следующие первые интегралы:

$$\alpha_1\omega = c_1, \quad \sqrt{1-\alpha_2^2}\,\omega = c_2, \quad \zeta_3\omega = c_3$$

а общее решение запишется в виде

(2.9) $$\alpha_2 = \frac{\chi t + c_4}{\varkappa}, \quad \alpha_1 = \frac{c_1}{c_2\varkappa}, \quad \zeta_3 = \frac{c_3}{c_2\varkappa}, \quad \omega = c_2\varkappa;$$
$$\chi = \frac{5fg}{2Rc_2}, \quad \varkappa = \sqrt{1 + (\chi t + c_4)^2}$$

где постоянные $c_1, \ldots, c_4$ определяются из начальных условий.

Из (2.9) видно, что с течением времени $|\alpha_1| \to 0$, $|\alpha_2| \to 1$, $|\omega| \to \infty$, $|\zeta_3| \to 0$, т. е. векторы ω и $\mathbf{V}$ ориентируются так, чтобы быть ортогональными и лежать в горизонтальной плоскости.

Заметим [8], что величины p/ω, q/ω и r/ω могут быть вычислены по тем же формулам, что и p, q, r в движении Эйлера — Пуансо, в котором роль времени играет величина

$$\tau = \int_0^t \omega\, dt$$

В заключение автор выражает благодарность Маркееву А. П., под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости.— В кн.: *Чаплыгин С. А.* Избр. труды. М.: Наука, 1976, с. 409—428.
2. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnele. T. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1953. 575 p. —Рус. перев.: М., Физматгиз, 1960. 487 с.
3. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474—483.
4. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6, с. 1049—1070.
5. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 5—13.
6. *Нейштадт А. И.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 621—632.
7. *Нейштадт А. И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 30—36.
8. *Маркеев А. П.* О движении эллипсоида на шероховатой плоскости при наличии скольжения.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 310—320.
9. *Маркеев А. П.* О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 553—567.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1982