Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

Вязгин В. А.

Рассматривается игра сближения двух объектов, подверженных силам вязкого трения и управляющим воздействиям. Для ограничений общего вида на управления получены достаточные условия равенства цены игры программному максимину.

Позиционная игра сближения описывается дифференциальными уравнениями с ограничениями на допустимые управления (U_j — компакт)

$$x^{\cdot j} = y^j,\ \ y^{\cdot j} = -k_j y^j + u^j,\ \ j = 1, 2 \tag{1}$$

$$x^j,\ y^j,\ u^j \in E^n;\ u^j \in U_j,\ k_j \geqslant 0$$

временем окончания T и функционалом платы, минимизируемым первым игроком и максимизируемым вторым

$$I(z^1(\cdot),\ z^2(\cdot)) = \| x^2(T) - x^1(T) \|,\ \ z^j = (x^j,\ y^j) \tag{2}$$

Формализацию игры завершают понятия и конструкции работ [1, 2]: позиционные стратегии, конструктивные движения, цена игры.

Пусть $G_T = (-\infty,\ T] \times E^{4n}$, $\gamma_T(t_0,\ z_0^1,\ z_0^2)$ — цена игры (1), (2) из начальной позиции $(t_0,\ z_0^1,\ z_0^2) \in G_T$, $X_T^j(t_0,\ z_0^j)$ — множество точек $x^j = x^j(T)$ в E^n, в которые можно попасть в момент времени $t = T$ по всевозможным допустимым движениям $z^j(\cdot)$, $z^j(t_0) = z_0^j$. Введем в рассмотрение величину (программный максимин)

$$\varepsilon_T(t_0,\ z_0^1,\ z_0^2) = \max_{x^2 \in X_T^2(t_0,\ z_0^2)}\ \min_{x^1 \in X_T^1(t_0,\ z_0^1)} \| x^2 - x^1 \|$$

Требуется найти условия, при которых

$$\gamma_T(t_0,\ z_0^1,\ z_0^2) = \varepsilon_T(t_0,\ z_0^1,\ z_0^2)\ \forall\ (t_0,\ z_0^1,\ z_0^2) \in G_T \tag{3}$$

В изотропном случае, т. е. когда

$$U_j = \{u^j \in E^n \mid \| u^j \| \leqslant F_j\},\ \ j = 1, 2 \tag{4}$$

полное решение игры содержится в [3]; достаточные условия, обеспечивающие выполнение равенства (3) в этом случае, приведены в [1, 2, 4]. Отметим, что указанные результаты не переносятся прямо на случай произвольных U_j.

Ниже для изучения поставленной задачи используется основная конструкция работы [2] — стабильный мост.

Через $z^j(t) = z^j(t,\ t_*,\ z_*^j,\ u^j(\cdot))$ обозначим движение j-го игрока, отвечающее управлению $u^j(t), t \geqslant t_*$ и начальному условию $z^j(t_*) = z_*^j$. Пусть $z_*^j = (x_*^j, y_*^j), u^j(t) = u_*^j = \text{const}$. Тогда

$$x^j(T, t_*, z_*^j, u_*^j) = A(k_j,\ T - t_*)\, u_*^j + a(k_j,\ T - t_*)\, y_*^j + x_*^j$$

$$A(k, t) = \frac{t}{k} + \frac{e^{-kt}}{k^2} - \frac{1}{k^2},\ \ \ a(k, t) = \frac{1}{k} - \frac{e^{-kt}}{k}$$

Функции $A(k,\ t)$, $a(k,\ t)$ неотрицательные, монотонно неубывающие по t.

Лемма. Для всяких $t > 0$, $\Delta t \in (0,\ t]$ функция λ: $(0,\ \infty) \to E^1$, $\lambda(k) = A(k,\ t - \Delta t)/A(k,\ t)$ монотонно возрастающая.

Доказательство. Имеем

$$\lambda(k)=\frac{(t-\Delta t)^2 f(k)}{t^2 g(k)},\quad f(k)=\int_0^k\int_0^\tau e^{\omega(\Delta t-t)}\,d\omega\,d\tau$$

$$g(k)=\int_0^k\int_0^\tau e^{-\omega t}\,d\omega\,d\tau$$

Можно показать, что $g(k)>0,\ g'(k)>0,\ g''(k)>0\ \forall k\in(0,\ \infty)$. Потребуются тождества

$$\left(\frac{f(k)}{g(k)}\right)'=\frac{g'(k)}{g(k)}\left(\frac{f'(k)}{g'(k)}-\frac{f(k)}{g(k)}\right),\tag{5}$$

$$\left(\frac{f'(k)}{g'(k)}\right)'=\frac{g''(k)}{g'(k)}\left(\frac{f''(k)}{g''(k)}-\frac{f'(k)}{g'(k)}\right)$$

Имеем

$$\frac{f''(k)}{g''(k)}=e^{k\Delta t},\quad \frac{f'(k)}{g'(k)}=\int_0^k e^{-t\omega}e^{\Delta t\omega}\,d\omega\left(\int_0^k e^{-t\omega}\,d\omega\right)^{-1}<e^{k\Delta t}=\frac{f''(k)}{g''(k)}$$

Отсюда и из второго тождества (5) следует $(f'(k)\,/\,g'(k))'>0$. Функция $f'(k)\,/\,g'(k)$ монотонно возрастает в области $0<k<\infty$, и значит

$$f'(\tau)<g'(\tau)\frac{f'(k)}{g'(k)}\ \forall\tau\in(0,k)$$

Отсюда

$$\frac{f(k)}{g(k)}=\int_0^k f'(\tau)\,d\tau\left(\int_0^k g'(\tau)\,d\tau\right)^{-1}<\frac{f'(k)}{g'(k)}$$

Из первого тождества (5) следует $(f(k)\,/\,g(k))'>0$ и монотонное возрастание функции $\lambda(k)$. Лемма доказана.

Потребуются следующие свойства движений.

1°. Пусть $S=\{s\in E^n\colon\ \|s\|=1\}$ — единичная сфера, $\delta_j\colon S\to E^n$, $\delta_j(s)=\max(s,\ u^j)$ по $u^j\in U_j$ — опорная функция выпуклого замыкания множества U_j. Возьмем $s\in S$ и положим

$$(s,\ x^j(T,\ t_*,\ z_*{}^j,\ u_s{}^j))=\max_{u^j\in U_j}(s,\ x^j(T,\ t_*,\ z_*{}^j,\ u_*{}^j))=\tag{6}$$
$$=A(k_j,\ T-t_*)\,\delta_j(s)+a(k_j,\ T-t_*)(s,\ y_*{}^j)+(s,\ x_*{}^j)$$

Из (6) следует, что $u_s{}^j$ не зависит от t_*, $z_*{}^j$, T. Как показано в [1]

$$\varepsilon_T(t_*,\ z_*{}^1,\ z_*{}^2)=\max\ \{0,\ \varkappa_T(t_*,\ z_*{}^1,\ z_*{}^2)\}$$
$$\varkappa_T(t_*,z_*{}^1,z_*{}^2)=\max_{s\in S}(s,x^2(T,t_*,z_*{}^2,u_s{}^2)-x^1(T,t_*,z_*{}^1,u_s{}^1))$$

2°. Пусть

$$\Delta t\in(0,\ T-t_*],\ u_*{}^j,\ u^j\in U_j$$

$$u_\Delta{}^j(t)=\begin{cases}u_*{}^j,\ t\in[t_*,\ t_*+\Delta t)\\ u^j,\ t\in[t_*+\Delta t,\ T]\end{cases}$$

Тогда

$$x^j(T,\ t_*,\ z_*{}^j,\ u_\Delta{}^j)=\lambda_j x^j(T,\ t_*,\ z_*{}^j,\ u^j)+\tag{7}$$
$$+(1-\lambda_j)\,x^j(T,\ t_*,\ z_*{}^j,\ u_*{}^j)$$

$$\lambda_j=A(k_j,\ T-t_*-\Delta t)/A(k_j,\ T-t_*)\tag{8}$$

Теорема 1. Пусть $k_1\geqslant k_2$. Тогда для игры (1), (2) выполняется равенство (3).

Доказательство. Используя барьерные свойства стабильных мостов ([2], с. 61), можно показать, что равенство (3) имеет место тогда и только тогда, когда для всякого $(t_0, z_0^1, z_0^2) \in G_T$ множество

$$W_T = W_T(t_0, z_0^1, z_0^2) = \{(t, z^1, z^2) \in G_T: \varepsilon_T(t, z^1, z^2) \leqslant \leqslant \varepsilon_T(t_0, z_0^1, z_0^2)\}$$

является u^1-стабильным.

Пусть $(t_*, z_*^1, z_*^2) \in W_T$. Второй игрок выбирает произвольные $\Delta t \in (0, T - t_*]$, $u_*^2 \in U_2$ и сообщает об этом первому. Первый игрок выбирает $u_*^1 \in U_1$ из условия

$$\max_{s\in S}(s, x^2(T, t_*, z_*^2, u_*^2) - x^1(T, t_*, z_*^1, u_*^1)) = \tag{9}$$
$$= \| x^2(T, t_*, z_*^2, u_*^2) - x^1(T, t_*, z_*^1, u_*^1) \| =$$
$$= \min_{u^1\in U_1} \| x^2(T, t_*, z_*^2, u_*^2) - x^1(T, t_*, z_*^1, u^1 \|$$

Пусть $z^j(t_* + \Delta t, t_*, z_*^j, u_*^j) = z_*^j + \Delta z^j$, $j = 1, 2$, u_s^j определяется условием (6) и

$$u_\Delta^j(t) = \begin{cases} u_*^j, & t \in [t_*, t_* + \Delta t) \\ u_s^j, & t \in [t_* + \Delta t, T] \end{cases}$$

В силу леммы $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, где λ_j определяется равенством (8). Используя это неравенство, а также (6) — (9), имеем

$$\begin{aligned}
(10) \qquad & \varkappa_T(t_* + \Delta t, z_*^1 + \Delta z^1, z_*^2 + \Delta z^2) = \\
& = \max_{s\in S}(s, x^2(T, t_* + \Delta t, z_*^2 + \Delta z^2, u_s^2) - x^1(T, t_* + \Delta t, z_*^1 + \Delta z^1, \\
& u_s^1)) = \max_{s\in S}(s, x^2(T, t_*, z_*^2, u_\Delta^2(\cdot)) - x^1(T, t_*, z_*^1, u_\Delta^1(\cdot))) = \\
& = \max_{s\in S}(s, \lambda_2 x^2(T, t_*, z_*^2, u_s^2) + (1 - \lambda_2) x^2(T, t_*, z_*^2, u_*^2) - \\
& - \lambda_1 x^1(T, t_*, z_*^1, u_s^1) - (1 - \lambda_1) x^1(T, t_*, z_*^1, u_*^1)) \leqslant \\
& \leqslant \lambda_2 \max_{s\in S}(s, x^2(T, t_*, z_*^2, u_s^2) - x^1(T, t_*, z_*^1, u_s^1)) + \\
& + (1 - \lambda_2) \max_{s\in S}(s, x^2(T, t_*, z_*^2, u_*^2) - x^1(T, t_*, z_*^1, u_*^1)) + \\
& + \max_{s\in S}(\lambda_2 - \lambda_1)(s, x^1(T, t_*, z_*^1, u_s^1) - x^1(T, t_*, z_*^1, u_*^1)) \leqslant \\
& \leqslant \lambda_2 \varkappa_T(t_*, z_*^1, z_*^2) + (1 - \lambda_2)\varepsilon_T(t_*, z_*^1, z_*^2) \leqslant \varepsilon_T(t_*, z_*^1, z_*^2)
\end{aligned}$$

В силу произвольности (t_0, z_0^1, z_0^2), (t_*, z_*^1, z_*^2), u_*^2, Δt это означает u^1-стабильность множества $W_T = W_T(t_0, z_0^1, z_0^2)$ $\forall (t_0, z_0^1, z_0^2) \in G_T$. Отсюда следует равенство (3). Теорема доказана.

Из теоремы вытекает, что равенство (3) имеет место для игр (1), (2) с $k_1 = k_2 = 0$ и произвольными U_1, U_2.

Пусть выполняется неравенство (10). Стратегия, экстремальная к u^1-стабильному мосту $W_T(t_0, z_0^1, z_0^2)$ ([2], с. 61), является оптимальной стратегией первого игрока в игре из начальной позиции $(t_0, z_0^1, z_0^2) \in G_T$; второй игрок при этом располагает оптимальной программной стратегией $u_0^2(t) = u_0^2$, определяемой условием

$$\min_{x^1\in X_T^1(t_0, z_0^1)} \| x^2(T, t_0, z_0^2, u_0^2) - x^1 \| = \varepsilon_T(t_0, z_0^1, z_0^2)$$

Отметим, что если уравнения движения первого игрока имеют вид $\dot{x}^1 = u^1$; x^1, $u^1 \in E^n$, а второго — $\dot{x}^2 = u^2$; x^2, $u^2 \in E^n$ или вид (1), то для такой игры сближения также выполняется равенство (3). Доказательство данного утверждения проводится по схеме, изложенной выше.

Пример 1. Пусть $k_j > 0$, U_j определяется условием (4), $j = 1, 2$. Тогда

$$X_T^j(t_0, z_0^j) = \{x^j \in E^n: \| x^j - s^j \| \leqslant R_j\} \tag{11}$$

$$\varepsilon_T(t_0, z_0^1, z_0^2) = \max \{0, \| s^2 - s^1 \| + R_2 - R_1\}$$

$$(s^j = a(k_j, T - t_0) y_0^j + x_0^j, R_j = A(k_j, T - t_0) F_j, j = 1,2)$$

Используя теорему 1 и результат [2], получаем: второе равенство (11) определяет цену игры, если выполняется по крайней мере одно из условий $F_1 \geqslant F_2$ или $k_1 \geqslant k_2$.

Пример 2. Пусть $k_1 > 0$, $k_2 = 0$, U_1 задается условием (4) и

$$U_2 = \text{co}\{u^3 \in E^n\ u^2 = u_1^2, i = 1, 2, \ldots, m\}$$

Тогда $X_T^1(t_0, z_0^1)$ описывается первым равенством (11) и

$$X_T^2(t_0, z_0^2) = \text{co}\{x^2 \in E^n: x^2 = x_i^2, i = 1, 2, \ldots, m\} \tag{12}$$

$$\varepsilon_T(t_0, z_0^1, z_0^2) = \max \{0, \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \| x_i^2 - s^1 \| - R_1\}$$

$$(x_i^2 = A(k_2, T - t_0) u_i^2 + a(k_2, T - t_0) y_0^2 + x_0^2)$$

В соответствии с теоремой 1 второе равенство (12) определяет цену игры.

Рассмотрим позиционную игру преследования объектов, описываемую дифференциальными уравнениями с ограничениями на допустимые управления (1). В случае ограничений (4) на управления игроков задача известна как контрольный пример Л. С. Понтрягина.

Управление u^1 подчинено преследующему игроку, управление u^2 — убегающему. Преследование считается завершенным, когда $x^1 = x^2$.

Будем говорить, что задача преследования разрешима, если для всякой начальной позиции $(t_0, z_0^1, z_0^2) \in E^{4n+1}$ у первого игрока найдется стратегия $u_0^1(t, z^1, z^2)$, гарантирующая ему завершение преследования за конечное время.

Требуется найти условия, обеспечивающие разрешимость задачи преследования. Такие условия дает

Теорема 2. Пусть

$$k_2 - k_1 \leqslant 0, \quad \max_{s \in S}\left(\frac{\delta_2(s)}{k_2} - \frac{\delta_1(s)}{k_1}\right) < 0$$

Тогда задача преследования разрешима.

Доказательство. Имеем

$$\varkappa_{t_0}(t_0, z_0^1, z_0^2) = \| x_0^2 - x_0^1 \| \geqslant 0$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\varkappa_T(t_0, z_0^1, z_0^2)}{T - t_0} = \max_{s \in S}\left(\frac{\delta_2(s)}{k_2} - \frac{\delta_1(s)}{k_1}\right) < 0$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\omega(t) = 0 \quad (\omega(t) = \varepsilon_t(t_0, z_0^1, z_0^2))$$

имеет корень $t = \theta, \theta \geqslant t_0$.

В силу теоремы 1 множество $W_\theta = W_\theta(t_0, z_0^1, z_0^2)$ является u^1-стабильным. Применяя экстремальную к W_θ стратегию $u_0^1(t, z^1, z^2)$, первый игрок завершит преследование не позднее момента $t = \theta$. Теорема доказана.

Пример 3 (контрольный пример Л. С. Понтрягина). Пусть множества U_1, U_2 описываются условиями (4). Тогда $\delta_j(s) = F_j$, $j = 1, 2$. Задача преследования разрешима, если $1 \leqslant k_1/k_2 < F_1/F_2$. Данные условия жестче известных условий разрешимости задачи преследования Л. С. Понтрягина.

Пример 4. Пусть множества U_1, U_2 содержат внутреннюю точку и подобны, т. е. $U_1 = r U_2$, $r > 0$. Тогда $\delta_1(s) = r\delta_2(s) > 0$. Задача преследования разрешима, если $1 \leqslant k_1/k_2 < r$.

Пример 5. Пусть

$$U_1 = \{u^1 \in E^n:\ f_1^1 \mid u_1^1 \mid + f_2^1 \mid u_2^1 \mid + \ldots + f_n^1 \mid u_n^1 \mid \leqslant 1\}$$

$$U_2 = \{u^2 \in E^n:\ \mid u_i^2 \mid \leqslant f_i^2,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$f^j = (f_1^j, f_2^j, \ldots, f_n^j) > 0, \quad j = 1, 2$$

Тогда

$$\delta_1(s) = \max \{\mid s_i \mid / f_i^1, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\delta_2(s) = f_1^2 \mid s_1 \mid + f_2^2 \mid s_2 \mid + \ldots + f_n^2 \mid s_n \mid$$

Задача преследования разрешима, если $1 \geqslant k_2 / k_1 > \| f^1 \| \cdot \| f^2 \|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н. Н.*, *Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Черноусько Ф. Л.*, *Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
4. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.V.1983