Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДВУМЯ ОБЪЕКТАМИ ОДНОГО

Пашков А. Г., Терехов С. Д.

Рассматривается игровая задача простого преследования двумя объектами одного, обладающего преимуществом в скорости. Время игры фиксировано. Функционалом платы является расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры. Построен явный вид функции цены игры для всех возможных позиций. Близкие задачи рассматривались в [1—7].

Движение преследователей P_i $(y^{(i)})$ описывается уравнениями

$$y_1^{\cdot(i)} = u_1^{(i)},\ y_2^{\cdot(i)} = u_2^{(i)},\ |u^{(i)}| \leqslant \mu,\ \mu > 0 \tag{1}$$

$$(y^{(i)} = \{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}\},\ u^{(i)} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}\},\quad i = 1, 2)$$

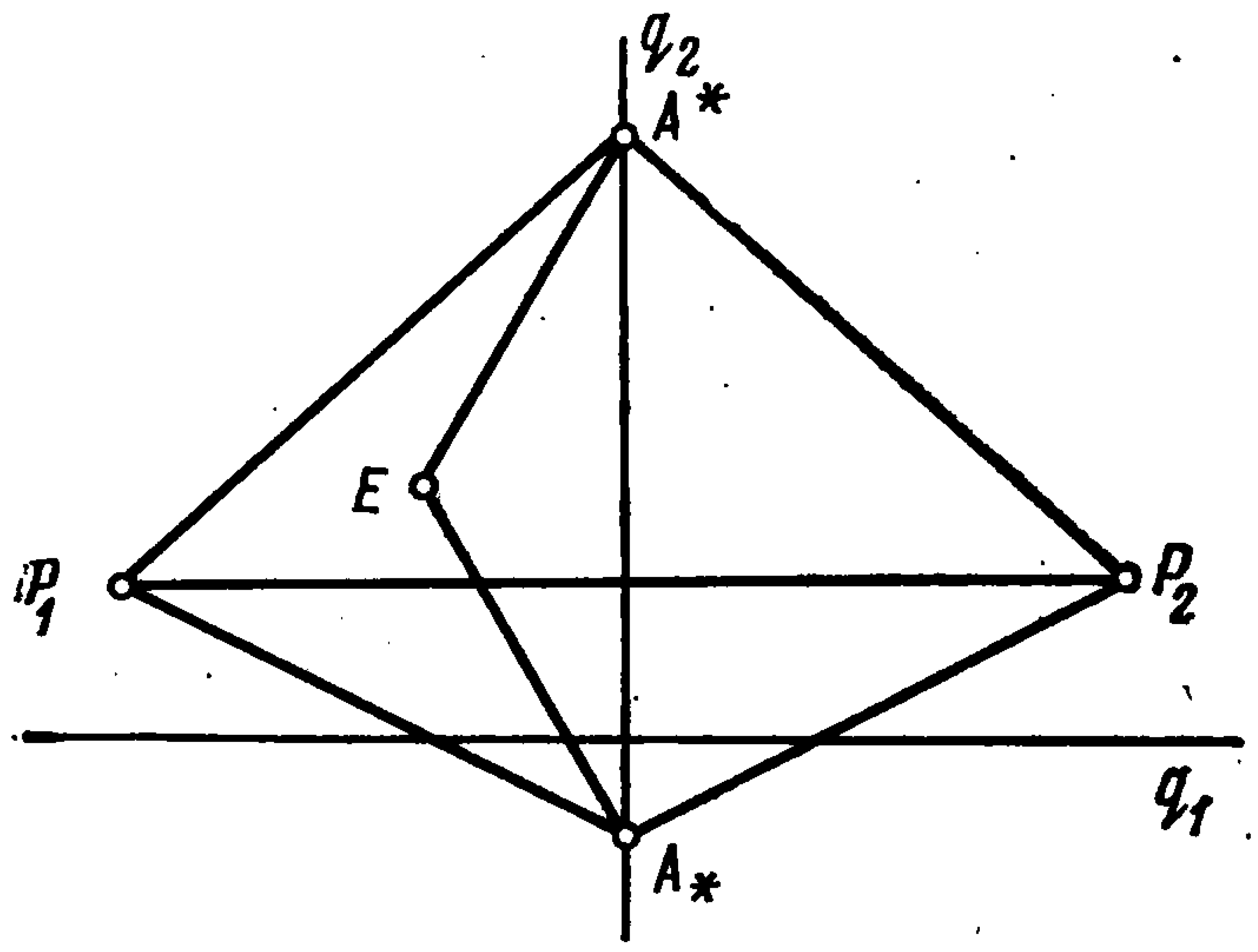
Преследуемый объект E (z) движется согласно уравнениям

$$z_1^{\cdot} = v_1,\ z_2^{\cdot} = v_2;\ |v| \leqslant \nu,\ \nu > \mu\ (v = \{v_1, v_2\}). \tag{2}$$

Здесь $u^{(i)}$, v — векторы управления. Зафиксировано время окончания игры $t = \vartheta$. Платой игры γ будет расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент $t = v$, т. е.

$$\gamma = \min_i [(z_1(\vartheta) - y_1^{(i)}(\vartheta))^2 + (z_2(\vartheta) - y_2^{(i)}(v))^2]^{1/2} \tag{3}$$

В дальнейшем предположим, что $|P_1^\circ P_2^\circ| > 0$. Случай $P_1^\circ = P_2^\circ$ будет рассмотрен особо. Зафиксируем на плоскости неподвижную прямоугольную систему координат с осями q_1 и q_2. Ось абсцисс q_1 направим от начального положения первого преследователя P_1° $(y_0^{(1)})$ к начальному положению второго преследователя P_2° $(y_0^{(2)})$. Ось ординат q_2 направим через середину отрезка $[P_1^\circ P_2^\circ]$ перпендикулярно к нему так, чтобы получить правоориентированную систему координат (фиг. 1).



Фиг. 1

Областью достижимости $G^{(i)}$ $(t, y^{(i)}, \vartheta)$ объектов P_i $(i = 1, 2)$ из позиции $\{t, y^{(i)}(t)\}$ к моменту $t = \vartheta$ будет круг радиуса $r(t) = \mu(\vartheta - t)$ с центром в точке $\{y^{(i)}(t)\}$. Областью достижимости $G(t, z, \vartheta)$ объетка E из позиции $\{t, z(t)\}$ будет круг радиуса $R(t) = \nu(\vartheta - t)$, центр которого находится в точке $\{z(t)\}$. Пусть объект P_i $(i = 1, 2)$ находится в некоторый момент времени t в позиции $\{y_1^{(i)}(t), y_2^{(i)}(t)\}$, $y_1^{(1)}(t) = -y_1^{(2)}(t)$, $y_2^{(1)}(t) = y_2^{(2)}(t)$. Объект E в момент t находится в позиции $\{z_1(t), z_2(t)\}$. Область достижимости преследуемого $G(t, z(t), \vartheta)$ пересекает ось q_2 в точках A^* $(0, q^*)$ и A_* $(0, q_*)$ (фиг. 1)

$$q^* = z_2(t) + ((\nu(\vartheta - t))^2 - z_1^2(t))^{1/2} \tag{4}$$

$$q_* = z_2(t) - ((\nu(\vartheta - t))^2 - z_1^2(t))^{1/2}$$

Видно, что расстояния между преследователями P_i и точками A^*, A_* удовлетворяют следующим соотношениям: $\operatorname{sign}(|P_iA^*| - |P_iA_*|) = \operatorname{sign}(z_2(t) - y_2^{(i)}(t))$.

Можно показать, что оптимальной программной стратегией уклонения объекта E от преследователей P_i в момент $t = \vartheta$ из заданной начальной позиции $\{t_0, z_0\}$ будет экстремальное управление $v(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, направленное в точку A^*, если

$$z_2(t_0) - y_2^{(i)}(t_0) > 0$$

или в точку A_*, если

$$z_2(t_0) - y_2^{(i)}(t_0) < 0$$

Позиции, для которых

$$z_2(t) = y_2^{(i)}(t), \quad |z_1(t)| \leqslant |y_1^{(i)}(t)|$$

образуют особое множество S.

Точкам множества S соответствуют две точки экстремального прицеливания A^* и A_*. В этом случае оптимальная программная стратегия уклонения объекта E состоит из двух экстремальных управлений $v_1(t)$ и $v_2(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, направленных в точки A^* и A_* соответственно. Игрок E может выбрать любое из них.

Определим сначала программный максимин γ_* для дифференциальной игры (1) — (3). В том случае, когда в начальный момент времени t_0 объект E находится внутри области $Q(t_0)$, ограниченной отрезками $P_i^\circ A_*$, $P_i^\circ A^*$ $(i = 1, 2)$, т. е. выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \nu(\vartheta - t_0) \geqslant |z_1(t_0)| \\ [(\nu(\vartheta - t_0))^2 - z_1^2(t_0)]^{1/2}(z_1(t_0))^{-1} \geqslant \\ \geqslant (((\nu(\vartheta - t_0))^2 - (z_1(t_0))^2)^{1/2} + z_2(t_0) - y_2^{(i)}(t_0))\, |y_1^{(i)}(t_0)|^{-1} \end{gathered} \tag{5}$$

Программный максимин в данном случае имеет вид

$$\begin{gathered} \gamma_* = \max_{v(t)} \min_{u(t)} \gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2); \quad \gamma_1 = \varphi(q^*), \quad \gamma_2 = \varphi(q_*) \\ \varphi(q) = ((y_2^{(i)}(t_0) - q)^2 + (y_1^{(i)}(t_0))^2)^{1/2} - \mu(\vartheta - t) \end{gathered} \tag{6}$$

Если неравенство (5) не выполняется, то объект E находится вне области $Q(t_0)$. (В частности, этот случай имеет место, если область достижимости объекта E не пересекается с осью q_2.)

При этом игра (1) — (3) вырождается в игру с одним убегающим и одним преследователем, рассмотренную, например, в [1]. В этом случае получаем, что программный максимин имеет вид

$$\gamma_* = ((z_1^\circ - \mathring{y}_1^{(i)})^2 + (z_2^\circ - \mathring{y}_2^{(i)})^2)^{1/2} + (\nu - \mu)(\vartheta - t_0) \tag{7}$$

Наконец, если $|P_1P_2| = 0$, то

$$\begin{gathered} \gamma_* = ((z_1^\circ - y_1^\circ)^2 + (z_2^\circ - y_2^\circ)^2)^{1/2} + (\nu - \mu)(\vartheta - t_0) \\ (y_1^\circ = \mathring{y}_1^{(1)} = \mathring{y}_1^{(2)},\ y_2^\circ = \mathring{y}_2^{(1)} = \mathring{y}_2^{(2)}) \end{gathered} \tag{8}$$

Можно проверить, для позиций игрока E, при которых имеет равенство во втором неравенстве (5) (т. е. E находится на одном из ребер четырехугольника $P_1A^*P_2A_*$), что функции (6) и (7) равны вместе со всеми своими производными. Таким образом, выражения (6) и (7) определяют непрерывную функцию $\gamma_* \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемую при $t_0 \leqslant t < < \vartheta$ везде, кроме множества S.

Ниже будет доказано, что программный максимин γ_* совпадает с ценой дифференциальной игры (1) — (3). При доказательстве этого факта воспользуемся следующим обстоятельством. Рассмотрим дифференциальную игру, в которой уравнение (1) заменим уравнением

(9) $$\dot{y}_1^{(1)} = u_1, \quad \dot{y}_2^{(1)} = u_2, \quad \dot{y}_1^{(2)} = -u_1, \quad \dot{y}_2^{(2)} = u_2$$

т. е. положим, что в (1) $u_1^{(1)} = -u_1^{(2)} = u_1$. Если для дифференциальной игры (9), (2), (3) вычислить программный максимин γ_{**}, то получим

(10) $$\gamma_* = \gamma_{**}$$

Пусть ρ_* — цена дифференциальной игры (1) — (3), а ρ_{**} — цена дифференциальной игры (9), (2), (3). В игре (9), (2), (3) у первого преследователя имеются дополнительные ограничения. Поэтому

(11) $$\rho_* \leqslant \rho_{**}$$

Известно, что цена дифференциальной игры и программный максимин связаны неравенством

(12) $$\rho_* \geqslant \gamma_*, \quad \rho_{**} \geqslant \gamma_{**}$$

Если справедливо равенство

(13) $$\rho_{**} = \gamma_{**}$$

то из (10) — (12) следует, что

$$\rho_* = \gamma_*$$

Докажем равенство (13).

Для системы (9) всегда имеют место равенства

$$y_1^{(1)}(t) = -y_1^{(2)}(t), \quad y_2^{(1)}(t) = y_2^{(2)}(t)$$

Проверка равенства (13) сводится к проверке свойства u-стабильности [1] функции γ_{**}, т. е. для любой позиции $\{t_*, y_*, z_*\}$ игры (9), (2), (3) и для любой функции $v(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ найдется функция $u(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$, такая, что пара управлений переведет систему (9), (2), (3) из позиции $\{t_*, y_*, z_*\}$ в позицию $\{t^*, y^*, z^*\}$

$$y^* = y(t^*), \quad z^* = z(t^*)$$

так, что выполняется неравенство

(14) $$\gamma_{**}(t^*, y^*, z^*) \leqslant \gamma_{**}(t_*, y_*, z_*)$$

Возможны следующие случаи.

1) Пусть игрок E в начальный момент времени находится строго внутри треугольника $P_1A^*P_2$.

Отметим, что если в окрестности рассматриваемой позиции функция γ_{**} дифференцируема, то для доказательства неравенства (14) можно воспользоваться основным уравнением теории дифференциальных игр.

В рассматриваемом случае положим $\gamma_{**} = \gamma_1$, где γ_1 — дифференцируемая функция.

Введем обозначения

$$r = ((\nu(\vartheta - t))^2 - z_1^2)^{1/2}, \quad q_1 = z_2 + r$$
$$R_1 = ((q_1 - y_2)^2 + y_1^2)^{1/2}, \quad \gamma_1 = R_1 - \mu(\vartheta - t)$$

Найдем частные производные функций

$$\partial r/\partial t = -\nu^2(\vartheta - t)/r, \quad \partial r/\partial z_1 = z_1/r$$
$$\partial q_1/\partial t = -\nu^2(\vartheta - t)/r, \quad \partial q_1/\partial z_1 = -z_1/r, \quad \partial q_1/\partial z_2 = 1$$
$$\partial R_1/\partial y_1 = y_1/R_1, \quad \partial R_1/\partial y_2 = -(q_1 - y_2)/R_1$$
$$\partial R_1/\partial q_1 = (q_1 - y_2)/R_1, \quad \partial R_1/\partial z_1 = -(q_1 - y_2) z_1/(R_1 r)$$

$$\partial R_1/\partial z_2 = (q_1 - y_2)/R_1, \quad \partial\gamma_1/\partial t = \mu - \nu^2(\vartheta - t)(q_1 - y_2)/(R_1 r)$$

$$\partial\gamma_1/\partial y_1 = y_1/R_1, \quad \partial\gamma_1/\partial y_2 = -(q_1 - y_2)/R_1$$

$$\partial\gamma_1/\partial z_1 = -(q_1 - y_2)\, z_1/Rr, \quad \partial\gamma_1/\partial z_2 = (q_1 - y_2)/R_1$$

Основное уравнение имеет вид

$$\partial\gamma_1/\partial t + \min_u\left((\partial\gamma_1/\partial y_1)\, u_1 + (\partial\gamma_1/\partial y_2)\, u_2\right) + \max_v\left((\partial\gamma_1/\partial z_1)\, v_1 + (\partial\gamma_2/\partial z_2)\, v_2\right) = 0$$

Так как $z_2 \geqslant y_2$, то $q_1 - y_2 \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\min_u\left((\partial\gamma_1/\partial y_1)\, u_1 + (\partial\gamma_1/\partial y_2)\, u_2\right) = -\mu$$

$$\max_v\left((\partial\gamma_1/\partial z_1)\, v_1 + (\partial\gamma_1/\partial z_2)\, v_2\right) = \nu^2(\vartheta - t)(q_1 - y_2)/(R_1 r)$$

Таким образом, основное уравнение выполняется. Аналогично можно проверить выполнение основного уравнения для позиций E, расположенных строго внутри треугольника $P_1A_*P_2$.

2) Рассмотрим другой случай игры (9), (2), (3).

Пусть позиции игроков P_i и E таковы, что либо не выполняются неравенства (5), либо $P_1^\circ = P_2^\circ$. Это означает, что либо убегающий E находится вне четырехугольника $P_1A^*P_2A_*$, либо начальные позиции преследователей совпадают.

В обоих этих случаях игра (9), (2), (3) вырождается в игру «один на один», для которой справедливость неравенства (14) очевидна.

3) Рассмотрим далее позиции, принадлежащие особому множеству S, определенному выше. Вспомогательные управления преследователей P_i зададим следующими выражениями:

(15) $$u^{(i)}(t, y^{(i)}, z, v(t)) = \{(-1)^{i+1}(\mu^2 - (v_2(t))^2)^{1/2};\ v_2(t)\}$$

если $|v_2(t)| \leqslant \mu\, |q - y_2^{(i)}| \,/\, ((y_1^{(i)})^2 + (q - y_2^{(i)})^2)^{1/2}$

(16) $$u^{(i)}(t, y^{(i)}, z, v(t)) = \{-\mu y_1^{(i)}/((y_1^{(i)})^2 + (q - y_2^{(i)})^2)^{1/2};\ \mu(q - y_2^{(i)})/((y_1^{(i)})^2 + (q - y_2^{(i)})^2)^{1/2}\}$$

если

$$|v_2(t)| > \mu\, |q - y_2^{(i)}| \,/((y_1^{(i)})^2 + (q - y_2^{(i)})^2)^{1/2} \quad (i = 1, 2)$$

где q — то же, что и в (6).

3а). Пусть E в течение некоторого достаточно малого отрезка времени Δt использует управление $v(t) = \{v_1(t\ \ ),\ v_2(t)\}$, причем $|v_1(t)| \leqslant \nu$, $v_2(t) = 0$. Тогда он в момент $t + \Delta t$ окажется в точке E' (фиг. 2). Преследователи P_i выбирают в этом случае экстремальные управления $u^{(i)}(t, y^{(i)}, z, v(t))$, описанные в (15), направленные вдоль вектора P_iE. Игроки P_i движутся в соответствии с этим управлением до тех пор, пока хотя бы один из них не догонит игрока E. В том случае, когда координаты одного из P_i совпадут с координаторами убегающего, игра (9), (2), (3) вырождается в игру с двумя игроками, рассмотренную в п. 2. Если убегающий выбирает управление, как показано выше, то он действует не оптимально и управления $u^{(i)}$ наказывают его в том смысле, что значение γ_{**} будет уменьшаться.

Необходимо доказать, что (фиг. 2)

$$|A^*P_1''| > |P_1'A'|$$

где P_1'' — положение преследователя P_1 в момент $t + \Delta t$ в том случае, когда E движется с максимальной скоростью в точку A^* $(0, q^*)$, а P_1 применяет соответствующее этому случаю управление $u^{(1)}(t, y^{(1)}, z, v(t))$, имеющее вид (15).

Обозначим

$$T = \nu - t,\ a = |y_1^{(1)}|,\ b = |z_1|,\ \bar{v} = v_1(t),\ |\bar{v}| \leqslant \nu$$

Необходимо доказать неравенство

$$((\nu T)^2 - b^2 + a^2)^{1/2} - \mu\Delta t > ((\nu(T - \Delta t))^2 - (b - \bar{v}\Delta t)^2 + (a - \mu\Delta t)^2)^{1/2}$$

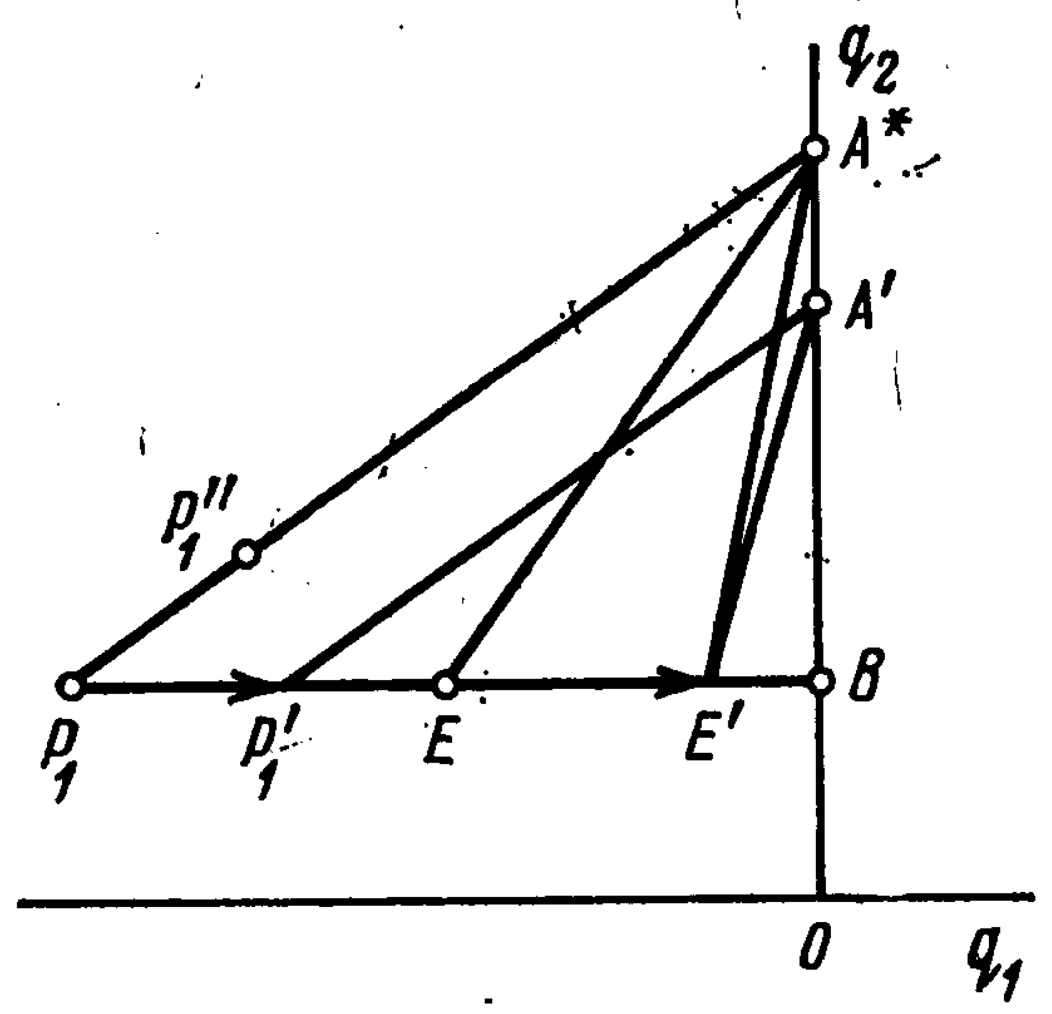
Достаточно доказать неравенство

$$\mu((\nu^2)^2 - b^2 + a^2)^{1/2} < \nu(\nu T - b) + a\mu$$

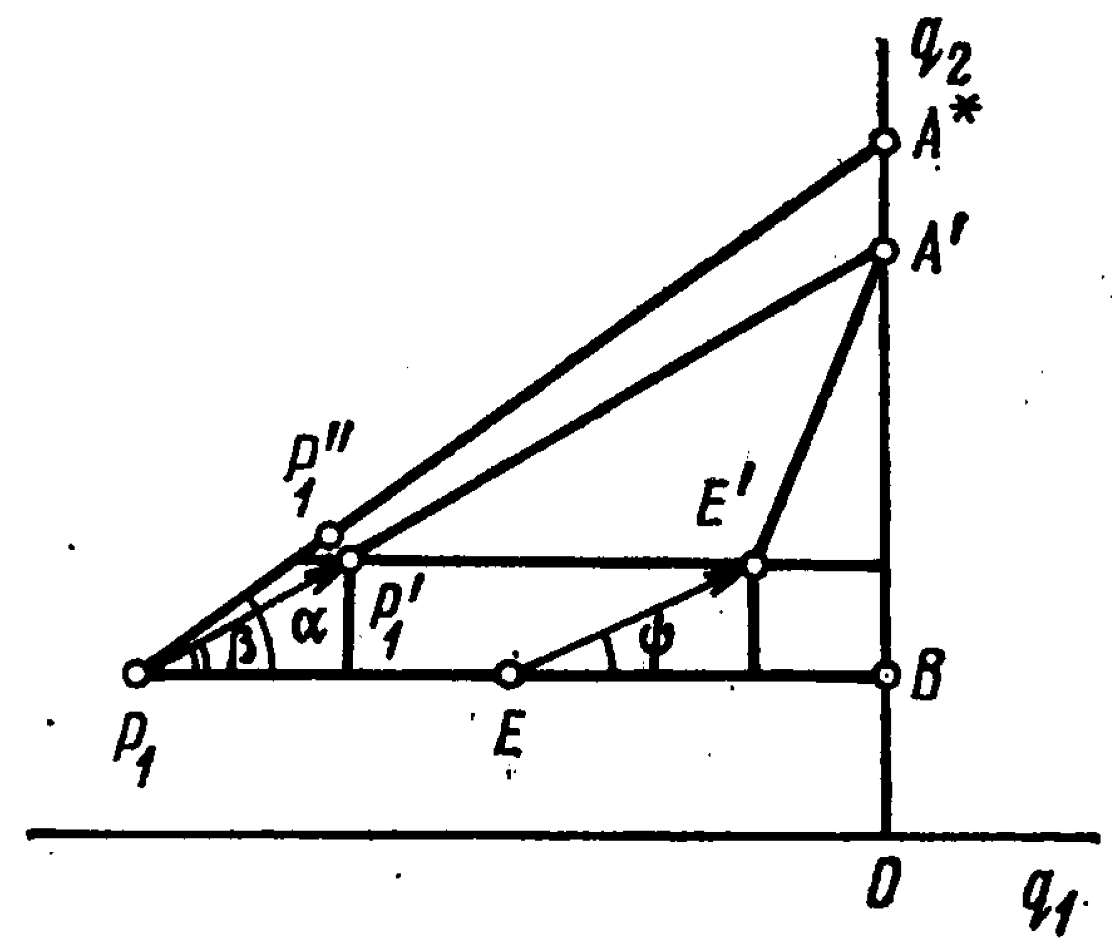
Истинность последнего неравенства сразу следует из соотношений

$$\nu T - b > 0,\ \nu \geqslant \mu,\ ((\nu T)^2 - b^2 + a^2)^{1/2} < \nu T - b + a$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае при указанных действиях убегающего управления $u^{(i)}(t, y^{(i)}, z, v(t))$, заданные соотношением (15), доставляют преследователям P_i результат лучше, чем γ_{**}.



Фиг. 2



Фиг. 3

3б). Пусть теперь E в течение некоторого достаточно малого отрезка времени Δt использует управление

$$v(t) = \{v_1(t),\ v_2(t)\},\ v_2(t) > 0$$

удовлетворяющее условию (15). Тогда игрок P_1, согласно (15), выбирает управление

$$u(t) = \{u_1(t),\ u_2(t)\},\ u_2(t) = v_2(t)$$

Через время Δt игрок P_1 окажется в позиции P_1' (фиг. 3). Необходимо доказать неравенство

$$|A^* P_1''| > |P_1'A'|$$

Обозначим

$$a = |y_1^{(1)}|,\quad b = |z_1|$$

ψ, α, β — углы между соответственно векторами EE', P_1A^* P_1P_1' и осью q_1. Доказываемое неравенство примет вид

(17) $$((\nu T)^2 - b^2 + a^2)^{1/2} - \mu\Delta t > ((\nu(T - \Delta t))^2 - (b - \bar{v}\Delta t\cos\psi)^2 + (a - \mu\Delta t\cos\beta)^2)^{1/2},\quad |\bar{v}| \leqslant \nu$$

Из ограничений на $v_2(t)$ (15) следует

$$0 \leqslant \psi \leqslant \arcsin(\mu(\sin\alpha/\bar{v})),\quad \mu\sin\alpha < \bar{v}$$

$$\mu\Delta t\sin\beta = \bar{v}\Delta t\sin\psi$$

Достаточно доказать неравенство

(18) $$((\nu T)^2 - b^2 + a^2)^{1/2} < (\nu/\mu)(\nu T - b\cos\psi + a((\mu/\nu)^2 - \sin^2\psi)^{1/2})$$

Минимум правой части неравенства (18) достигается при

$$\psi = \arcsin((\mu\sin\alpha)/\nu)$$

Таким образом, неравенство (17) выполняется, если верно неравенство

$$((\nu T)^2 - b^2 + a^2)^{1/2} < \nu T - b + a$$

Истинность последнего неравенства легко устанавливается.

Итак, доказано свойство u-стабильности функции γ_{**}. Таким образом доказано, что программный максимин γ_* совпадает с ценой дифференциальной игры (1) — (3).

Отметим, что все проведенные в работе построения можно обобщить и на случай, когда $\mu \geqslant \nu$, т. е. преследователи имеют преимущество в скорости.

Исследование функции γ_* на сингулярном множестве S можно провести используя результаты, полученные в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Hagedorn P., Breakwell J. V.* A Differential Game with Two Pursuers and One Evader.— J. Optimizat Theory and Appl., 1976, v. 18, No. 1, p. 15—29.
4. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
5. *Меликян А. А.* Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 2, с. 49—56.
6. *Тарлинский С. И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения нескольких управляемых объектов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 3, с. 534—537.
7. *Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Линейная задача преследования несколькими управляемыми объектами.— Кибернетика, 1978, № 3, с. 86—94.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1983