Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 62—50

МЕТОД ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ РАЗНОТИПНЫМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Григоренко Н. Л.

Рассматривается задача преследования несколькими управляемыми разнотипными объектами одного убегающего. Получены достаточные условия окончания игры преследования за конечное время. Предлагаемый метод взаимодействия преследователей предполагает разделение преследующих игроков на две группы, первая из которых удерживает убегающего в некоторой области, а вторая — осуществляет в этой области поиск убегающего. Работа примыкает к исследованиям [1—9]. Результаты иллюстрируются на модельных примерах.

Пусть движения векторов $z_1, \ldots, z_m$, в n-мерном евклидовом пространстве R^n описываются уравнениями

$$z_i^{\cdot} = C_i z_i + u_i - v, \quad z_i(0) \approx z_i^{\circ}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

где C_i — постоянная матрица размерности $n \times n$, $u_i \in P_i$, $v \in Q$, $P_i \subset R^{p_i}$, $Q \subset R^q$ — выпуклые компакты. В R^n заданы терминальные множества $M_1, M_2, \ldots, M_m$, где $M_i = M_i^1 + M_i^2$, M_i^1—линейное подпространство R^n, M_i^2 — выпуклый компакт в L_i^1, L_i^1 — ортогональное дополнение к подпространству M_i^1 в R^n.

Перечисленными выше данными описана дифференциальная игра нескольких лиц (1), в которой принимает участие группа преследователей, имеющая в своем распоряжении вектор управления $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и преследуемый игрок, в распоряжении которого вектор v.

Рассмотрим для дифференциальной игры (1) задачу преследования.

В качестве стратегий убегающего фиксируется класс программных измеримых функций $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$.

В качестве стратегий i-го преследователя фиксируется класс функций

$$U^i(t, v, z^\circ)\colon [0, \infty) \times Q \times R^{mn} \to R^{p_i}$$

для которого выполнены следующие условия:

1) $U^i(t, v, z^\circ) \in P_i$ для всех $t \geqslant 0$, $v \in Q$;

2) функция $u_i(t) = U^i(t, v(t), z^\circ)$ измерима по Лебегу на $[0, \infty)$ для произвольной измеримой $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$.

Следуя [5], стратегии $U^i(t, v, z^\circ)$ назовем стробоскопическими. Стратегией преследования назовем вектор $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, где $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ — стробоскопическая стратегия i-го преследователя, $u_i(t)$, $i = k + 1, \ldots, m$ — программная стратегия i-го преследователя, $0 \leqslant k \leqslant m$ (если $k = 0$, $u_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — программные стратегии i-го преследователя).

Задача преследования формулируется следующим образом. Найти условие для параметров игры (1), при которых для заданных начальных состояний z_i° $(i = 1, \ldots, m)$ существует такая стратегия преследования $u^*(t) = (u_1^*(t), \ldots, u_m^*(t))$, что по крайней мере один вектор $z_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$, являющийся решением уравнения

$$z_i^{\cdot} = C_i z_i + u_i^*(t) - v(t), \quad z_i(0) = z_i^\circ$$

приходит на соответствующее терминальное множество M_i не позднее некоторого конечного момента времени.

Пусть π_i — оператор ортогонального проектирования из R^n на L_i^1, $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность множеств [1].

Условие A [1, 7]. Существуют полунепрерывные сверху функции

$$\varkappa_i(t,\tau):[0,\infty)\times[0,t]\to R^1,\quad \varkappa_i(t,\tau)\geqslant 0,\ \int_0^t \varkappa_i(t,\tau)\,d\tau=1$$

и множества M_i^3, $M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3 \neq \varnothing$, такие, что для всех τ, t, $\tau\in[0,\ t]$, $t\geqslant 0$ непусты множества

$$w_i\ (t,\ \tau) = (-\varkappa_i\ (t,\ \tau)\ M_i^3 + \pi_i\exp\ (t-\tau)\ C_i\cdot P_i) \overset{*}{-}$$
$$\overset{*}{-}\ \pi_i \exp\ (t-\tau)\ C_i\cdot Q$$

Из условия A и условий для игры (1) следует существование измеримой по Борелю функции $\beta_i\ (t,\tau)$: $[0,\ \infty)\times[0,\ t]\to R^n$, $\beta_j\ (t,\ \tau)\in w_i\ (t,\ \tau)$.

Пусть k — целое число, $0\leqslant k\leqslant m$, определяемое условием: для $i=1,\ \ldots,\ k$ параметры, определяющие игру (1), удовлетворяют условию A; для $i=k+1,\ \ldots,\ m$ параметры, определяющие игру (1), условию A не удовлетворяют. Если условие A не может быть выполнено ни при одном i, то считаем $k=0$.

Пусть $M_i^4\subset M_i^2 \overset{*}{-} M_i^3$ и $m_i^4\in M_i^4$. Рассмотрим для $i=1,\ \ldots,\ k$ функции

$$\varphi_i(t,z_i^\circ,m_i^4)=\pi_i\exp tC_i\cdot z_i^\circ - m_i^4+\int_0^t \beta_i(t,\tau)\,d\tau$$

Если существует номер i и положительная постоянная T, такие, что $\varphi_i\ (T,\ z_i^\circ,\ m_i^4)=0$, то для игры (1) в позиции z° разрешима задача преследования в момент T [1]. Поэтому, не умаляя общности, будем далее считать, что $\varphi_i\ (t,\ z_i^\circ,\ m_i^4)\neq 0$ для всех i, t, m_i^4, $t\geqslant 0$, $m_i^4\in M_i^4$. Положим [7, 8]

$$\lambda\ (i,\ t,\ \tau,\ v,\ z_i^\circ,\ m_i^4)=\max\ \{\lambda:\ \lambda\geqslant 0,\ \ -\lambda\varphi_i\ (t,\ z_i^\circ,\ m_i^4)\in \in(-\varkappa_i\ (t,\ \tau)\ M_i^3+\pi_i\exp\ (t-\tau)\ C_i\cdot P_i-\pi_i\ \exp\ (t-\tau)\ C_i\cdot v- -\beta_i\ (t,\ \tau))\},\quad \lambda\ (i,t,\tau,v,z_i^\circ,M_i^4)=\max_{m_i^4\in M_i^4}\lambda\ (i,t,\tau,v,\ z_i^\circ,\ m_i^4) \tag{2}$$

Если $k=m$, то достаточные условия разрешимости задачи преследования в такой игре сформулированы, например, в [9]. Будем считать $k<m$. Пусть T — произвольная положительная постоянная, $u_j\ (t)$ — произвольные программные управления, $j=k+1,\ \ldots,\ m$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Обозначим

$$E\ (t,T,z^\circ)=\Big\{v\ (\tau):\ 0\leqslant\tau\leqslant t,\ v\ (\tau)\in Q,\ \int_0^t \lambda\ (i,T,\tau,v\ (\tau)$$
$$z_i^\circ,M_i^4)\,d\tau<1,\quad i=1,\ldots,k\Big\}$$

$$q_j\ (t,v\ (\cdot))=-\int_0^t \pi_j\exp\ (t-\tau)\ C_i\cdot v\ (\tau)\,d\tau$$

$$V_j\ (t,\ T,\ z^\circ)=\{q_j\ (t,\ v(\cdot)):\ v\ (\tau)\in E\ (t,\ T,\ z^\circ)\}$$

$$N_j(t)=-\pi_j\exp tC_j\cdot z_j^\circ-\int_0^t \pi_j\exp\ (t-\tau)\ C_j\cdot u_j(\tau)\,d\tau+M_j^2$$

$$N(t)=\bigcup_{j=k+1}^m N_j(t),\quad t\leqslant T,\quad j=k+1,\ldots,m$$

Предположение 1. Векторы $q_j(t, v(\cdot))$ не зависят от j для всех $v(\tau) \in E(t, T, z^0)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$; $L_j^1 = R^\nu$.

Положим

$$V(t, T, z^\circ) = V_j(t, T, z^\circ), \quad q(t, v(\cdot)) = q_j(t, v(\cdot))$$

Предположение 2. Для позиции $z^\circ = (z_1^\circ, \ldots, z_m^\circ)$ существует положительная постоянная T и допустимые управления $u_j(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $j = k+1, \ldots, m$, такие, что для некоторого момента $t^* \leqslant T$ $N(t^*) \supset V(t^*, T, z^\circ)$.

Условие Б. Скажем, что для множеств $N(t)$, $V(t, T, z^\circ)$ выполнено условие $Б$ на отрезке $[T_1, T_2]$, $0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant T$ (условие прочесывания множеством $N(t)$ множества $V(t, T, z^\circ)$ на отрезке $[T_1, T_2]$), если существует непрерывная функция $\xi(x, t)$: $R^\nu \times [T_1, T_2] \to R^1$, такая, что

а) $V(T_1, T, z^\circ) \in \{x: \xi(x, T_1) \leqslant 0\}$; $V(T_1 T, z^\circ) \cap \{x: \xi(x, T_1) = 0\} \neq \varnothing$;

б) $N(t) \supset V(t, T, z^\circ) \cap \{x: \xi(x, t) = 0\}$ для всех $t \in [T_1, T_2]$;

в) $N(T_2) \supset V(T_2, T, z^\circ) \cap \{x: \xi(x, T_2) \leqslant 0\}$.

Предположение 3. Для позиции z° существуют управления $u_j(t)$, $j = k+1, \ldots, m$ и положительные константы T_1, T_2, T, $T_1 \leqslant T_2 \leqslant T$, такие, что для множеств $N(t)$, $V(t, T, z^\circ)$ выполнено условие $Б$ на отрезке $[T_1, T_2]$.

Теорема. Если в позиции z° выполнены предположения 1, 2 или 1, 3, то для позиции z° разрешима задача преследования к моменту T.

Доказательство. Пусть для позиции z° выполнены предположения 1 и 2. Рассмотрим функцию $\lambda(i, t, \tau, v, z_i^\circ, m_i^4)$, определяемую соотношением (2). Согласно (2), функция $\lambda(i, t, \tau, v, z_i^\circ, m_i^4)$ полунепрерывна сверху по совокупности аргументов v, m_i^4 при фиксированном τ и измерима по Борелю по τ при фиксированных v, m_i^4 (аргументы i, t, z_i° фиксированы). Следовательно [10], компактное множество

$$\Lambda_i^4(t, \tau, v) = \{m_i^4\colon m_i^4 \in M_i^4, \lambda(i, t, \tau, v, z_i^\circ, m_i^4) = \lambda(i, t, \tau, v, z_i^\circ, M_i^4)\}$$

полунепрерывно сверху по включению по v при фиксированном τ и измеримо по Борелю по τ при фиксированном v и существует измеримая по Борелю функция $m_i^4(t, \tau, v) \in \Lambda_i^4(t, \tau, v)$.

Пусть $v(t)$ — произвольное программное управление убегающего. Предпишем i-му преследователю ($i = 1, \ldots, k$) строить свое управление $u_i(t)$ в момент t, $t \in [0, T]$ следующим образом. Если в момент времени $t \geqslant 0$

$$\rho_i(t; v(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant t) = 1 - \int_0^t \lambda(i, T, \tau, v(\tau), z_i^\circ, M_i^4)\, d\tau > 0$$

то функции $m_i^3(t) \in M_i^3$, $u_i(t) \in P_i$ — решение уравнения

$$(3) \qquad \begin{aligned} &-\varkappa_i(T, t) m_i^3(t) + \pi_i \exp(T - t) C_i \cdot (u_i(t) - v(t)) - \\ &-\beta_i(T, t) = -\lambda(i, T, t, v(t), z_i^\circ, M_i^4) \times \\ &\times \Big(\pi_i \exp TC_i \cdot z_i^\circ - m_i^4(T, t, v(t)) + \int_0^T \beta_i(T, \tau)\, d\tau\Big) \end{aligned}$$

Если t_1^i — первый момент времени, когда $\rho_i(t_1^i, v(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant t_1^i) = 0$, то для $t \in (t_1^i, T]$ функции $m_i^3(t) \in M_i^3$, $u_i(t) \in P_i$ — решение уравнения

$$(4) \qquad \begin{aligned} &-\varkappa_i(T, t) m_i^3(t) + \pi_i \exp(T - t) C_i \cdot (u_i(t) - v(t)) - \\ &-\beta_i(T, t) = 0 \end{aligned}$$

В силу (1) — (2) и условия A существует одно или много решений уравнений (3), (4). Согласно построениям, λ $(i, T, t, v(t), z_i^\circ, M_i^4)$, m_i^4 $(T, t, v(t))$ — измеримые функции t при фиксированных i, T, z°. Следовательно, в силу теоремы А. Ф. Филиппова [10] уравнения (3), (4) разрешимы в классе измеримых функций. Предпишем j-му преследователю ($j = k+1, \ldots, m$) выбирать управления $u_{k+1}(t), \ldots, u_m(t)$, для которых выполняется предположение 2.

Применяя стратегии u_i (t), преследователи могут гарантировать окончание преследования к моменту T. Если хотя бы для одного $t \leqslant t^*$ будет $q(t, v(\cdot)) \overline{\in} V(t, T, z^\circ)$, то убегающего в момент T ловит один из преследователей с номерами $i = 1, \ldots, k$.

Действительно, в этом случае найдется номер i, такой, что

$$\int_0^t \lambda(i, T, \tau, v(\tau), z_i^\circ, M_i^4)\, d\tau \geqslant 1$$

Обозначим через t_* первый момент t, когда

$$\int_0^{t_*} \lambda(i, T, \tau, v(\tau), z_i^\circ, M_i^4)\, d\tau = 1$$

Используя (3), (4) и формулу Коши для (1), получаем

$$\begin{aligned} \pi_i z_i(T) = \Bigl(\pi_i \exp TC_i \cdot z_i^\circ + \int_0^T \beta_i(T, \tau)\, d\tau\Bigr)\Bigl(1 - \\ - \int_0^{t_*} \lambda(i, T, \tau, v(\tau), z_i^\circ, M_i^4)\, d\tau\Bigr) + \int_0^{t_*} \lambda(i, T, \tau, v(\tau), \\ z_i^\circ, M_i^4)\, m_i^4(T, \tau, v(\tau))\, d\tau + \int_0^T \varkappa_i(T, \tau)\, m_i^3(\tau)\, d\tau \in M_i^2 \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. i-й преследователь ловит убегающего в момент T.

Если $q(t, v(\cdot)) \in V(t, T, z^\circ)$ для всех $t \leqslant t^*$, то в момент $t^* \lessapprox T$ убегающего ловит один из преследователей с номерами $j = k+1, \ldots, m$ в силу предположения 2.

Пусть для позиции z° выполнены предположения 1 и 3. Предпишем i-му преследователю ($i = 1, \ldots, k$) строить свое управление u_i (t) как решение уравненний (3), (4), а j-му ($j = k+1, \ldots, m$) — выбирать управления $u_{j+1}(t), \ldots, u_m(t)$, для которых выполнено предположение 3.

Покажем, что, применяя стратегии u_i (t), преследователи могут гарантировать окончание преследования к моменту T. Пусть $v(t)$ — произвольное программное управление убегающего. Если хотя бы для одного $t_* \leqslant T$ $q(t_*, v(\cdot)) \overline{\in} V(t_*, T, z^0)$, то убегающего в момент T ловит один из преследователей с номерами $i = 1, \ldots, k$ (см. (5)). Пусть для всех моментов времени $t \leqslant T$ $q(t, v(\cdot)) \in V(t, T, z^\circ)$. Для такого управления $v(t)$, $t \in [0, T]$ могут быть два случая: либо для всех t: $t \in [T_1, T_2]$

$$q(t, v(\cdot)) \in V(t, T, z^\circ) \cap \{x\colon \xi(x, t) \leqslant 0\}$$

либо существует момент времени t^*: $t^* \in [T_1, T_2]$, такой, что

$$q(t^*, v(\cdot)) \in V(t^*, T, z^\circ) \cap \{x\colon \xi(x, t^*) > 0\}$$

В первом случае, согласно предположению 3 и пп. б), в) условия $Б$, убегающий ловится одним из преследователей с номерами $k+1, \ldots, m$

к моменту T_2. Во втором случае имеем

$$\xi(q(T_1, v(\cdot)), T_1) \leqslant 0, \quad \xi(q(t^*, v(\cdot)), t^*) > 0$$

откуда в силу непрерывности ξ по совокупности аргументов следует существование момента $\theta \in [T_1, t^*]$, такого, что $\xi(q(\theta, v(\cdot)), \theta) = 0$. В силу предположения 3 и п. б) условия *Б* это означает, что убегающий ловится одним из преследователей с номерами $k+1, \ldots, m$ в момент θ. Теорема доказана.

Замечания. 1°. Предположение 1 выполняется, например, для такого класса игр. Уравнения движения преследующих объектов $x_i^{\cdot} = A_i x_i + u_i$, $u_i \in P_i$, $i = 1, \ldots, m$, $x_i, u_i \in R^n$, уравнения движения убегающего $y^{\cdot} = By + v$, $v \in Q$, $y, v \in R^n$, P_i, Q — выпуклые компакты, A_i, B — матрицы соответствующей размерности. Игра оканчивается, если хотя бы для одного i в некоторый момент t будет $\pi_i x_i \cdot (t) + M_i \supset \pi_i y(t)$, где π_i — $(l \times n)$-матрицы, $1 \leqslant l \leqslant n$, M_i — выпуклый компакт в R^l. В этом случае предположению 1 соответствует $\pi_i = \pi$, $i = k+1, \ldots m$.

2°. Условие *Б* (условие прочесывания множеством $N(t)$ множества $V(t, T, z^\circ)$ на отрезке $[T_1, T_2]$) есть условие разрешимости следующей задачи управляемости. В каждый момент $t \in [T_1, T_2]$ точки

$$-\pi_j \exp tC_i \cdot z_i^\circ - \int_0^t \pi_j \exp(t-\tau) C_j \cdot u_j(\tau)\, d\tau = \alpha_j(t)$$

должны располагаться на непрерывной поверхности $\{x\colon \xi(x, t) = 0\}$ так, чтобы была разрешима задача покрытия

$$\bigcup_{j=k+1}^{m} (\alpha_j(t) + M_j^2) \supset V(t, T, z^\circ) \cap \{x : \xi(x, t) = 0\}$$

причем в момент T_2 выполняются условия

$$N(T_2) \supset V(T_2, T, z^\circ) \cap \{x\colon \xi(x, T_2) \leqslant 0\}$$

Поверхность $\{x\colon \xi(x, t) = 0\}$, $t \in [T_1, T_2]$ должна удовлетворять двум условиям: а) прегораживать множество $V(t, T, z^\circ)$, т. е. для любой непрерывной кривой $\psi(t) \in V(t', T, z^\circ)$, $t \in [T_1, T_2]$, такой, что $\xi(\psi(t_0), t_0) > 0$, $\xi(\psi(t_1), t_1) > 0$, $T_1 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T_2$, существует момент $t_* \in [t_0, t_1]$, такой, что $\xi(\psi(t_*), t_*) = 0$; б) ее пересечение с $V(t, T, z^\circ)$ можно покрыть множествами $N_j(t)$ при некоторых допустимых $u_j(t)$.

Для решения задачи покрытия можно использовать результаты о решетчатых покрытиях шарами, обобщенными цилиндрами и другими выпуклыми телами [11, 12]. Решением задачи о покрытии является информация о множестве $\Omega_j(t)$ — возможных положений узлов решетки $\alpha_j(t) \in \Omega_j(t)$, при котором разрешима задача покрытия множествами $N_j(t)$, $j = k+1, \ldots, m$ множества $V(t, T, z^\circ) \cap \{x\colon \xi(x, t) = 0\}$. Задача управляемости тогда состоит в решении вопроса о возможности удержания $\alpha_j(t)$ в множестве $\Omega_j(t)$ при некоторых допустимых $u_j(t)$ на отрезке $[T_1, T_2]$.

Приведем примеры выбора поверхности $\{x : \xi(x, t) = 0\}$ и управлений $u_j(t)$, обеспечивающих выполнение предположений 1—3.

Пример 1. Пусть в уравнении (1)

$$C_i = 0,\ n = 2,\ P_i = S_{\rho_i}^2(0),\ Q = S_\sigma^2(0),\ M_i^1 = \{0\},\ M_i^2 = S_{l_i}^2(0)$$

$$\pi_i = E,\ i = 1, \ldots, m;\ \rho_i = \sigma,\ l_i = 0,\ i = 1, \ldots, k;\ \rho_i < \sigma,\ l_j > 0$$

$$j = k+1, \ldots, m$$

(E — единичная матрица размерности 2×2). В рассматриваемом случае предположение 1 выполнено; согласно (2), имеем

$$\lambda(i, t, \tau, v, z_i^\circ, 0) = [(z_i^\circ, v) + ((z_i^\circ, v)^2 + \| z_i^\circ \|^2 (\sigma^2 - (v, v)))]^{1/2} / \| z^\circ_i \|^2,$$

$$i = 1, \ldots, k$$

$$V(t, T, z^\circ) \in K(t, T, z^\circ) = \left\{-\int_0^t v(\tau)\, d\tau : \left(z_i^\circ, -\int_0^t v(\tau)\, d\tau\right) > -\frac{\| z_i^\circ \|^2}{2},\ i = 1, \ldots, k\right\}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае множество $V(t, T, z^\circ)$ принадлежит к полиэдральному выпуклому множеству

$$K = \left\{z : \left(z, \frac{z_i^\circ}{\|z_i^\circ\|}\right) > -\frac{\|z_i^\circ\|}{2}, \quad i = 1, \ldots, k\right\}$$

Приведем три характерных случая прочесывания множеством $N(t)$ множества $V(t, T, z^\circ)$ (внутри $K = K(t, T, z^\circ)$).

А) $k = 3$, $m = 5$; $\rho_i = \sigma = 1$, $i = 1, 2, 3$; $\rho_j = 1/2$, $l_j = 1\,{}^3/_5$, $j = 4{,}5$; $z_1^\circ = (2{,}0)$, $z_2^\circ = (3{,}2)$, $z_3^\circ = (-2{,}1)$, $z_4^\circ = (3, -7)$, $z_5^\circ = (-3\,{}^1/_2, -10\,{}^1/_2)$.

Множество $K = \{z : z_1 > -1,\ 3z_1 + 2z_2 > -6{}^1/_2,\ -2z_1 + z_2 > -2{}^1/_2\}$. Положим

$$\xi(z, t) = z_2 + {}^1/_2 t - 10{}^1/_2, \quad t \geqslant 7, \quad T_1 = 7.$$

Управления $u_4(t)$, $u_5(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 7$, которые при $t = T_1 = 7$ обеспечивают выполнение п. а) условия $Б$, имеют вид $u_4(t) = (-{}^1/_2, 0)$, $u_5(t) = (0, {}^1/_2)$, а управления $u_4(t)$, $u_5(t)$ обеспечивающие выполнение пп. б), в) условия $Б$, имеют вид $u_4(t) = (0, {}^1/_2)$, $u_5(t) = (0, {}^1/_2)$, $7 \leqslant t \leqslant 27$, $T_2 = 27$.

Заметим, что в этой позиции игра преследования разрешима и без участия преследующего игрока с номером 2, однако его наличие позволяет преследователям уменьшить время поимки.

Б) $k = 2$, $m = 4$; $\rho_i = \sigma = 1$, $i - 1{,}2$; $\rho_j = {}^1/_2$, $l_j = {}^3/_4$, $j = 3{,}4$; $z_1^\circ = (0, -1)$, $z_2^\circ = (0{,}2)$, $z_3^\circ = (-5{,}2\,{}^3/_4)$, $z_4^\circ = (5, -2\,{}^1/_4)$.

Множество $K = \{z: -1 < z_2 < {}^1/_2\}$. Положим

$$\xi(z, t) = z_1^2 + (z_2 + {}^1/_4)^2 - (7\,{}^1/_2 - {}^1/_2\, t)^2, \quad t \geqslant 5, \quad T_1 = 5$$

Управления $u_3(t)$, $u_4(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 5$, которые при $t = T_1 = 5$ обеспечивают выполнение п. а) условия $Б$, имеют вид $u_3(t) = (0, -{}^1/_2)$, $u_4(t) = (0, {}^1/_2)$, а управления $u_3(t)$, $u_4(t)$, обеспечивающие выполнение п. б), в) условия $Б$, имеют вид

$$u_3(t) = ({}^1/_2, 0), \quad u_4(t) = (-{}^1/_2, 0), \quad 5 \leqslant t \leqslant 15, \quad T_2 = 15$$

В) $k = 0$, $m = 8$, $\sigma = 1$, $\rho_j = {}^1/_2$, $l_j = 4$, $j = 1, \ldots, 8$;

$$z_1^\circ = (-15{,}0), \quad z_2^\circ = \left(-\left(\frac{10}{\sqrt{2}} + 5\right), -\frac{10}{\sqrt{2}}\right), \quad z_3^\circ = (0, -15)$$

$$z_4^\circ = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}, -\frac{10}{\sqrt{2}} - 5\right), \quad z_5^\circ = (15{,}0), \quad z_6^\circ = \left(\frac{10}{\sqrt{2}} + 5, \frac{10}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z_7^\circ = (5, 10), \quad z_8^\circ = \left(-\frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}} + 5\right)$$

Множество $K = R^2$. Положим

$$\xi(z, t) = z_1^2 + z_2^2 - (15 - {}^1/_2\, t)^2, \quad t \geqslant 10, \quad T_1 = 10$$

Управления $u_j(t)$, $j = 1, \ldots, 8$, $0 \leqslant t \leqslant 10$, которые при $t = T_1 = 10$ обеспечивают выполнение п. а) условия $Б$, имеют вид

$$u_1 = u_2 = ({}^1/_2, 0), \quad u_3 = u_4 = (0, {}^1/_2), \quad u_5 = u_6 = u_7 = (-{}^1/_2, 0), \quad u_8 = (0, -{}^1/_2)$$

а управления $u_j(t)$, $j = 1, \ldots, 8$, обеспечивающие выполнение пп. б), в) условия $Б$, имеют вид

$$u_1(t) = ({}^1/_2, 0), \quad u_2(t) = (\gamma, \gamma), \quad u_3(t) = (0, {}^1/_2)$$
$$u_4(t) = (-\gamma, \gamma), \quad u_5(t) = (-{}^1/_2, 0), \quad u_6(t) = (-\gamma, -\gamma)$$
$$u_7(t) = (0, -{}^1/_2), \quad u_8(t) = (\gamma, -\gamma), \quad 10 \leqslant t \leqslant 22, \quad T_2 = 22 \ (\gamma = 1/2\sqrt{2})$$

Пример 2. Пусть в уравнении (1)

$$n = 4, \quad C_i = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad u_i = \begin{Vmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_i \end{Vmatrix}, \quad v = \begin{Vmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{u}_i \in S^2_{\rho_i}(0)$$

$$\mathbf{v} \in S_\sigma^2(0), \quad M_i^1 = \left\{\begin{Vmatrix} 0 \\ \xi \end{Vmatrix}, \ \xi \in R^2\right\}, \quad L_i^1 = \left\{\begin{Vmatrix} \eta \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \eta \in R^2\right\}$$

$$M_i^2 = \left\{\begin{Vmatrix} \eta \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \eta \in S^2_{l_i}(0)\right\}; \quad l_i = 0, \quad \rho_i = \sigma, \quad i = 1, \ldots, k$$

$$\rho_j < \sigma, \quad l_j > 0, \quad j = k + 1, \ldots, m$$

(E — единичная матрица размером 2×2). Положим $z_i = (z_{i1}, z_{i2})$, $z_{i1}, z_{i2} \in R^2$, $i = 1, \ldots, m$. В рассматриваемом случае предположение 1 выполнено; согласно (2)

$$\lambda(i, t, \tau, v, z_i^\circ, 0) = [(z_{i1}^\circ + tz_{i2}^\circ, (t-\tau)\mathbf{v}) + ((z_{i1}^\circ + z_{i2}^\circ t, (t-\tau)\mathbf{v})^2 + \\ + \| z_{i1}^\circ + z_{i2}^\circ t \|^2 (\sigma^2 (t-\tau)^2 - (\mathbf{v}, \mathbf{v})(t-\tau)^2))^{1/2}] / \| z_{i1}^\circ + z_{i2}^\circ t \|^2$$

$$i = 1, \ldots, k, \quad V(t, T, z^\circ) \in K(t, T, z^\circ) =$$

$$= \left\{ z : \left(z, \frac{z_{i1}^\circ + z_{i2}^\circ T}{\| z_{i1}^\circ + z_{i2}^\circ T \|} \right) > (t - T)t\sigma - \frac{\| z_{i1}^\circ + z_{i2}^\circ T \|}{2}, \quad i = 1, \ldots, k \right\}$$

Приведем характерный случай прочесывания множеством $N(t)$ множества $V(t, T, z^\circ)$ (внутри $K(t, T, z^\circ)$). Положим $k = 2$, $m = 4$; $\rho_i = \sigma = 1$, $i = 1, 2$, $\rho_j = {}^1/_2$, $l_j = 2$, $j = 3, 4$; $z_{11}^\circ = (0, -3)$, $z_{12}^\circ = (0, {}^1/_2)$, $z_{21}^\circ = (0,2)$, $z_{22}^\circ = (-{}^1/_6, -{}^4/_3)$, $z_{31}^\circ =$
$= (-4\,{}^1/_2, -1)$, $z_{32}^\circ = (4, 0)$, $z_{41}^\circ = (-4\,{}^1/_2, 3)$, $z_{42}^\circ = (4, -{}^3/_4)$.

Перебирая $T > 0$ и исследуя возможность решения задачи прочесывания для области $K(t, T, z^\circ)$, заметим, что она разрешима, например, при $T = 3$, для

$$K(t, 3, z^\circ) = \{z : z \in R^2, (z, \omega_1) > (t - 3)t - {}^3/_4$$

$$(z, \omega_2) > (t - 3)t - \frac{\sqrt{17}}{4} \Big\}, \quad \xi(z, t) = z_1 - 4\,{}^1/_2 + 4t + \frac{t^2}{4}$$

$$t \geqslant 0, \; T_1 = 0, \; \omega_1 = (0, -1), \; \omega_2 = (\chi, 4\chi), \; \chi = -1/\sqrt{17}$$

Управления $\mathbf{u}_3(t)$, $\mathbf{u}_4(t)$, $t \in [0, 3]$, обеспечивающие выполнение условия $Б$, имеют вид $\mathbf{u}_3(t) = \mathbf{u}_4(t) = ({}^1/_2, 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.— Мат. сб., 1980, т. 112, № 3, с. 307—330.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. *Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц.— Тр. матем. ин-та им. Стеклова В. А., 1977, т. 143, с. 105—128.
5. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. М.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
6. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппорт И. С.* Преследования несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 4, с. 785—789.
7. *Григоренко Н. Л.* К линейной задаче преследования несколькими объектами.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 2, с. 275—279.
8. *Григоренко Н. Л.* К задаче преследования несколькими объектами.— Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. киберн., 1982, № 1, с. 49—55.
9. *Фарбер М. Ш.* Дифференциальные сечения многозначных отображений.— В кн.: Вопросы математической кибернетики и прикладной математики. Вып. 3. Баку: ЭЛМ, 1978, с. 47—60.
10. *Варга Д.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
11. *Тот Л. Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. 363 с.
12. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968. 134 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.IV.1982