Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 62—50

О ПОЗИЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.

Рассматривается задача о моделировании запаздываний и управлений в динамической системе, описываемой обыкновенными дифференциально-разностными уравнениями. Моделирование ведется в темпе «реального» времени по принципу обратной связи на основании информации о текущих фазовых состояниях системы, измеряемых с некоторой ошибкой. Предлагаемый алгоритм моделирования — алгоритм восстановления неизвестных запаздываний и управлений — является регуляризирующим в том смысле, что результат моделирования становится тем лучше, чем меньше ошибки измерения фазовых положений системы. Идейным источником предлагаемого способа решения задачи является принцип экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [1, 2]. Работа продолжает исследования [3, 4] и примыкает к [1—5].

1. Имеется управляемая система

$$x^{\cdot}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t)),\ u(t)),\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

$$x(t_0+s) = x_0(s),\quad s \in [-\beta,\ 0] \tag{1.2}$$

Здесь x — фазовый вектор, u — управление, τ — запаздывание, t — время. Имеется измерительное устройство, с некоторой ошибкой оценивающее в текущие моменты $t \in [t_0,\ \vartheta]$ фазовое состояние системы $x(t)$. Результат оценивания — вектор $\psi(t)$. Требуется указать позиционный алгоритм [1], восстанавливающий (в некотором смысле) на основании этой информации к моменту ϑ запаздывание и управляющую силу, а также начальное состояние, из которого в момент t_0 началось движение системы. Таково содержательное описание задачи.

Уточним постановку задачи. Пусть заданы компакты $P \subset R^m$, $Q \subset R^n$ (R^ν — ν-мерное пространство с евклидовой нормой, обозначаемой $\|\cdot\|$), n-мерная функция $f(t,\ x,\ y,\ u)$, $t \in [t_0,\ \vartheta]$, $x,\ y \in R^n$, $u \in R^m$, и числа $\alpha \geqslant 0$, $\beta > \alpha$. Пусть

$$\|\psi(t) - x(t)\| \leqslant \beta_*,\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.3}$$

где $x(t)$ — движение системы (1.1), (1.2). Измеримые (по Лебегу) функции $\tau(t)$: $[t_0, \vartheta] \to [\alpha,\ \beta]$ и $u(t)$: $[t_0, \vartheta] \to P$ и борелевская функция $x_0(s)$: $[-\beta,\ 0] \to Q$ неизвестны. Задана выпуклая, положительно однородная, непрерывная функция $\omega(w)$: $R_+ \to R_+$ ($R_+ = \{w \in R^1 \mid w \geqslant 0\}$), $\omega(0) = 0$, непрерывно дифференцируемая в области $\{w > 0\}$.

По заданному $\varepsilon > 0$ требуется указать позиционную процедуру формирования управления $u_\varepsilon[t] = u(t,\ \psi_t(s))$, запаздывания $\tau_\varepsilon[t] = \tau(t,\ \psi_t(s))$ ($\psi_t(s) = \psi(t+s)$, $s \in [-\beta,\ 0]$) и начального состояния $z_{0\varepsilon}[s]$, $-\beta \leqslant s \leqslant 0$, таких, что

$$\omega(\|x(t) - z[t]\|) \leqslant \varepsilon,\qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.4}$$

где $z[t]$ — решение дифференциального уравнения

$$z^{\cdot}[t] = f(t,\ z[t],\ z[t-\tau_\varepsilon[t]],\ u_\varepsilon[t]),\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

$$z[t_0+s] = z_{0\varepsilon}[s],\quad -\beta \leqslant s \leqslant 0$$

Для реализации предлагаемого алгоритма достаточно в моменты $t \in [t_0, t_0 + \beta)$ знать лишь вектор $\psi(t)$. Отметим также, что функция $z_{0\varepsilon}[s]$ будет определена уже к моменту $t_0 + \beta$.

В п. 1 работы указывается способ решения задачи, пригодный для реализации на ЭВМ. В пп. 2, 3 обсуждаются вопросы о сходимостях $\tau_\varepsilon[t]$ и $z_{0\varepsilon}[s]$ к реальным $\tau(t)$ и $x_0(s)$ при $\varepsilon \to 0+$. В п. 4 приводятся два модельных примера.

Задачи восстановления запаздываний, управлений и начальных функций по априорно известному набору $\{C\psi(t_1), C\psi(t_2), \ldots, C\psi(t_N)\}$ ($t_i \in [t_0, \vartheta]$ — фиксированные моменты времени) рассматривались в [6—8], причем в [6, 7] рассматривались только линейные системы, а в [8] нелинейные системы изучались с помощью метода линеаризации и аппарата теории чувствительности. Существенная особенность задач, рассматриваемых в данной рабте, состоит в том, что здесь речь идет о позиционном восстановлении этих величин в условиях, когда о функции $\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ заранее нет никакой информации.

Обозначим через $\{\mu\}$ и $\{\mu_1\}$ множества всех слабо измеримых по t борелевских вероятностных мер $\mu_t(dv)$, сосредоточенных при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ на множествах $[\alpha, \beta]$ и Q соответственно [9]; $S(a) \subset R^n$ — замкнутый единичный шар радиуса a с центром в нуле; $\|\cdot\|_C$ — норма в пространстве $C^n[t_0, \vartheta]$ непрерывных на $[t_0, \vartheta]$ n-мерных функций; X — пучок всех решений системы (1.1), (1.2), отвечающий всевозможным измеримым по Лебегу функциям $u(t)$: $[t_0, \vartheta] \to P$; $\tau(t)$: $[t_0, \vartheta] \to [\alpha, \beta]$ и борелевским функциям $x_0(s)$: $[-\beta, 0] \to Q$; $X_{t_*} \subset R^n$ — сечение пучка X гиперплоскостью $t = t_*$; Δ — разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками $t_0 < t_1 < \ldots < t_{l(\Delta)} = \vartheta$ $(l(\Delta) < \infty)$ с диаметром $\delta(\Delta) = \max_i (t_{i+1} - t_i)$; $V(x)$ — градиент функции $\omega_*(x) = \omega(\|x\|)$; штрих означает транспонирование.

В дальнейшем предполагаем, что функция $f(t, x, y, u)$ непрерывна по t, u, локально липшицевая по x, y и равномерно по $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in P$ удовлетворяет условию роста

$$\|f(t, x, y, u)\| \leqslant c_1 + c_2\|x\| + c_3\|y\| \tag{1.5}$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные. Имеет место

Лемма 1.1. Множество X компактно [10] в $C^n[t_0, \vartheta]$.

Опишем алгоритм решения задачи. Положим

$$\begin{gathered} z_{0\varepsilon}[0] = x_0 \\ z_{0\varepsilon}[s] = x_{\varepsilon i}, \quad s \in [t_i - t_0 - \beta,\ t_{i+1} - t_0 - \beta), \quad t_{i+1} < t_0 + \beta \\ u_\varepsilon[t] = u_{\varepsilon i}, \quad \tau_\varepsilon[t] = \tau_{\varepsilon i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \end{gathered} \tag{1.6}$$

где векторы x_0, $x_{\varepsilon i}$, $u_{\varepsilon i}$ и числа $\tau_{\varepsilon i}$ при $t = t_i$ выбираются из следующих условий. При $t = t_0$ $\tau_{\varepsilon 0} = \beta$, $u_{\varepsilon 0}$ — произвольный вектор из P, x_0 и $x_{\varepsilon 0}$ — любые из векторов, удовлетворяющих равенствам

$$\begin{gathered} \omega(\|\psi(t_0) - x_0\|) = \min_{x \in Q} \omega(\|\psi(t_0) - x_0\|) \\ V'(\psi(t_0) - x_0) f(t_0, \psi(t_0), x_{\varepsilon 0}, u_{\varepsilon 0}) = \\ = \max_{x \in Q} V'(\psi(t_0) - x_0) f(t_0, \psi(t_0), x, u_{\varepsilon 0}) \end{gathered} \tag{1.7}$$

если $\psi(t_0) \notin Q$; если же $\psi(t_0) \in Q$, то $x_{\varepsilon 0}$ — любой вектор из Q. В момент $t = t_i \in (t_0, t_0 + \beta)$ векторы $\tau_{\varepsilon i}$, $u_{\varepsilon i}$, $x_{\varepsilon i}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \tau_{\varepsilon i} = \beta, \quad V'(\psi(t_i) - r(t_i)) f(t_i, \psi(t_i) \\ x_{\varepsilon i}, u_{\varepsilon i}) = \max_{\substack{u \in P \\ x \in Q}} V'(\psi(t_i) - r(t_i)) f(t_i, \psi(t_i), x, u) \end{gathered} \tag{1.8}$$

если $\psi(t_i) \neq r(t_i)$; в противном случае $u_{\varepsilon i}$ и $x_{\varepsilon i}$ — любые вектора из P и Q соответственно. Здесь $r(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_i$ — решение уравнения

$$r^{\cdot}(t) = f(t, \psi(t_j), x_{\varepsilon j}, u_{\varepsilon j}) \tag{1.9}$$
$$t_{j-1} \leqslant t < t_j, \quad j = 1, \ldots, i, \quad r(t_0) = x_0$$

Если $t_i \geqslant t_0 + \beta$, то $u_{\varepsilon i}$, $\tau_{\varepsilon i}$ выбираются при $\psi(t_i) \neq g(t_i)$ из условия

$$V'(\psi(t_i) - g(t_i)) f(t_i, \psi(t_i), \psi(t_i - \tau_{\varepsilon i}), u_{\varepsilon i}) = \tag{1.10}$$
$$= \max_{\substack{\xi \in [\alpha, \beta] \\ u \in P}} V'(\psi(t_i) - g(t_i)) f(t_i, \psi(t_i), \psi(t_i - \xi), u)$$

а при $\psi(t_i) = g(t_i)$ — $u_{\varepsilon i}$, $\tau_{\varepsilon i}$ — любые векторы из P и $[\alpha, \beta]$. Здесь $g(t)$, $t_0 + \beta \leqslant t \leqslant t_i$ — решение уравнения

$$g^{\cdot}(t) = f(t, \psi(t), \psi(t - \tau_{\varepsilon j}), u_{\varepsilon j}) \tag{1.11}$$
$$t_0 + \beta \leqslant t_j \leqslant t < t_{j+1} \leqslant t_i, \quad g(t_0 + \beta) = r(t_0 + \beta)$$

Указанная процедура осуществляется до момента $t_i = \vartheta$.

Теорема 1.1. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, что, каковы бы ни были число $\beta_* \leqslant \gamma_1$ и разбиение Δ с диаметром $\delta(\Delta) \leqslant \gamma_2$, справедливо неравенство (1.4), если $z_{0\varepsilon}[s]$, $u_\varepsilon[t]$ и $\tau_\varepsilon[t]$ определены согласно (1.6).

Доказательство. Примем следующие обозначения:

$$a = \sup\{\|x\| \mid x \in X_t, \ t \in [t_0, \vartheta], \ x \in Q\}$$
$$b_1 = \sup\{\|f(t, x, y, u)\| \mid t \in [t_0, \vartheta], x \in X_t, y \in Q \cup \{\bigcup_{t-\beta \leqslant \xi \leqslant t} X_\xi\}, u \in P\}$$
$$b(\delta) = \sup\{\|V(x)\| \mid x \in S(2a - \delta)\}, \qquad \delta < 2a$$
$$\varphi(\alpha) = \sup\{\|f(\xi, x, y, u) - f(t, x, y, u)\| \mid u \in P, x, y \in S(a)$$
$$t, \xi \in [t_0, \vartheta], \ |t - \xi| \leqslant \alpha\}$$

$y(t) = r(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \beta]$, $y(t) = g(t)$ при $t \in (t_0 + \beta, \vartheta]$, $r(t)$ и $g(t)$ — решения уравнений (1.9) и (1.11) соответственно.

Зафиксируем $\varepsilon_1 > 0$ и покажем существование таких чисел $\delta_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$, что при всех $\beta_* \leqslant \beta_1$ и $\delta(\Delta) \leqslant \delta_1$

$$\omega(\|x(t) - y(t)\|) \leqslant \varepsilon_1, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.12}$$

В силу свойств функции ω найдется $\delta_2 > 0$, такое, что при $w \in [0, \delta_2]$

$$\omega(w) \leqslant \varepsilon_2 = {}^1/_2\varepsilon_1 \tag{1.13}$$

Учитывая оценку

$$\|y(t) - x(t) - y(t_i) + \psi(t_i)\| \leqslant \beta_* + 2b_1\delta(\Delta), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \tag{1.14}$$

выберем числа $\delta_3 \in (0, \delta_2)$, $\beta_3 > 0$ исходя из неравенства

$$\beta_3 + 2\delta_3 b_1 < {}^1/_2\delta_2 \tag{1.15}$$

Предположим, что при некотором $t \in [t_0, \vartheta]$ нарушается неравенство (1.12). В силу непрерывности функций $\omega(w)$ и $\|x(t) - y(t)\|$ можно построить отрезок $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, на котором

$$\omega(\|x(t) - y(t)\|) > \varepsilon_2 \tag{1.16}$$

Пусть $i_1 = \max\{i \in [0: l(\Delta)] \mid t_i \leqslant t_*\}$, $i_2 = \min\{i \in [0: l(\Delta)] \mid t_i \geqslant t^*\}$. Тогда из (1.13)—(1.16) при $\delta(\Delta) \leqslant \delta_3$ и $\beta_* \leqslant \beta_3$ следуют оценки

(1.17) $\quad \| y(t) - x(t) \| \geqslant {}^1/_2\delta_2, \quad t_{i_1} \leqslant t \leqslant t^*; \quad \| y(t_i) - \psi(t_i) \| \geqslant$
$\geqslant {}^1/_2\delta_2, \quad i_1 \leqslant i < i_2$

(1.18) $\quad \omega(\| y(t_i) - x(t_i) \|) \leqslant \max \{\varepsilon_2, \ \omega(\| x(t_0) - x_0 \|)\} \leqslant \varepsilon_2$

На отрезке $[t_{i_1}, t^*]$ функция $\omega(\| x(t) - y(t) \|)$ абсолютно непрерывна, поэтому при $t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [t_{i_1}, t_{i_2}] \cap [t_0, t_0 + \beta]$

(1.19) $$\omega(\| y(t) - x(t) \|) \leqslant \omega(\| y(t_i) - x(t_i) \|) + \int_{t_i}^{t} V'(x(\xi) -$$
$$- y(\xi)) \{f(\xi, x(\xi), x(\xi - \tau(\xi)), u(\xi)) - f(\xi, \psi(t_i), x_{\varepsilon i}, u_{\varepsilon i})\} d\xi$$

По $\varepsilon_3 > 0$, так как функция $V(x)$ непрерывна в области $\{x \in R^n \mid \| x \| > 0\}$ и справедлива лемма 1.1, можно указать такое $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon_3) > 0$, что при $\delta(\Delta) \leqslant \delta_4, \quad \xi \in [t_i, t_{i+1}], \ i_1 \leqslant i < i_2$

(1.20) $\quad \| V(x(t_i) - y(t_i)) - V(x(\xi) - y(\xi)) \| \leqslant \varepsilon_3$

Причем эта оценка равномерна по всем $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, удовлетворяющим (1.17), и всем разбиениям Δ с диаметром $\delta(\Delta) \leqslant \delta_4$. Кроме того, равномерно по $y \in Q$, $x(\cdot) \in X$, $u \in P$

(1.21) $\quad \| f(\xi, x(\xi), y, u) - f(t, x(t), y, u) \| \leqslant L \mid \xi - t \mid +$
$+ \varphi(\mid \xi - t \mid)$

где L — постоянная Липшица функции $f(t, x, y, u)$ в области $D \subset R^n$, в которой остаются все рассматриваемые движения. Таким образом, при $\beta_* \leqslant \beta_3$ и $\delta(\Delta) \leqslant \delta_5 = \min\{\delta_3, \delta_4\}$ из (1.19)—(1.21) получаем

(1.22) $$\omega(\| y(t) - x(t) \|) \leqslant \omega(\| y(t_i) - x(t_i) \|) +$$
$$+ \int_{t_i}^{t} V'(\psi(t_i) - y(t_i)) \{f(t_i, \psi(t_i), x(\xi - \tau(\xi)), u(\xi)) - f(t_i,$$
$$\psi(t_i), x_{\varepsilon i}, u_{\varepsilon i})\} d\xi + \overline{\varphi}(\varepsilon_3, \beta_*, \delta(\Delta)) \delta(\Delta)$$
$$\overline{\varphi} = 4\varepsilon_3 b_1 + b({}^1/_2\delta_2)\{2\varphi(\delta(\Delta)) + L\delta(\Delta) + L\beta_*\}$$

Отсюда и из (1.18), (1.19) в свою очередь следует

(1.23) $\quad \omega(\| y(t) - x(t) \|) \leqslant \omega(\| y(t_i) - x(t_i) \|) +$
$+ \overline{\varphi}(\varepsilon_3, \beta_*, \delta(\Delta)) \delta(\Delta), \qquad t \in [t_i, t_{i+1}]$

Пусть $t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [t_{i_1}, t_{i_2}] \cap [t_0 + \beta, \vartheta]$. Тогда аналогично (1.22) выводится оценка, из которой в силу (1.10), (1.11) получаем

(1.24) $\quad \omega(\| y(t) - x(t) \|) \leqslant \omega(\| y(t_{i_1}) - x(t_{i_1}) \|) +$
$+ \{\overline{\varphi}(\varepsilon_3, \beta_3, \delta_5) + b({}^1/_2\delta_2) L\beta_*\}(\vartheta - t_0), \ t \in [t_{i_1}, t_{i_2}]$

Будем считать, что числа ε_3, β_3 и δ_5 удовлетворяют неравенству

(1.25) $\quad \{\overline{\varphi}(\varepsilon_3, \beta_3, \delta_5) + b({}^1/_2\delta_2) L\beta_*\}(\vartheta - t_0) \leqslant \varepsilon_2$

Тогда из (1.18), (1.24) получаем противоречие с (1.12). Значит, если в качестве β_1 и δ_1 взять $\beta_3 = \beta_3(\varepsilon_1)$ и $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon_1)$, определенные согласно указанной выше процедуре, то будет выполняться неравенство (1.12).

Теперь оценим изменение функции $\omega(\| z[t] - x(t) \|)$ при изменении t в пределах от t_0 до ϑ. Так как $\omega(w)$ — возрастающая функция, то

(1.26) $$\omega(\| z[t] - y(t) \|) \leqslant \omega\Big(kL \int_{t_0}^{t} \| z[\xi] - x(\xi) \| d\xi +$$
$$+ aL(t - t_0)\delta(\Delta) + 2\beta_* L(t - t_0); \ k = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, t_0 + \beta] \\ 2, & t \in (t_0 + \beta, \vartheta] \end{cases}$$

Из (1.12), (1.26), учитывая выпуклость и положительную однородность функции $\omega(w)$, в силу интегрального неравенства Иенсена [10] имеем

$$\omega(\|z[t]-x(t)\|)\leqslant 2L\int_{t_0}^{t}\omega(\|z[\xi]-x(\xi)\|)\,d\xi+$$
$$+\varepsilon_1+\omega(a(\vartheta-t_0)\,\delta(\Delta)+2\beta_*(\vartheta-t_0))$$

Следовательно

$$\omega(\|z[t]-x(t)\|)\leqslant\{\varepsilon_1+(\vartheta-t_0)\,\omega(a\delta(\Delta)+2\beta_*)\}\times$$
$$\times\exp 2L(t-t_0)$$

Теперь можно положить $\gamma_1=\min\{\delta_5(\varepsilon_1),\ \delta_6(\varepsilon)\}$, $\gamma_2=\min\{\beta_3(\varepsilon_1),\ \beta_4(\varepsilon)\}$, считая, что ε_1, β_4 и δ_6 удовлетворяют неравенствам

$$\varepsilon_1\exp 2L(\vartheta-t_0)\leqslant {}^1/_2\varepsilon$$
$$\omega(a(\vartheta-t_0)\,\delta_6+2\beta_4(\vartheta-t_0))\exp 2L(\vartheta-t_0)\leqslant {}^1/_2\varepsilon$$

Теорема доказана.

Пусть задана некоторая последовательность чисел $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j\to 0+$ при $j\to\infty$. Из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1. Существуют последовательности чисел $\{\delta_j\}$ и $\{\beta_j^*\}$, $\delta_i\to 0+$, $\beta_j^*\to 0+$ при $j\to\infty$, такие, что, каковы бы ни были разбиения $\Delta_j=\{t_i^{(j)}\}$, $i=0,\ldots,l(\Delta_j)<\infty$ с диаметрами $\delta(\Delta_j)\leqslant\delta_j$ и каковы бы ни были функции $\psi_j(t)$, $\|\psi_j(t)-x(t)\|_C\leqslant\beta_j^*$, справедливы неравенства $\|z_j[t]-x(t)\|_C\leqslant\varepsilon_j$.

Здесь $z_j[t]$ — решение уравнения $(\tau[t;\ \varepsilon_j]=\tau_{\varepsilon_j}[t])$

$$z^{\boldsymbol\cdot}[t]=f(t,\ z[t],\ z[t-\tau[t;\ \varepsilon_j]],\ u_{\varepsilon_j}[t]) \tag{1.27}$$
$$t_0\leqslant t\leqslant\vartheta,\quad z[t_0+s]=z_{0\varepsilon_j}[s]$$

а функции $z_{0\varepsilon_j}[s]$, $u_{\varepsilon_j}[t]$, $\tau_{\varepsilon_j}[t]$ определяются по $\psi_j(t)$ согласно алгоритму, изложенному выше.

2. Пусть функции $x_0(s)$ и $u(t)$ известны, а сигнал $\psi(t)$ поступает без помех (в (1.3) $\beta_*=0$). Возникает вопрос о сходимости последовательности $\tau[t;\ \varepsilon_j]$ к $\tau(t)$. Ниже будут доказаны утверждения, дающие в некоторых случаях утвердительный ответ на этот вопрос. В дальнейшем для краткости символ $u(t)$ в (1.1) будем опускать.

Теорема 2.1. Пусть существует единственная мера $\mu_t^*(dv)\in\{\mu\}$, такая, что

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\int_{[\alpha,\beta]}f(\xi,x(\xi),x(\xi-v))\,\mu_\xi^*(dv)\,d\xi,\quad t_0\leqslant t\leqslant\vartheta \tag{2.1}$$

Тогда $\tau[t;\ \varepsilon_j]\to\tau(t)$ в $L_2^n[t_0,\ \vartheta]$.

Доказательство. Предположим, что найдется подпоследовательность $\{\tau[t;\ \varepsilon_{j(i)}]\}$ $(j(i)\to\infty$ при $i\to\infty)$, такая, что $\tau[t;\ \varepsilon_{j(i)}]\not\to\tau(t)$ в $L_2^n[t_0,\ \vartheta]$. Пусть $\{\mu_t^{(j)}(dv)\}\in\{\mu\}$ — последовательность со свойством

$$\int_{t_0}^{t}\int_{[\alpha,\beta]}f(\xi,z_j[\xi],z_j[\xi-v])\,\mu_\xi^{(j)}(dv)\,d\xi= \tag{2.2}$$
$$=\int_{t_0}^{t}f(\xi,z_j[\xi],z_j[\xi-\tau[\xi;\varepsilon_j]])\,d\xi,\quad t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$$

(здесь и ниже $z_j[t]$ — решение системы (1.28)). Тогда, не нарушая общности, можно считать

$$\mu_t^{(j(i))}(dv)\to\bar\mu_t(dv)\ \text{слабо [9]},\quad \bar\mu_t(dv)\neq\mu_t^*(dv) \tag{2.3}$$

Ибо, если $\bar{\mu}_t(dv) = \mu_t^*(dv)$, то, как следует из результатов работы [11], $\tau[t; \varepsilon_{j(i)}] \to \tau(t)$ в $L_2^n[t_0, \vartheta]$. Поэтому в $C^n[t_0, \vartheta]$

$$\lim_{i\to\infty}\left\{x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{[\alpha,\beta]} f(\xi, x(\xi), x(\xi - v))\,\mu_\xi^{(j(i))}(dv)\,d\xi\right\} = \tag{2.4}$$

$$= \lim_{i\to\infty} z_{j(i)}[t] = x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{[\alpha,\beta]} f(\xi, x(\xi), x(\xi - v))\,\bar{\mu}_\xi(dv)\,d\xi$$

Однако, по условию, существует единственная мера, удовлетворяющая (2.1). Следовательно, в силу (2.3), (2.4) найдется $t_* \in [t_0, \vartheta]$, такое, что $\lim\limits_{i\to\infty} z_{j(i)}[t_*] \neq \psi(t_*)$. Это противоречит тому, что $z_j[t] \to x(t)$ в $C^n[t_0, \vartheta]$ (см. следствие 1.1). Теорема доказана.

Обозначим через L множество мер $\mu_t(dv) \in \{\mu\}$, удовлетворяющих (2.1).

Теорема 2.2. Пусть любая мера $\mu_t(dv) \in L$ сосредоточенная. Тогда последовательность $\{\tau[t; \varepsilon_j]\}$ сходится в $L_2^n[t_0, \vartheta]$ к L.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.3. Пусть $f(t, x, y) = A(t)y + f(t, x)$ и матрицы $A(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ невырождены. Тогда $x(t - \tau[t; \varepsilon_j]) \to x(t - \tau(t))$ слабо в $L_2^n[t_0, \vartheta]$.

3. Укажем условия сходимости $z_{0\varepsilon_j}[s]$ к $x_0(s)$, когда запаздывание $\tau(t) = \beta = \mathrm{const}$ известно и $\beta_* = 0$. При этом будем считать $\vartheta = t_0 + \beta$.

Теорема 3.1. Пусть существует единственная мера $\mu_t(dv) \in \{\mu_1\}$, такая, что

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{Q} f(\xi, x(\xi), \vartheta)\,\mu_\xi(dv)\,d\xi, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{3.1}$$

Тогда $z_{0\varepsilon_j}[s] \to x_0(s)$ в $L_2^n[-\beta, 0]$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда $z_{0\varepsilon_j}[s] \to x_0(s)$ слабо в $L_2^n[-\beta, 0]$.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 аналогичны доказательствам теорем 2.1. и 2.3 соответственно.

Замечания 1°. Утверждения работы остаются справедливыми, если известен компакт $T_* \subset [\alpha, \beta]$, такой, что $\tau(t) \in T_*$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В этом случае во всех наших построениях будет фигурировать множество T_*, а не $[\alpha, \beta]$.

2°. При $T_* = \{\alpha, \beta\}$ условие (2.1) будет выполнено, если, каково бы ни было $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(t + s_1) \neq x(t + s_2)$ при всех $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$ и для любых $y_1, y_2 \in S(a)$, $y_1 \neq y_2$

$$f(t, x(t), y_1) \neq f(t, x(t), y_2) \text{ при почти всех } t \in [t_0, \vartheta] \tag{3.2}$$

3°. Условие (3.1) будет выполнено, если множество Q состоит из двух точек и справедливо (3.2).

4. Для системы

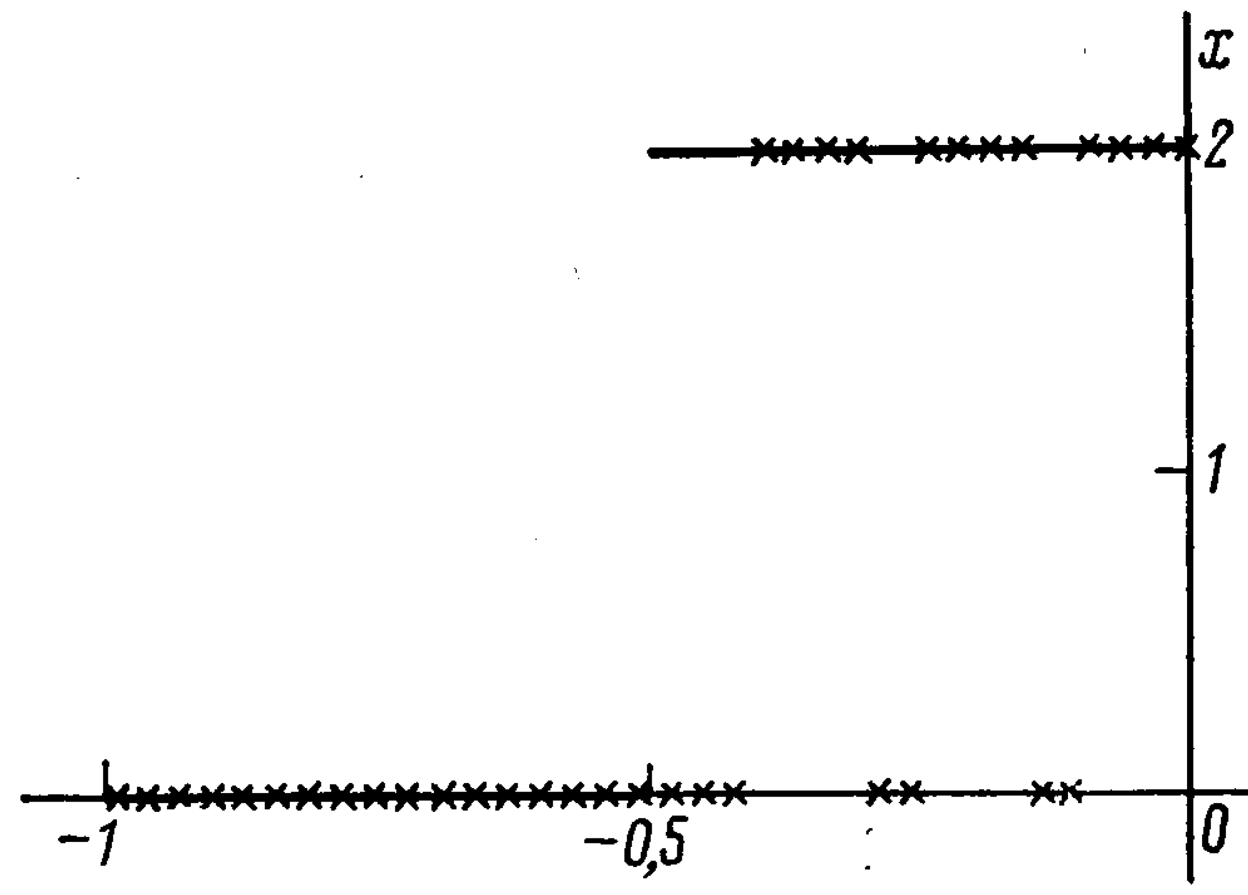
$$x^\cdot(t) = 2{,}5\cos x(t) + 1{,}7\sin x(t-1) \tag{4.1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in R^1, \quad Q = \{0, 2\}$$

была смоделирована задача восстановления начальной функции $x_0(s)$. Предполагалось $\delta(\Delta) = t_{i+1} - t_i = 0{,}005$. Траектория $x(t)$ системы (4.1), отвечающая $x_0(s) = 2$ при $s \in [-^1/_2, 0]$, $x_0(s) = 0$ при $s \in [-1, -^1/_2)$, считалась методом Эйлера. На фиг. 1 изображены функции $z_{0\varepsilon_1}[s]$ (сплошные линии) и $z_{0\varepsilon_2}[s]$ (крестики), отвечающие $\psi(t_i) = x(t_i) + 0{,}01$

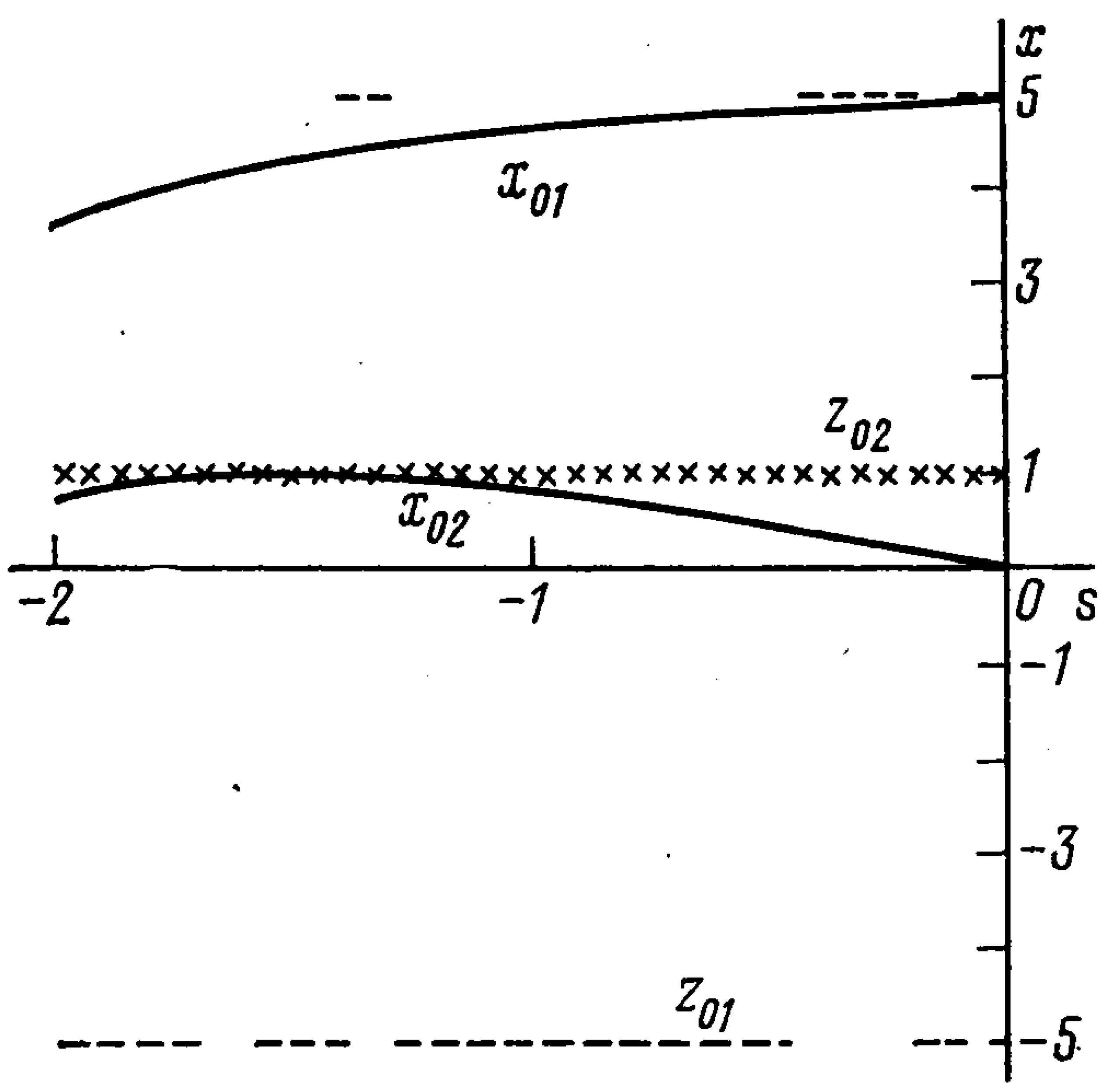
и $\psi(t_i) = x(t_i) - 0{,}1$. Для движений $x(t)$ и $z_1[t]$ ($z_2[t]$), где $z_1[t]$ ($z_2[t]$) соответствует начальной функции $z_{0\varepsilon_1}[s]$ ($z_{0\varepsilon_2}[s]$), справедлива оценка $|x(t) - z_1[t]|_C \leqslant 0{,}02$ ($|x(t) - z_2[t]|_C \leqslant 0{,}1$). Для системы

$$
(4.2) \qquad \begin{aligned}
&x_1^{\cdot}(t) = x_2(t),\\
&x_2^{\cdot}(t) = -36x_1(t) -\\
&- u(t)\, x_1(t - \tau(t)) -\\
&-9x_2(t)\\
&0 \leqslant t \leqslant 4, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2,\\
&P = \{u \mid |u| \leqslant 3\}\\
&Q = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqslant 5,\\
&|x_2| \leqslant 1\}
\end{aligned}
$$

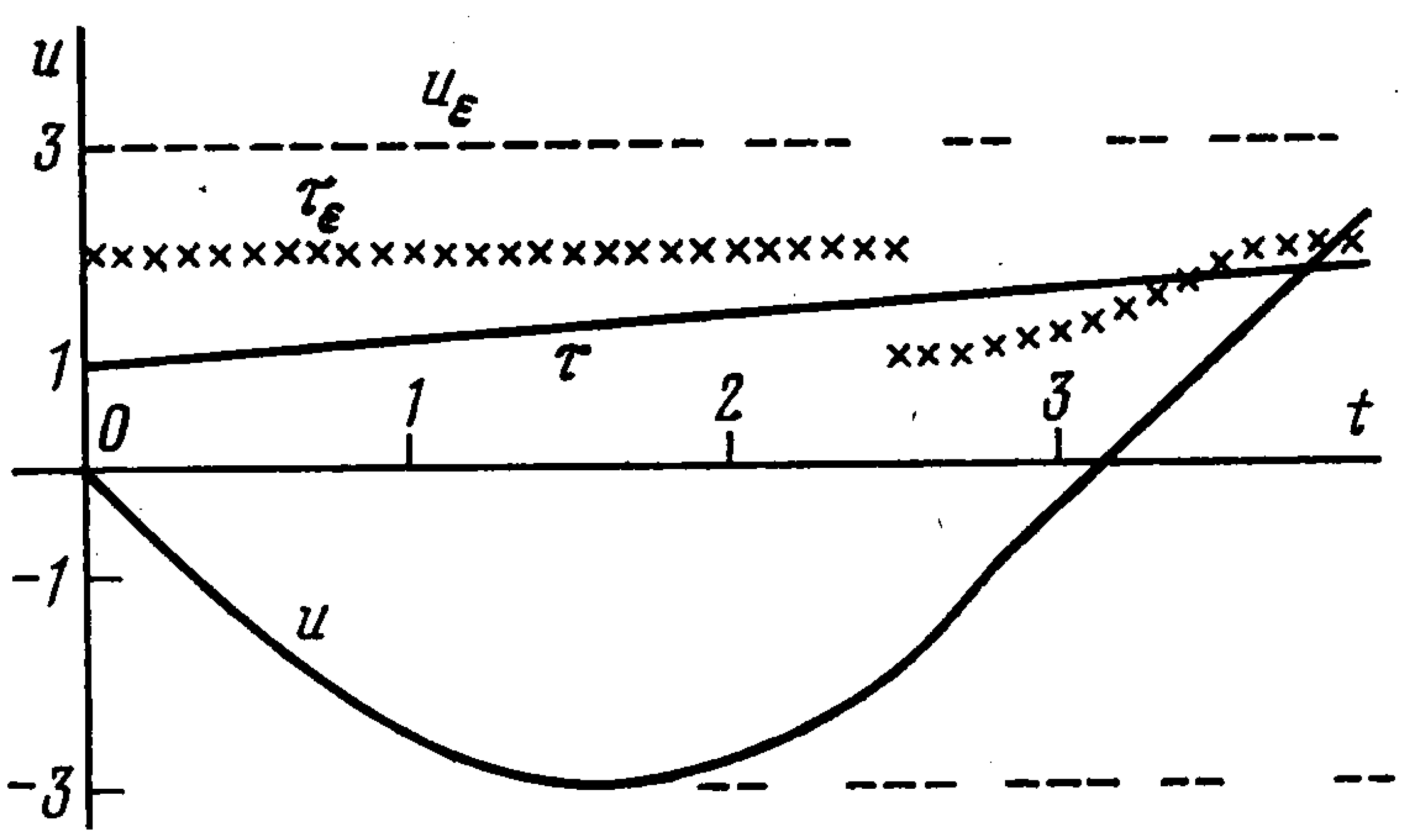


Фиг. 1

была смоделирована задача восстановления $x_0(s)$, $u(t)$ и $\tau(t)$. Предполагалось, что $\delta(\Delta) = t_{i+1} - t_i = 0{,}01$, а траектория $x(t)$ системы (4.2) порождается управлением $u(t) = -3\sin t$, запаздыванием $\tau(t) = 1 + \sin 0{,}2t$ и начальной функцией $x_{01}(s) = 4{,}1 + 0{,}9\cos s$, $x_{02}(s) = \sin s$.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 и 3 изображены функции $x_{01}(s)$, $x_{02}(s)$, $\tau(t)$, $u(t)$ (сплошные линии) и функции $z_{0\varepsilon}[s] = \{z_1[s], z_2[s]\}$, $u_\varepsilon[t]$, $\tau_\varepsilon[t]$ ($z_1[s]$ и $u_\varepsilon[t]$ обозначены штрихами, а $z_2[s]$ и $\tau_\varepsilon[t]$ — крестиками). Для движений $z(t)$ и $z[t]$ справедлива оценка

$$\| x(t) - z[t] \| \leqslant 0,\ 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений.— М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1964. 456 с.
3. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* Метод позиционной регуляризации в задаче о построении движения.— В кн.: Аннотации докл. 5-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981. 214 с.
4. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.* О динамическом решении операторных уравнений.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 3, с. 552—556.
5. *Куржанский А. Б.* Динамические задачи принятия решений в условиях неопределенности.— В кн.: Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979, с. 197—235.
6. *Banks H. T., Burns J. A., Cliff E. M.* Parameter estimation and identification for systems with delays.— SIAM J. Control and Optimiz, 1981, v. 19, No 6, p. 791—828.

7. *Burns J. A.*, *Hirsch P. D.* A difference equation approach to parameter estimation for differential-delay equations.— Appl. Math. and Comput., 1980, v. 7, No. 4, p. 281—311.
8. *Рубан А. И.* Идентификация объектов, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с запаздывающим аргументом.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1976, № 2, с. 164—169.
9. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
10. *Иоффе А. Д.*, *Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
11. *Artstein Z.* Relaxed controls and the dynamics of control systems.— SIAM J. Control and Optimiz., 1978, v. 16, No. 5, p. 689—701.

Свердловск

Поступила в редакцию
11.IV.1983