$$(3)\qquad (\mathrm{div}_\tau \overline{T})_\beta = a^{\alpha\omega} T_{\beta\alpha,\,\omega} = (\gamma + \xi_\parallel \Theta)_{,\,\beta} + \eta_\parallel a^{\alpha\omega}[v_{\beta,\,\alpha\omega} - (v_3 b_{\beta\alpha})_{,\,\omega}] - -\eta_\perp\left[2H\frac{\partial v_3}{\partial u^\beta} + b_\beta{}^\alpha\frac{\partial v_3}{\partial u^\alpha} + v_\sigma(2Hb_\beta{}^\sigma + b_\delta{}^\sigma b_\beta{}^\delta)\right]$$

$$(4)\qquad (\mathrm{div}_\tau \overline{T})_3 = a^{\alpha\omega} T_{3,\,\alpha\omega} = 2H[\gamma + (\xi_\parallel - \xi_\perp - \eta_\parallel)\Theta] + \eta_\parallel b^{\alpha\sigma}(V_{\sigma,\,\alpha} + + V_{\alpha,\,\sigma}) + \eta_\perp a^{\alpha\omega}[v_{3,\,\alpha\omega} + (v_\sigma b_\alpha{}^\sigma)_{,\omega}];\quad H = {}^1/_2 a_{\alpha\beta} b^{\alpha\beta}$$

Эти соотношения совпадают с соответствующими выражениями Гудрича [1], если положить в них $\xi_\parallel - \xi_\perp = k_N$, $\xi_\parallel = k$, $\eta_\parallel = \eta$, $\eta_\perp = \eta_N$. (Отличие (3) и (4) от выражений (72) и (73) в [2] связано с ошибкой при вычислении последнего члена в (72) и предпоследнего в (73).)

Установленное соответствие позволяет с уверенностью использовать полученные в работах [1, 2] граничные условия на поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей при решении конкретных задач. Отметим, что введенный в этих работах коэффициент изгибовой вязкости может оказывать существенное влияние на процессы, сопровождающиеся сильной деформацией межфазной поверхности.

Поскольку Гудрич не учитывал скольжения и обмена веществом между поверхностной и объемной фазами, здесь мы ограничились лишь этим случаем. Граничные условия в общем виде приведены в [1].

Примечание. В работе [8] феноменологически получены соотношения на поверхности раздела, представляющие собой частный случай условий, выведенных в [1], при учете лишь межфазного массообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башкиров А. Г.* Неравновесная статистическая механика гетерогенных систем. I. Явления переноса на межфазной поверхности и проблема граничных условий.— Теорет. и матем. физика, 1980, т. 43, № 3, с. 401—416.
2. *Goodrich F. C.* The theory of capillary excess viscosities.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1981, v. 374, No. 1758, p. 341—370.
3. *Boussinesq J.* Sur l'existence d'une viscositésuperficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquid d'un autre fluide contign.— Ann. Chim. et Phys., 1913, v. 39, p. 349—357.
4. *Scriven L. E.* Dynamics of fluid interface.— Chem. Eng. Sci., 1960, v. 12, No. 2, p. 98—108.
5. *Шулейкин В. В.* Физика моря. М.: Наука, 1968. 1083 с.
6. *Goodrich F. C.* The mathematical theory of capillarity. II.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1960, v. 260, No. 1303, p. 490—509.
7. *Гудрич Ф. Ч.* Поверхностная вязкость как капиллярное избыточное свойство переноса.— В кн.: Современная теория капиллярности. Л.: Химия, 1980, с. 39—61.
8. *Гогосов В. В.*, *Налетова В. А.*, *Чыонг За Бинь*, *Шапошникова Г. А.* Соотношения на поверхности раздела сред при наличии массообмена и неоднородности определяющих параметров вдоль поверхности.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 3, с. 566—569.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1982

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ В ИСКРИВЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ С ПРОВОДИМОСТЬЮ НЕКОТОРОГО КЛАССА

Черняев А. П.

Изучаются двумерные течения установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости (по закону Дарси) в неоднородных искривленных пластах с переменной проводимостью. Найден и исследован новый широкий класс проводимостей, для которых функция напора течений выписывается в явном виде. Указан явный вид функции напора для течений источников, расположенных в произвольной точке пласта.

Основные уравнения, описывающие двумерные течения установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости в неоднородных искривленных пластах, могут быть представлены в виде [1]

$$(1)\qquad P\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad P\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Здесь Φ — функция напора, Ψ — функция тока, $P = kM$ — проводимость пласта [2], k — коэффициент фильтрации, а M — мощность пласта. Предполагается, что на поверхности подошвы пласта выбрана такая изотермическая сетка с координатами x и y [1], что $P = P(y)$. Предполагается также, что $P(y) > 0$ и существует функция $\lambda(y) \neq 0$, такая, что выполнены условия ([3], стр. 125)

$$\lambda P \in \theta_M, \quad \lambda P' \in \theta_M \tag{2}$$

Пусть решение уравнений (1) имеет особенность в точке (x_0, y_0). Исключая Ψ, имеем

$$P(y)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right] + P'(y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0) \tag{3}$$

Изучим фундаментальные решения, соответствующие источнику (стоку), ибо другие особенности получаются из источника при помощи известной техники [1]. Известны классические методы получения фундаментальных решений для более общих уравнений ([4], с. 48—51). Однако решения, полученные этими методами, слишком абстрактны и не могут быть применены к задачам фильтрации. Поэтому возник интерес к таким $P(y)$, при которых фундаментальное решение ищется в удобном для решения конкретных задач виде [5, 6]. В [7] найден довольно широкий класс $P(y)$, включающий и известные ранее случаи [5, 6] и новые, когда решение типа источника-стока выписывается в явном виде.

Данная статья посвящена изучению фундаментальных решений типа источника для таких $P(y)$, которые до работы [7] в литературе не встречались, и завершает исследования п. 5 работы [7].

Для формулировки основного результата работы введем следующее.

Определение. Будем говорить, что $\Phi \in S'(R^2)$ ([3], с. 124, 125) называется фундаментальным решением типа источник уравнения (3) в точке (x_0, y_0), если Φ удовлетворяет уравнению

$$\lambda P\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right] + \lambda P'\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q\lambda P\delta(x - x_0, y - y_0) \tag{4}$$

Здесь Q не зависит от x и y, а δ — функция Дирака.

Сформулируем основной результат настоящей работы в виде теоремы.

Теорема. Пусть $\mu > 0$, $C > 0$, $\gamma > 0$ и

$$P(y) = Z_\mu^2(ih) = [D_1 I_\mu(h) + D_2 K_\mu(h)]^2 \tag{5}$$

где Z_μ — цилиндрическая функция [8], такая, что $P(y) > 0$, I_μ и K_μ — модифицированные функции Бесселя [9], D_1 и D_2 — неотрицательные постоянные и

$$h = h(y) = C\exp(\gamma y) \tag{6}$$

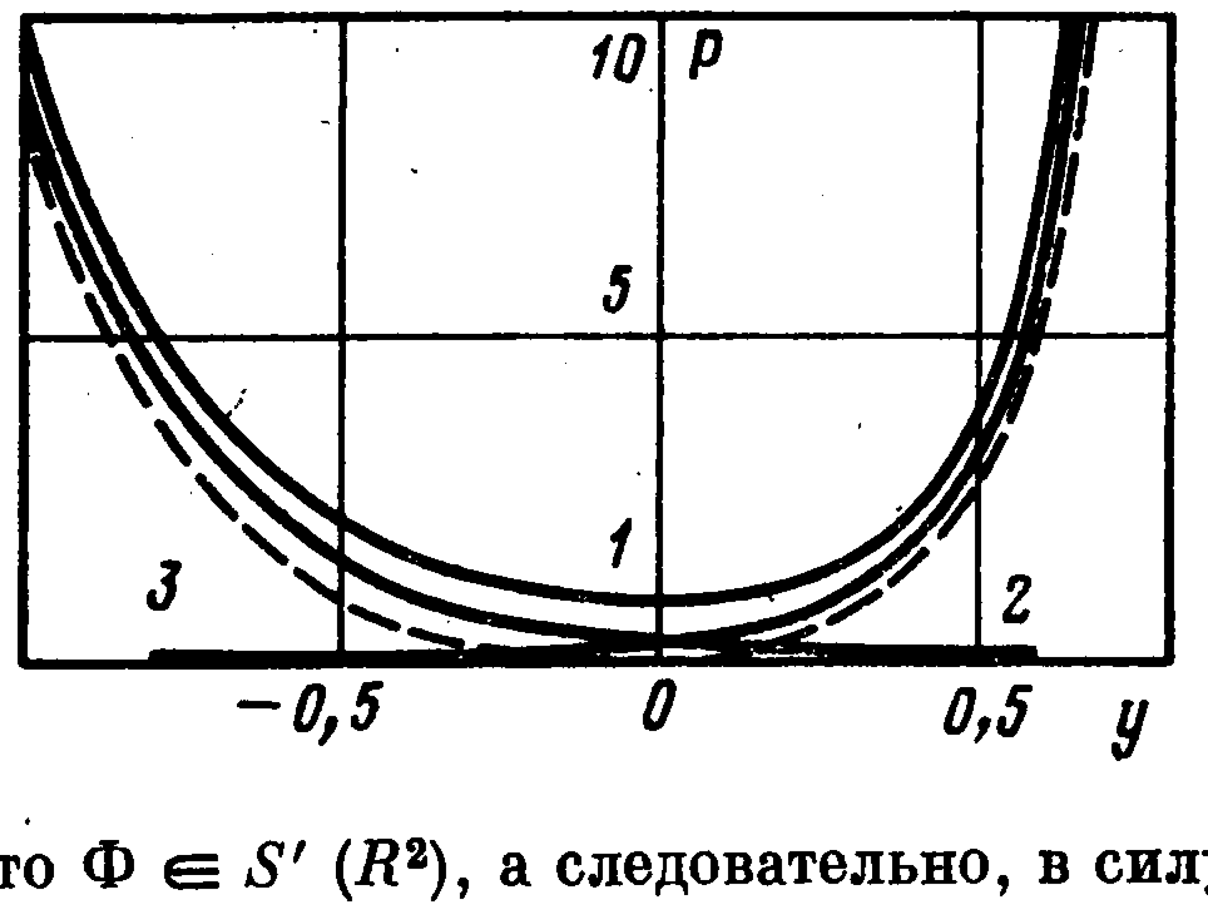
Тогда решение уравнения (4) дается формулой ($\theta(z)$ — функция Хевисайда)

$$\Phi = \frac{Q}{\pi}\int_0^\infty v\cos[(x - x_0)\xi]\,d\xi \tag{7}$$

$$v = -\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{P_0}{P}}\{\theta(y_0 - y)K_\nu(h_0)I_\nu(h) + \theta(y - y_0)I_\nu(h_0)K_\nu(h)\} \tag{8}$$

$$\nu = (\sqrt{\mu^2\gamma^2 + |\xi|^2})/\gamma, \quad P_0 = P(y_0), \quad h_0 = h(y_0)$$

Для доказательства теоремы, применяя теорему Олвера ([10], с. 246), получаем равномерные по ν и h асимптотические оценки для $I_\nu(h)$ и $K_\nu(h)$, аналогичные равномерным асимптотическим разложениям этих функций при больших значениях порядка ([9], с. 199). На основании этих оценок и формул (5) и (6) получаем такую оценку на $|v|$ из (8), из которой следует, что $v \in S'(R^2)$, а также, что v интегрируема по ξ от $-\infty$ до $+\infty$ при любом $y \neq y_0$. Из последнего следует сходимость интеграла в (7) при $y \neq y_0$ и равенство $Qv\exp\{ix_0\xi\} = F_x[\Phi]$, где F_x — преобразование Фурье по x ([3], § 9). Из последнего равенства вытекает, что $\Phi \in S'(R^2)$, а следовательно, в силу (2) к обеим частям (4) можно применить F_x. Используя формулы а) п. 9 § 7, (13), (15) и (16) п. 3 § 9, а также формулу (19) п. 4 [3],



заключаем, что (4) эквивалентно уравнению

$$\lambda P\,[v_{yy}'' - |\,\xi\,|^2 v] + \lambda P' v_y' = \lambda P \delta\,(y - y_0)$$

Из [7] следует, что v, определяемая (8), удовлетворяет последнему уравнению.

Согласно (5) и (6), на фигуре приведены эскизы графиков $P(y)$ при $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$ (кривая *1*), $D_1 = 0$, $D_2 > 0$ (кривая *2*) $D_1 > 0$ и $D_2 = 0$ (кривая *3*) и $D_1 = -D_2$ (штриховая кривая). Отметим разные порядки стремления $P(y)$ к бесконечности при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$. Действительно, при $y \to +\infty$ имеем $h \to +\infty$ из (6) и

$$P(y) \sim D_1 I_\mu(h) \sim \frac{D_1 \exp(h)}{\sqrt{2\pi h}} = \frac{D_1 \exp(C \exp(\gamma y))}{\sqrt{2\pi C} \exp(\gamma y/2)}$$

([9], с. 199). В то же время при $y \to -\infty$ имеем $h \to +0$ из (6) и

$$P(y) \sim D_2 K_\mu(h) \sim \frac{D_2}{2}\,\Gamma(\mu)\left(\frac{h}{2}\right)^{-\mu} = \frac{D_2 \Gamma(\mu)}{2^{1-\mu}}\,(C \exp(\gamma y))^{-\mu}$$

([9], с. 196). Это обусловливает разную крутизну правой и левой ветвей кривой *1*. Кривые *2* и *3* принципиально различны, так как имеют разные порядки стремления к бесконечности и к нулю. Во всех этих случаях найденное фундаментальное решение типа источник совпадает с функцией источника, так как $P(y) > 0$. Случай, изображенный штриховой кривой, не рассматривается.

Математический интерес приведенной теоремы ограничивается решением задачи Коши для нового класса уравнений, в то время как механический интерес ее определяется множеством задач теории фильтрации, которое описывает условие теоремы, и простотой ее результата.

Отметим, что класс функций (5) достаточно широк из-за обилия параметров. Если к этому добавить конформное преобразование переменных x и y (оно не меняет вида системы (1) [6]), то полученный класс функций может с той или иной степенью точности аппроксимировать многие часто встречающиеся в практике проводимости пластов. Простота формул (7) и (8) позволяет использовать приведенную выше теорему для исследования влияния неоднородности проводимости пласта в задачах определения функции давления напорной фильтрации к скважине [5], вычисления дебита скважины, а также в задачах о перемещении границы раздела «разноцветных жидкостей» [1]. Из теоремы можно получить не только течения, соответствующие точечному источнику, но и точечному вихрю [12], а также диполю и мультиполям в переменном слое.

Формулы (7) и (8) удобны как для качественных исследований, так и для получения разного рода асимптотических разложений [10].

Автор благодарит О. В. Голубеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР 1917—1967 гг. М.: Наука 1969. 545 с.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
4. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
5. *Белов В. А.* К вопросу двумерного движения жидкости в слоях, толщина и проницаемость которых изменяется по четному степенному закону. Гидродинамика. М.: Изд-е Моск. об-ва испытателей природы, 1970, с. 39—42.
6. *Быстров К. Н.* Построение течений с точечными особенностями в искривленных слоях переменной толщины.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1, с. 169—175.
7. *Черняев А. П.* Отыскание решений типа источника-стока для потенциала обобщенных систем Коши — Римана некоторого класса.— Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1511—1514.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами./Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
11. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
12. *Черняев А. П.* Построение основных решений обобщенной системы Коши — Римана первого порядка с коэффициентом, зависящим от одной переменной по гипертангенсальному закону.— Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 2071—2083.

Москва

Поступила в редакцию 29.XI.1982