Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 532.635

О ПОВЕРХНОСТНОЙ ВЯЗКОСТИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ

Башкиров А. Г., Корольков Г. А.

Рассматриваются уравнения движения межфазной поверхности. Показано, что условия на поверхности раздела фаз, полученные в работах [1, 2] различными методами, совпадают.

Исследование динамики границы раздела жидкость — жидкость было начато Буссинеском [3]. Он предположил линейную связь между тензором поверхностных напряжений $T_{\alpha\beta}$ и тензором скоростей деформаций $S_{\alpha\beta}$, приписав поверхности два коэффициента вязкости: дилатационную k (аналог объемной вязкости) и двумерную сдвиговую вязкость ε. В пространственной системе координат, у которой две оси u^1 и u^2 совпадают с осями произвольной системы координат на поверхности, а третья ось u^3 перпендикулярна поверхности, его результат имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = [\gamma + (k - \varepsilon)\Theta]a_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha,\,\beta} + V_{\beta,\,\alpha}), \quad \Theta = a^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}, V_{\alpha,\,\beta} = v_{\alpha,\,\beta} - v_3 b_{\alpha\beta}, \quad v_{\alpha,\,\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta} - v_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$$

Греческие индексы пробегают значения 1,2; запятая обозначает ковариантное дифференцирование, $a_{\alpha\beta}$ — метрический тензор на поверхности; γ — коэффициент поверхностного натяжения, v_α и v_3 — составляющие вектора скорости точки поверхности, $b_{\alpha\beta}$—компоненты второй основной квадратичной формы поверхности, $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ — символ Кристоффеля на поверхности.

Полученные Буссинеском уравнения были записаны в специальной системе координат, совпадающей с главными осями тензора поверхностных скоростей деформаций. Уравнения движения жидкой межфазной поверхности, которая может деформироваться и перемещаться в пространстве, записанные в произвольной системе координат, были получены позже Скривеном [4].

Рассматривая задачу о гашении маслом капиллярных волн на поверхности моря, В. В. Шулейкин и Р. Н. Иванов (см. [5]) выдвинули гипотезу о существовании у пленки масла вязкости, связанной с изгибовым движением пленки. Дальнейшее развитие эта гипотеза получила в работах Гудрича [2, 6, 7], рассматривавшего межфазную поверхность как анизотропный слой конечной толщины δ с последующим предельным переходом $\delta \to 0$. Поэтому Гудрич в отличие от Скривена полагал, что связь между тензорами поверхностных напряжений и скоростей деформаций носит трехмерный характер (индексы m, n, l, k пробегают значения 1, 2, 3)

$$T_{mn} = P_{mn} + E_{mnkl}\, S^{kl}$$

где P_{mn} и E_{mnkl} — не изотропные, а аксиально-симметричные тензоры с осью симметрии, совпадающей с нормалью к поверхности. Это предположение привело его к выводу о существовании еще одной поверхностной вязкости при изгибовых деформациях поверхности (или поверхностной изгибовой вязкости). В работе [6] Гудрич выписал граничные условия с учетом поверхностной изгибовой вязкости лишь для исследования распространения капиллярных волн. Из-за отсутствия вывода уравнений движения поверхности коэффициент изгибовой вязкости не привлек внимания исследователей. Спустя 20 лет, в 1981 г. Гудрич [2] получил граничные условия на межфазной поверхности произвольной формы. Он использовал метод разделяющей поверхности Гиббса, описывая движение каждой объемной фазы уравнениями Навье — Стокса и получая коэффициенты поверхностной вязкости как избыточные поверхностные свойства.

В 1980 г. А. Г. Башкиров [1] в рамках неравновесной статистической механики развил подход, позволяющий изучать процессы переноса в многокомпонентной гетерофазной системе, в частности на границе двух объемных фаз. Были рассмотрены неравновесные явления на поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей. Предполагая, что поверхностные плотности массы, энергии и импульса отличны от нуля, автор вывел законы сохранения массы и энергии и получил уравнения гидродинамики поверхностной фазы.

В локальной декартовой системе координат уравнения для поверхностных плотностей массы, импульса и энергии при отсутствии скольжения на границе раздела фаз имеют вид

$$\frac{\partial\bar{\rho}_k}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_\tau\bar{\rho}_k = -\bar{\rho}_k\,\mathrm{div}_\tau\,\mathbf{v} - \mathrm{div}_\tau\,\bar{\mathbf{J}}_k - \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_k^{(2)} - \mathbf{J}_k^{(1)})$$

$$\bar{\rho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \bar{\rho}\mathbf{v}\cdot\nabla_\tau\mathbf{v} = \mathrm{div}_\tau\,\bar{T} + \mathbf{n}\cdot(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_\tau\bar{u} = -\bar{u}\,\mathrm{div}_\tau\mathbf{v} - \mathrm{div}_\tau\,\bar{\mathbf{J}}_q - \bar{T}:\nabla_\tau\mathbf{v} - \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_q^{(2)} - \mathbf{J}_q^{(1)})$$

где ∇_τ — поверхностный градиент, div_τ — поверхностная дивергенция; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, направленный внутрь фазы 1, $\mathbf{J}_k^{(1)}$, $\mathbf{J}_k^{(2)}$ — диффузионные потоки k-компоненты в объемных фазах (1) и (2), $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ — тензоры напряжений в объемных фазах (1) и (2), $\mathbf{J}_q^{(1)}$, $\mathbf{J}_q^{(2)}$ — тепловые потоки в объемных фазах (1) и (2), $\bar{\rho}_k$ — поверхностная плотность k-компоненты, $\bar{\rho} = \sum_k \bar{\rho}_k$, $\bar{\mathbf{J}}_k$ — поверхностный диффузионный поток k-компоненты; $\bar{T}$ — тензор поверхностных напряжений, $\bar{u}$ — поверхностная плотность энергии, $\bar{\mathbf{J}}_q$ — поверхностный тепловой поток. Под величинами с чертой сверху понимают выражения типа

$$\bar{\rho}_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\,[\rho_k(\mathbf{x}, t) - h\rho_k^{(1)} - (1-h)\,\rho_k^{(2)}]$$

где z — координата, нормальная к слою, $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)}$ — плотности k-компоненты в объемных фазах (1) и (2), h — функция Хевисайда, равная единице в фазе (1) и нулю в фазе (2) со скачком на разделяющей поверхности.

Выражения для поверхностных потоков приведены в [1]. Здесь остановимся только на выражении для тензора поверхностных напряжений, который в случае отсутствия скольжения на границах поверхностной фазы и обмена веществом между фазами типа, например, испарения или конденсации, принимает вид

$$\bar{T} = -\bar{p}_\perp\mathbf{nn} - \bar{p}_\parallel(I - \mathbf{nn}) + [\xi_\perp\mathbf{nn} + \xi_\parallel(I - \mathbf{nn})]\,\mathrm{div}_\tau\mathbf{v} + 2\eta_\parallel[\nabla_\tau\mathbf{v}_\tau]_0^s + 2\eta_\perp[\nabla_\tau\mathbf{v}_n]_0^s \tag{1}$$

$$\bar{p}_{\perp,\,\parallel} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\,[p_{\perp,\,\parallel}(\mathbf{x}, t) - hp^{(1)} - (1-h)\,p^{(2)}]$$

Здесь I — единичный тензор, $\xi_\perp$, $\xi_\parallel$ — коэффициенты дилатационной поперечной и продольной вязкостей, $\eta_\parallel$, $\eta_\perp$ — коэффициенты сдвиговой и изгибовой поверхностных вязкостей; нулевой индекс означает, что след тензора равен нулю, а индекс s,— что тензор симметричен, $p_\perp$, $p_\parallel$ — поперечное и продольное давления, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ — давления в объемных фазах (1) и (2) на границах с поверхностной фазой.

Так как подходы [1, 2] к изучению динамики межфазной поверхности различны, представляет интерес сравнить полученные результаты.

В введенной ранее системе координат $\{u^i\}$ выражение для тензора поверхностных напряжений (1) имеет вид

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = [-\bar{p}_\parallel + (\xi_\parallel - \eta_\parallel)\,\Theta]\,a_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \tag{2}$$

$$\bar{T}_{\alpha 3} = T_{3\alpha} = \eta_\perp V_{3,\,\alpha}, \quad V_{3,\,\alpha} = \frac{\partial v_3}{\partial u^\alpha} + v_\sigma b_\alpha^\sigma$$

$$\bar{T}_{33} = -\bar{p}_\perp + \xi_\perp\Theta$$

Как правило, при описании поверхностных явлений используются не величины продольного $\bar{p}_\parallel$ и поперечного $\bar{p}_\perp$ давлений, а коэффициент поверхностного натяжения. Для слабо искривленной равновесной поверхности коэффициент поверхностного натяжения определяют как $\gamma = \bar{p}_\perp - \bar{p}_\parallel$.

Если принять для неравновесного случая такое определение γ, то в уравнения движения межфазной поверхности должен войти член $\nabla_\tau\bar{p}_\perp$, которого нет у Гудрича [2]. Это объясняется тем, что Гудрич наряду с таким определением использовал другое определение коэффициента поверхностного натяжения $\gamma^* = -\bar{p}_\parallel$ и считал, что они эквивалентны. Тогда, действительно, в уравнения движения не войдет $\bar{p}_\perp$, однако $\gamma = \gamma^*$ только в равновесном случае или при специальном выборе разделяющей поверхности, когда $\bar{p}_\perp = 0$. Для сравнения результатов работ [1, 2] выберем именно такую поверхность и получим из (2) выражения для тангенциальной и нормальной компонент поверхностной дивергенции тензора поверхностных напряжений

$$
(3)\qquad (\mathrm{div}_\tau \bar{T})_\beta = a^{\alpha\omega} T_{\beta\alpha,\omega} = (\gamma + \xi_\parallel \Theta)_{,\beta} + \eta_\parallel a^{\alpha\omega} [v_{\beta,\alpha\omega} - (v_3 b_{\beta\alpha})_{,\omega}] - \\ - \eta_\perp \left[2H \frac{\partial v_3}{\partial u^\beta} + b_\beta{}^\alpha \frac{\partial v_3}{\partial u^\alpha} + v_\sigma (2H b_\beta{}^\sigma + b_\delta{}^\sigma b_\beta{}^\delta) \right]
$$

$$
(4)\qquad (\mathrm{div}_\tau \bar{T})_3 = a^{\alpha\omega} T_{3,\alpha\omega} = 2H [\gamma + (\xi_\parallel - \xi_\perp - \eta_\parallel)\Theta] + \eta_\parallel b^{\alpha\sigma} (V_{\sigma,\alpha} + \\ + V_{\alpha,\sigma}) + \eta_\perp a^{\alpha\omega} [v_{3,\alpha\omega} + (v_\sigma b_\alpha{}^\sigma)_{,\omega}]; \quad H = {}^1/_2 a_{\alpha\beta} b^{\alpha\beta}
$$

Эти соотношения совпадают с соответствующими выражениями Гудрича [1], если положить в них $\xi_\parallel - \xi_\perp = k_N$, $\xi_\parallel = k$, $\eta_\parallel = \eta$, $\eta_\perp = \eta_N$. (Отличие (3) и (4) от выражений (72) и (73) в [2] связано с ошибкой при вычислении последнего члена в (72) и предпоследнего в (73).)

Установленное соответствие позволяет с уверенностью использовать полученные в работах [1, 2] граничные условия на поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей при решении конкретных задач. Отметим, что введенный в этих работах коэффициент изгибовой вязкости может оказывать существенное влияние на процессы, сопровождающиеся сильной деформацией межфазной поверхности.

Поскольку Гудрич не учитывал скольжения и обмена веществом между поверхностной и объемной фазами, здесь мы ограничились лишь этим случаем. Граничные условия в общем виде приведены в [1].

Примечание. В работе [8] феноменологически получены соотношения на поверхности раздела, представляющие собой частный случай условий, выведенных в [1], при учете лишь межфазного массообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башкиров А. Г.* Неравновесная статистическая механика гетерогенных систем. I. Явления переноса на межфазной поверхности и проблема граничных условий.— Теорет. и матем. физика, 1980, т. 43, № 3, с. 401—416.
2. *Goodrich F. C.* The theory of capillary excess viscosities.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1981, v. 374, No. 1758, p. 341—370.
3. *Boussinesq J.* Sur l'existence d'une viscositésuperficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquid d'un autre fluide contign.— Ann. Chim. et Phys., 1913, v. 39, p. 349—357.
4. *Scriven L. E.* Dynamics of fluid interface.— Chem. Eng. Sci., 1960, v. 12, No. 2, p. 98—108.
5. *Шулейкин В. В.* Физика моря. М.: Наука, 1968. 1083 с.
6. *Goodrich F. C.* The mathematical theory of capillarity. II.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1960, v. 260, No. 1303, p. 490—509.
7. *Гудрич Ф. Ч.* Поверхностная вязкость как капиллярное избыточное свойство переноса.— В кн.: Современная теория капиллярности. Л.: Химия, 1980, с. 39—61.
8. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Чьонг За Бинь, Шапошникова Г. А.* Соотношения на поверхности раздела сред при наличии массообмена и неоднородности определяющих параметров вдоль поверхности.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 3, с. 566—569.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1982

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ В ИСКРИВЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ С ПРОВОДИМОСТЬЮ НЕКОТОРОГО КЛАССА

Черняев А. П.

Изучаются двумерные течения установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости (по закону Дарси) в неоднородных искривленных пластах с переменной проводимостью. Найден и исследован новый широкий класс проводимостей, для которых функция напора течений выписывается в явном виде. Указан явный вид функции напора для течений источников, расположенных в произвольной точке пласта.

Основные уравнения, описывающие двумерные течения установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости в неоднородных искривленных пластах, могут быть представлены в виде [1]

$$
(1)\qquad P\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad P\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}
$$