Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 533/539

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ ТЕНЗОРОВ, ЗАДАННЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Повстенко Ю. З., Подстригач Я. С.

На основании установленных формул для производных векторов эйлерова и лагранжева базисов выводятся выражения для производных поверхностных, пространственных и двойных тензоров, заданных на поверхности, движущейся в евклидовом пространстве. При движении плоскости в пространстве с постоянной скоростью полученные результаты соответствуют двумерным аналогам результатов работы [1]. Указывается связь рассмотренных производных с $(\delta/\delta t)$-производной; вводится понятие $(\delta/\delta t)$-производной в трехмерном случае.

В работе [1] была развита теория дифференцирования тензоров по времени в пространственном случае, основанная на введении векторов эйлерова и лагранжева базисов и полиадном представлении тензоров в указанных базисах. Вопрос о дифференцировании тензоров по времени в общей постановке рассматривался также в [2, 3], причем в последней работе проведен подробный анализ более ранних исследований. При изучении распространения волн в сплошных средах в [4—6] была введена $(\delta/\delta t)$-производная компонент пространственных векторов, заданных на поверхности, движущейся в трехмерном евклидовом пространстве (на фронте волны). Эти результаты были обобщены [7] на случай поверхностных и двойных тензоров, определенных на движущейся поверхности.

1. Закон движения точек трехмерного континуума описывается уравнениями

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad \xi^k = \xi^k(x^1, x^2, x^3, t) \tag{1.1}$$

Здесь x^i — пространственные (эйлеровы), ξ^k — материальные (лагранжевы) координаты, t — время.

Частные производные радиус-вектора точек пространства

$$\mathbf{э}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad \mathbf{э}_i^\wedge = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \tag{1.2}$$

определяют соответственно неподвижный эйлеров и подвижный лагранжев базисы. Тензор $\mathbf{T}$ с типичным расположением индексов можно представить в инвариантном виде [1]

$$\mathbf{T} = T^k_{\cdot m} \mathbf{э}_k \mathbf{э}^m = T^{\wedge k}_{\cdot m} \mathbf{э}_k^\wedge \mathbf{э}^{\wedge m} \tag{1.3}$$

Вектор скорости частицы с материальными координатами определяется следующим образом:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_\xi = v^i \mathbf{э}_i = v^{\wedge i} \mathbf{э}_i^\wedge; \quad v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_\xi \tag{1.4}$$

$$v^{\wedge i} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} v^k$$

Производную по времени тензора T можно подсчитать, если установить формулы дифференцирования векторов базиса

$$\left(\frac{\partial \mathbf{э}_k}{\partial t}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{э}^k}{\partial t}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{э}_k}{\partial t}\right)_\xi = v^m \Gamma^p_{mk} \mathbf{э}_p \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{э}^k}{\partial t}\right)_\xi = -v^m \Gamma^k_{mp} \mathbf{э}^p, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{э}_k^\wedge}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial v^{\wedge p}}{\partial \xi^k} \mathbf{э}_p^\wedge$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{э}^{\wedge k}}{\partial t}\right)_x = -\frac{\partial v^{\wedge k}}{\partial \xi^p} \mathbf{э}^{\wedge p}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{э}_k^\wedge}{\partial t}\right)_\xi = \nabla_k^\wedge v^{\wedge m} \mathbf{э}_m^\wedge$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{э}^{\wedge k}}{\partial t}\right)_\xi = -\nabla_p^\wedge v^{\wedge k} \mathbf{э}^{\wedge p}$$

Вторая и четвертая формулы (1.5) получены в [1] для начального момента времени, когда лагранжев и эйлеров базисы совпадают. Основываясь на соотношении

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k}\right)\right]_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_\xi\right]$$

можно показать, что формулы (1.5) остаются справедливыми в любой момент времени. Символ $\nabla_k^\wedge$ означает, что ковариантное дифференцирование производится при помощи символов Кристоффеля $\Gamma_{km}^{\wedge p}$.

Таким образом, приходим к следующим выражениям для производных тензора:

$$(1.6)\qquad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial T^k_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x \mathbf{э}_k \mathbf{э}^m$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_x = \left[\left(\frac{\partial T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x + T^{\wedge p}_{\cdot m}\frac{\partial v^{\wedge k}}{\partial \xi^p} - T^{\wedge k}_{\cdot p}\frac{\partial v^{\wedge p}}{\partial \xi^m}\right]\mathbf{э}_k^\wedge \mathbf{э}^{\wedge m}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\xi = \left[\left(\frac{\partial T^k_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\xi + T^p_{\cdot m} v^q \Gamma^k_{qp} - T^k_{\cdot p} v^q \Gamma^p_{mq}\right]\mathbf{э}_k \mathbf{э}^m$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\xi = \left[\left(\frac{\partial T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\xi + T^{\wedge p}_{\cdot m}\nabla_p^\wedge v^{\wedge k} - T^{\wedge k}_{\cdot p}\nabla_m^\wedge v^{\wedge p}\right]\mathbf{э}_k^\wedge \mathbf{э}^{\wedge m}$$

Можно установить справедливость соотношений

$$(1.7)\qquad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\xi = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_x + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{T}$$

$$(1.8)\qquad \left(\frac{\partial T^k_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x \mathbf{э}_k \mathbf{э}^m = \left[\left(\frac{\partial T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\xi - LT^{\wedge k}_{\cdot m}\right]\mathbf{э}_k^\wedge \mathbf{э}^{\wedge m}$$

где $LT^{\wedge k}_{\cdot m}$ — производная Ли компонент $T^{\wedge k}_{\cdot m}$ [8]

$$(1.9)\qquad LT^{\wedge k}_{\cdot m} = v^{\wedge p}\frac{\partial T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\partial \xi^p} - T^{\wedge p}_{\cdot m}\frac{\partial v^{\wedge k}}{\partial \xi^p} + T^{\wedge k}_{\cdot p}\frac{\partial v^{\wedge p}}{\partial \xi^m} =$$

$$= v^{\wedge p}\nabla_p^\wedge T^{\wedge k}_{\cdot m} - T^{\wedge p}_{\cdot m}\nabla_p^\wedge v^{\wedge k} + T^{\wedge k}_{\cdot p}\nabla_m^\wedge v^{\wedge p}$$

Если ввести обозначение

$$(1.10)\qquad \frac{\delta T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\delta t} \equiv \left(\frac{\partial T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\xi - LT^{\wedge k}_{\cdot m}$$

то формулу (1.8) можно записать в виде

$$(1.11)\qquad \left(\frac{\partial T^k_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x \mathbf{э}_k \mathbf{э}^m = \frac{\delta T^{\wedge k}_{\cdot m}}{\delta t}\mathbf{э}_k^\wedge \mathbf{э}^{\wedge m}$$

Формулы (1.5) позволяют подсчитать производную компонент метрического тензора

$$(1.12)\qquad \left(\frac{\partial g^\wedge_{km}}{\partial t}\right)_\xi = \nabla_k^\wedge v_m^\wedge + \nabla_m^\wedge v_k^\wedge$$

свертка которой приводит к уравнению неразрывности

$$(1.13)\qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_\xi + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

2. Определим поверхность, движущуюся в пространстве, уравнениями

$$(2.1)\qquad x^i = x^i(u^1, u^2, t), \quad x^i = x^i(\omega^1, \omega^2, t)$$

Здесь u^α — поверхностные эйлеровы, ω^α — поверхностные лагранжевы координаты, связанные между собой соотношениями

$$(2.2)\qquad u^\alpha = u^\alpha(\omega^1, \omega^2, t), \quad \omega^\beta = \omega^\beta(u^1, u^2, t)$$

Как обычно принято в теории поверхностей в трехмерном пространстве, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; греческие — 1, 2 [9].

Отметим, что введение эйлеровых координат на движущейся поверхности не является тривиальным. Будем говорить, что точка «зафиксирована» на поверхности, если ее скорость направлена по нормали к поверхности [10, 11]. Таким образом, равенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_u = v_{(n)}\mathbf{n}, \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_u = v_{(n)}n^i \tag{2.3}$$

по сути служит определением эйлеровых координат u^α на поверхности, тогда как

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_\omega = \mathbf{v} = v^i \mathbf{э}_i, \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_\omega = v^i \tag{2.4}$$

представляет собой скорость частицы с материальными координатами ω^α. Подчеркнем, что $(\partial \mathbf{r}/\partial t)_\omega$ и $(\partial \mathbf{r}/\partial t)_\xi$ — это разные величины. Далее везде под $\mathbf{v}$ понимается $(\partial \mathbf{r}/\partial t)_\omega$.

Скорость точки в «двумерном» мире определяется частной производной

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}\right)_\omega = v^\alpha \tag{2.5}$$

При этом справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_\omega = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_u + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}\right)_\omega$$

$$v^i = v_{(n)}n^i + x^i_\alpha v^\alpha, \quad x_\alpha{}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

Частные производные

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}, \quad \mathbf{a}_\alpha^\wedge = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega^\alpha} \tag{2.6}$$

образуют локальные эйлеров и лагранжев базисы на поверхности. Поверхностный тензор $\mathbf{T}$ с типичным расположением индексов можно записать в виде

$$\mathbf{T} = T^{\alpha}_{\cdot\beta}\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}^\beta = T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}\mathbf{a}_\alpha{}^\wedge \mathbf{a}^{\wedge\beta} \tag{2.7}$$

При дифференцировании тензоров по времени используются следующие основные формулы:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial t}\right)_u = -v_{(n)}b_\alpha{}^\beta \mathbf{a}_\beta + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\alpha}\mathbf{n}, \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}^\beta}{\partial t}\right)_u = v_{(n)}b_\gamma{}^\beta \mathbf{a}^\gamma + a^{\beta\gamma}\frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\gamma}\mathbf{n},$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right)_u = -\frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\alpha}\mathbf{a}^\alpha, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right)_\omega = -\left(v^\gamma b_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\alpha}\right)\mathbf{a}^\alpha$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial t}\right)_\omega = (v^\gamma G^\beta_{\alpha\gamma} - v_{(n)}b_\alpha{}^\beta)\mathbf{a}_\beta + \left(v^\gamma b_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\alpha}\right)\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}^\beta}{\partial t}\right)_\omega = -(v^\gamma G^\beta_{\gamma\lambda} - v_{(n)}b_\lambda{}^\beta)\mathbf{a}^\lambda + a^{\alpha\beta}\left(v^\gamma b_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\alpha}\right)\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha{}^\wedge}{\partial t}\right)_u = \left(\frac{\partial v^{\wedge\beta}}{\partial \omega^\alpha} - v_{(n)}b_\alpha^{\wedge\beta}\right)\mathbf{a}_\beta{}^\wedge + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^\alpha}\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}^{\wedge\beta}}{\partial t}\right)_u = -\left(\frac{\partial v^{\wedge\beta}}{\partial \omega^\gamma} - v_{(n)}b_\gamma^{\wedge\beta}\right)\mathbf{a}^{\wedge\gamma} + a^{\wedge\alpha\beta}\frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^\alpha}\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right)_u = -\frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^\alpha}\mathbf{a}^{\wedge\alpha}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right)_\omega = -\left(v^{\wedge\gamma}b^\wedge_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^\alpha}\right)\mathbf{a}^{\wedge\alpha}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha{}^\wedge}{\partial t}\right)_\omega = (\nabla_\alpha{}^\wedge v^{\wedge\beta} - v_{(n)}b_\alpha^{\wedge\beta})\mathbf{a}_\beta{}^\wedge + \left(v^{\wedge\beta}b^\wedge_{\alpha\beta} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^\alpha}\right)n$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}^{\wedge\beta}}{\partial t}\right)_\omega = -(\nabla_\gamma{}^\wedge v^{\wedge\beta} - v_{(n)}b_\gamma^{\wedge\beta})\mathbf{a}^{\wedge\gamma} + a^{\wedge\alpha\beta}\left(v^{\wedge\gamma}b^\wedge_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^\alpha}\right)\mathbf{n}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — компоненты первой и второй квадратичных форм поверхности, $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — двумерные символы Кристоффеля. Последние три формулы (2.8) приведены в работе [12].

На основании формул (2.7) и (2.8) получим

$$(2.9)\quad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_u = \left[\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_u - T^{\rho}_{\cdot\beta} b_{\rho}{}^{\alpha} v_{(n)} + T^{\alpha}_{\cdot\rho} b_{\beta}{}^{\rho} v_{(n)}\right] \mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{a}^{\beta} + T^{\alpha}_{\cdot\beta} \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^{\alpha}} \mathbf{n}\mathbf{a}^{\beta} + T^{\alpha}_{\cdot\beta} a^{\beta\gamma} \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^{\gamma}} \mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_u = \left[\left(\frac{\partial T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_u + T^{\wedge\rho}_{\cdot\beta}\left(\frac{\partial v^{\wedge\alpha}}{\partial \omega^{\rho}} - v_{(n)} b^{\wedge\alpha}_{\rho}\right) - T^{\wedge\alpha}_{\cdot\rho}\left(\frac{\partial v^{\wedge\rho}}{\partial \omega^{\beta}} - v_{(n)} b^{\wedge\rho}_{\beta}\right)\right] \mathbf{a}_{\alpha}{}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge\beta} + T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta} \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^{\alpha}} \mathbf{n}\mathbf{a}^{\wedge\beta} + T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta} a^{\wedge\beta\gamma} \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^{\gamma}} \mathbf{a}^{\wedge}{}_{\alpha}\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\omega = \left[\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_\omega + T^{\rho}_{\cdot\beta}\left(v^{\lambda} G^{\alpha}_{\lambda\rho} - v_{(n)} b_{\rho}{}^{\alpha}\right) - T^{\alpha}_{\cdot\rho}\left(v^{\lambda} G^{\rho}_{\lambda\beta} - v_{(n)} b_{\beta}{}^{\rho}\right)\right] \mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{a}^{\beta} + T^{\alpha}_{\cdot\beta}\left(v^{\gamma} b_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^{\alpha}}\right)\mathbf{n}\mathbf{a}^{\beta} + T^{\alpha}_{\cdot\beta} a^{\beta\rho}\left(v^{\lambda} b_{\lambda\rho} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^{\rho}}\right)\mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{n}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\omega = \left[\left(\frac{\partial T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_\omega + T^{\wedge\rho}_{\cdot\beta}\left(\nabla_{\rho}{}^{\wedge} v^{\wedge\alpha} - v_{(n)} b^{\wedge\alpha}_{\rho}\right) - T^{\wedge\alpha}_{\cdot\rho}\left(\nabla_{\beta}{}^{\wedge} v^{\wedge\rho} - v_{(n)} b^{\wedge\rho}_{\beta}\right)\right] \mathbf{a}_{\alpha}{}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge\beta} + T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}\left(v^{\wedge\rho} b^{\wedge}_{\alpha\rho} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^{\alpha}}\right)\mathbf{n}\mathbf{a}^{\wedge\beta} + T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta} a^{\wedge\beta\rho}\left(v^{\wedge\lambda} b^{\wedge}_{\lambda\rho} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^{\alpha}}\right)\mathbf{a}_{\alpha}{}^{\wedge}\mathbf{n}$$

Остаются справедливыми двумерные аналоги формул (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) (∇_{Σ} — поверхностный набла-оператор)

$$(2.10)\quad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\omega = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_u + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\Sigma}\mathbf{T}$$

$$\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_u \mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{a}^{\beta} = \left[\left(\frac{\partial T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_\omega - LT^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}\right]\mathbf{a}_{\alpha}{}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge\beta}$$

$$\frac{\delta T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\delta t} \equiv \left(\frac{\partial T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_\omega - LT^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}$$

$$\left(\frac{\partial T^{\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial t}\right)_u \mathbf{a}_{\alpha}\mathbf{a}^{\beta} = \frac{\delta T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\delta t}\mathbf{a}_{\alpha}{}^{\wedge}\mathbf{a}^{\wedge\beta}$$

$$(2.11)\quad LT^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta} = v^{\wedge\rho}\frac{\partial T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta}}{\partial \omega^{\rho}} - T^{\wedge\rho}_{\cdot\beta}\frac{\partial v^{\wedge\alpha}}{\partial \omega^{\rho}} + T^{\wedge\alpha}_{\cdot\rho}\frac{\partial v^{\wedge\rho}}{\partial \omega^{\beta}} = v^{\wedge\rho}\nabla_{\rho}{}^{\wedge}T^{\wedge\alpha}_{\cdot\beta} - T^{\wedge\rho}_{\cdot\beta}\nabla_{\rho}{}^{\wedge}v^{\wedge\alpha} + T^{\wedge\alpha}_{\cdot\rho}\nabla_{\beta}{}^{\wedge}v^{\wedge\rho}$$

Операция $(\delta/\delta t)$-производной компонент поверхностных тензоров впервые рассматривалась в работе [7]. Четвертая формула (2.10) устанавливает связь между операцией дифференцирования компонент тензора в эйлеровом базисе при постоянных u^{α} и $(\delta/\delta t)$-производной компонент тензора в лагранжевом базисе. При этом становится понятным выбор обозначения $(\delta/\delta t)$ в формуле (1.10). Таким образом, понятие $(\delta/\delta t)$-производной характеризует изменение компонент тензора как в случае поверхности, так и в пространственном случае. Отметим, что $(\delta/\delta t)$-производная компонент тензора на поверхности не полностью описывает изменение тензора во времени, поскольку вне рассмотрения остаются слагаемые с нормальными компонентами, входящие в формулы (2.9).

Представляет интерес производная компонент метрического тензора

$$(2.12)\qquad \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}^{\wedge}}{\partial t}\right)_\omega = \nabla_\alpha{}^\wedge v_\beta{}^\wedge + \nabla_\beta{}^\wedge v_\alpha{}^\wedge - 2v_{(n)} b_{\alpha\beta}^{\wedge}$$

свертка которой приводит к уравнению неразрывности на поверхности [10]

$$(2.13)\qquad \left(\frac{\partial \rho_\Sigma}{\partial t}\right)_\omega + \rho_\Sigma \nabla_\Sigma \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \rho_\Sigma}{\partial t}\right)_\omega + \rho_\Sigma (\nabla_\alpha{}^\wedge v^{\wedge\alpha} - v_{(n)} b_\alpha^{\wedge\alpha}) = 0$$

При $v_{(n)} = \text{const}$, $b_{\alpha\beta}^{\wedge} = 0$, т. е. в случае плоскости, движущейся в пространстве с постоянной скоростью, результаты п. 2 сводятся к результатам п. 1, с той лишь разницей, что латинские индексы заменяются греческими.

3. Установим формулы дифференцирования пространственных тензоров

$$(3.1)\qquad \mathbf{T} = T^{k}_{\cdot m} \text{э}_k \text{э}^m$$

рассматриваемых на поверхности как функции (u^α, t) или (ω^α, t).

Производные по времени базисных векторов

$$(3.2)\qquad \left(\frac{\partial \text{э}_k}{\partial t}\right)_u = v_{(n)} n^p \Gamma_{pk}^q \text{э}_q, \qquad \left(\frac{\partial \text{э}^m}{\partial t}\right)_u = -v_{(n)} n^p \Gamma_{pq}^m \text{э}^q$$

$$\left(\frac{\partial \text{э}_k}{\partial t}\right)_\omega = v^p \Gamma_{pk}^q \text{э}_q, \qquad \left(\frac{\partial \text{э}^m}{\partial t}\right)_\omega = -v^p \Gamma_{pq}^m \text{э}^q$$

Следовательно,

$$(3.3)\qquad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_u = \left[\left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_u + v_{(n)} n^p T^{q}_{\cdot m} \Gamma_{pq}^k - v_{(n)} n^p T^{k}_{\cdot q} \Gamma_{pm}^q\right] \text{э}_k \text{э}^m$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\omega = \left[\left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\omega + v^p T^{q}_{\cdot m} \Gamma_{pq}^k - v^p T^{k}_{\cdot q} \Gamma_{pm}^q\right] \text{э}_k \text{э}^m$$

Используя соотношения

$$\left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_u = \left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x + v_{(n)} n^p \frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial x^p}$$

$$\left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\omega = \left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x + v^p \frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial x^p}$$

вместо формул (1.3) получим

$$(3.4)\qquad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_u = \left[\left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x + v_{(n)} n^p \nabla_p T^{k}_{\cdot m}\right] \text{э}_k \text{э}^m \equiv \frac{\delta T^{k}_{\cdot m}}{\delta t} \text{э}_k \text{э}^m$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\right)_\omega = \left[\left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_x + v^p \nabla_p T^{k}_{\cdot m}\right] \text{э}_k \text{э}^m$$

Первая формула (3.4) показывает, что компоненты производной по времени при постоянных u^α пространственного тензора на поверхности равны ($\delta/\delta t$)-производной компонент этого тензора, рассмотренной в работе [7].

На основании формул (2.10) и (3.3) ($\delta/\delta t$)-производной можно дать следующее представление

$$(3.5)\qquad \frac{\delta T^{k}_{\cdot m}}{\delta t} = \left(\frac{\partial T^{k}_{\cdot m}}{\partial t}\right)_\omega - v^\beta \nabla_\beta T^{k}_{\cdot m} + v^p T^{q}_{\cdot m} \Gamma_{pq}^k - v^p T^{k}_{\cdot q} \Gamma_{pm}^q, \qquad \nabla_\beta T^{k}_{\cdot m} = x_\beta{}^p \nabla_p T^{k}_{\cdot m}$$

4. Зная производные (2.8) и (3.2), можно легко продифференцировать двойные тензоры, если только представить их в инвариантном виде, на-

пример,

$$\text{(4.1)}\qquad \mathbf{W} = W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}\mathbf{a}_\alpha\mathbf{a}^\beta\mathbf{э}_k\mathbf{э}^m = W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}\mathbf{a}_\alpha{}^\wedge\mathbf{a}^{\wedge\beta}\mathbf{э}_k\mathbf{э}^m$$

При описании зависимости компонент двойного тензора от точки на поверхности возможны два случая [7]: соотношения (2.1) только подразумеваются, т. е. $W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} = f_1(x^k, u^\alpha, t)$, $W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} = f_2(x^k, \omega^\beta, t)$, или x^k уже исключены при помощи (2.1), т. е. $W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} = f_3(u^\alpha, t)$, $W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} = f_4(\omega^\alpha, t)$.

Первому случаю соответствуют производные $(\partial W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}/\partial t)_{x,u}$ и $(\partial W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}/\partial t)_{x,\omega}$, второму — $(\partial W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}/\partial t)_u$ и $(\partial W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}/\partial t)_\omega$.

Таким образом, существуют четыре различных представления $(\partial W/\partial t)_u$ и четыре различных представления $(\partial W/\partial t)_\omega$. Получение их не представляет труда, однако ввиду громоздкости здесь они не приводятся.

Связь дифференцирования компонент двойного тензора в эйлеровом базисе с $(\delta/\delta t)$-производной компонент этого тензора в лагранжевом базисе выражается формулами [1]

$$\text{(4.2)}\qquad \left[\left(\frac{\partial W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\partial t}\right)_{x,u} + v_{(n)}n^q\nabla_q W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}\right]\mathbf{a}_\alpha\mathbf{a}^\beta\mathbf{э}_k\mathbf{э}^m = \\ = \frac{\delta W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\delta t}\mathbf{a}_\alpha{}^\wedge\mathbf{a}^{\wedge\beta}\mathbf{э}_k\mathbf{э}^m$$

$$\text{(4.3)}\qquad \frac{\delta W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\delta t} \equiv \left(\frac{\partial W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\partial t}\right)_{x,\omega} - LW^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} + v_{(n)}n^q\nabla_q W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}$$

$$\text{(4.4)}\qquad \frac{\delta W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\delta t} = \left(\frac{\partial W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\partial t}\right)_\omega - v^{\wedge\gamma}\nabla_\gamma{}^\wedge W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} + \\ + W^{\wedge\rho\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}\nabla_\rho{}^\wedge v^{\wedge\alpha} - W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\rho\cdot m}\nabla_\beta{}^\wedge v^{\wedge\rho} + v^q\left(W^{\wedge\alpha\cdot p}_{\cdot\beta\cdot m}\Gamma^k_{pq} - W^{\wedge\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot p}\Gamma^p_{qm}\right)$$

Производная Ли определяется первой формулой (2.11) и затрагивает только греческие индексы, ковариантные дифференцирование $\nabla_q W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}$ затрагивает только латинские индексы и осуществляется при помощи пространственных символов Кристоффеля, ковариантная производная $\nabla_\gamma W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}$ имеет следующую структуру [9]:

$$\text{(4.5)}\qquad \nabla_\gamma W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m} = \frac{\partial W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}}{\partial u^\gamma} + W^{\rho\cdot k}_{\cdot\beta\cdot m}G^\alpha_{\gamma\rho} - W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\rho\cdot m}G^\rho_{\gamma\beta} + \\ + x_\gamma{}^p W^{\alpha\cdot q}_{\cdot\beta\cdot m}\Gamma^k_{pq} - x_\gamma{}^p W^{\alpha\cdot k}_{\cdot\beta\cdot q}\Gamma^q_{pm}$$

5. Развитый аппарат может быть использован при исследовании распространения волн в сплошной среде [4, 6, 13] и фронта пламени [4], в теории пластического течения и разрушения [6], при изучении поверхностных явлений [10, 11, 14], в динамических задачах нелинейной теории оболочек и т. д.

В качестве примера приведем выражения для поверхностных и нормальных (5.1), а также пространственных (5.2) компонент ускорения $\mathbf{j} = (\partial\mathbf{v}/\partial t)_\omega$ точек на поверхности, движущейся в трехмерном пространстве

$$\text{(5.1)}\qquad \dot\gamma^\alpha = \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t}\right)_\omega + v^\rho\left(v^\lambda G^\alpha_{\lambda\rho} - b^\alpha_\rho v_{(n)}\right) - v_{(n)}\left(b_{\gamma\beta}v^\gamma + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^\beta}\right)a^{\alpha\beta}$$

$$\dot\gamma^{\wedge\alpha} = \left(\frac{\partial v^{\wedge\alpha}}{\partial t}\right)_\omega + v^{\wedge\rho}\left(\nabla^\wedge_\rho v^{\wedge\alpha} - b^{\wedge\alpha}_{\ \rho}v_{(n)}\right) - \\ - v_{(n)}\left(b^\wedge_{\gamma\beta}v^{\wedge\gamma} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial\omega^\beta}\right)a^{\wedge\alpha\beta}$$

---

[1] Операция $(\delta/\delta t)$-производной (4.3) была введена в [7], а эквивалентное представление (4.4) — в работе Гринфельда М. А. $(\delta/\delta t)$-Производная и ее свойства. М., 1976.— 19 с. Деп. в ВИНИТИ, 14.04.76; № 1255—76.

$$j_{(n)} = \left(\frac{\partial v_{(n)}}{\partial t}\right)_{\omega} + v^{\alpha}\left(v^{\gamma} b_{\gamma\alpha} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial u^{\alpha}}\right) = \left(\frac{\partial v_{(n)}}{\partial t}\right)_{\omega} + $$
$$+ v^{\Lambda\alpha}\left(v^{\Lambda\gamma} b^{\Lambda}_{\gamma\alpha} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \omega^{\alpha}}\right)$$

$$j^{k} = \left(\frac{\partial v^{k}}{\partial t}\right)_{\omega} + v^{i} v^{p} \Gamma^{k}_{ip} = \left(\frac{\partial v^{k}}{\partial t}\right)_{x} + v^{p} \nabla_{p} v^{k} \tag{5.2}$$

Было отмечено [11], что выражения $j^{\alpha} = (\partial v^{\alpha}/\partial t)_{\omega}$, приведенные в [10, 14], в общем случае неверны и что необходимо учитывать в выражениях для компонент ускорений слагаемые, связанные с изменением локального базиса на поверхности. Формулы (5.1) учитывают указанное изменение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
2. *Naghdi P. M., Wainwright W. L.* On the time derivative of tensors in mechanics of continua.— Quart. J. Appl. Math., 1961, v. 19, No 2, p. 95—109.
3. *Guo Zhong-heng.* Time derivatives of tensor fields in non-linear continuum mechanics.— Arch. mech. stosowanej, 1963, v. 15, No 1, p. 131—163.
4. *Hayes W. Д.* The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity.— J. Fluid Mech., 1957, v. 2, pt 6, p. 595—600.
5. *Thomas T. Y.* Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics.— J. Math. and Mech., 1957, v. 6, No 3, p. 311—322.
6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
7. *Truesdell C. A., Toupin R. A.*, The classical field theories.— In: Handbuch der Physik. Bd 3/1, Berlin: Springer, 1960, p. 226—793.
8. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
9. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 374 с.
10. *Aris R.* Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962. 286 p.
11. *Slattery J. C.* Surfaces.— I. Momentum and moment — of — momentum balances for moving surfaces.— Chem. Engng. Sci., 1964, v. 19, No 6, p. 379—385.
12. *Green A. E., Naghdi P. M., Wainwright W. L.* A general theory of a Cosserat surface.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1965, v. 20, No 4, p. 287—308.
13. *Estrada R., Kanwal R. P.* Applications of distributional derivatives to wave propagation.— J. Inst. Math. Appl., 1980, v. 26, No 1, p. 39—63.
14. *Scriven L. E.* Dynamics of fluid interface.— Chem. Engng. Sci., 1960, v. 12, No 2, p. 98—108.

Львов

Поступила в редакцию
1.VI.1982