Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 539.374

РАСШИРЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ С РАЗРЫВАМИ ТИПА СКОЛЬЖЕНИЙ

Серегин Г. А.

Описываются множества полей скоростей, содержащих разрывы типа скольжений как на границе жесткопластической среды, так и внутри нее, и функционалы, которые на этих множествах определены. Доказывается, что нижние точные грани вариационных задач для этих функционалов равны коэффициенту предельной нагрузки. При этом используется построенная в работе минимаксная задача с седловой точкой, которая может быть истолкована как расширение классической минимаксной задачи теории предельной нагрузки.

Известно, что классическая вариационная постановка задачи определения поля скоростей, соответствующего состоянию предельного равновесия жесткопластической среды, некорректна в следующем смысле. В ряде задач не существует гладких полей скоростей, на которых реализуется предельная нагрузка (см., например, [1, 2]). Это создает неудобства вычислительного порядка, поскольку приходится использовать минимизирующие последовательности гладких полей скоростей, на пределах которых классический функционал, дающий оценки сверху для коэффициента предельной нагрузки, неопределен.

Корректную постановку соответствующей вариационной задачи можно непосредственно получить из абстрактной схемы расширения, сформулированной в [3]. Результаты последующих исследований по данному вопросу близки приведенным в [3] (подробнее см. [1]). Как отмечено в [1], полученные в этих работах вариационные расширения нельзя, однако, считать окончательными и эффективными, поскольку желательно иметь их не в терминах мер, а в терминах вектор-функций точки.

Ниже приводится расширение классической вариационной задачи, из которого можно получить ряд полезных для приложений следствий.

1. Основные обозначения и постановка задачи. Обозначим через Ω область евклидова пространства R^n ($n=2, 3$). Предполагаем, что она ограничена и имеет границу Γ, которая удовлетворяет условию Липшица. Поле скоростей обозначим через $u=(u_i)$, а тензор скоростей деформаций через $\varepsilon(u)=(\varepsilon_{ij}(u))$, если выбрана декартова система координат, то $2\varepsilon_{ij}(u)=u_{i,j}+u_{j,i}$. Через $\sigma=(\sigma_{ij})$ будем обозначать тензор напряжений, а через σ_{kk} и σ^D — его первый инвариант и девиатор.

Определим пространства полей скоростей, которые будут использованы в дальнейшем

$$D^2(\Omega)=\left\{u:\ \|u\|=\int_\Omega(|u|+|\varepsilon^D(u)|)\,dx+\left(\int_\Omega \operatorname{div}^2 u\,dx\right)^{1/2}<+\infty\right\} \tag{1.1}$$

$$|u|^2=u_iu_i,\quad |\varepsilon|^2=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\ \operatorname{div} u=u_{i,i}$$

Дифференциальный оператор $\varepsilon_{ij}(u)$ понимается в смысле распределений, т. е.

$$\int_\Omega(u_i\varphi_{,j}+u_j\varphi_{,i})\,dx=-2\int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\,\varphi\,dx$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции φ с компактным носителем в Ω.

Пространство функций $D^2(\Omega)$ обладает следующими свойствами:
а) гладкие функции плотны в пространстве $D^2(\Omega)$ по его норме;

б) пространство $D^2(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в пространства суммируемых вектор-функций $L^r(\Omega)^n$ при $r \in [1, n/(n-1)]$ и непрерывно в $L^{n/(n-1)}(\Omega)^n$;

в) вектор-функции из $D^2(\Omega)$ имеют суммируемые следы на Γ, более точно, пространство $D^2(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $L^1(\Gamma)^n$.

Поля напряжений, задаваемые симметричными тензорами второго ранга, будем изучать в следующем классе:

$$\Sigma = \{\tau\colon \tau = (\tau_{ij}),\ \tau_{ij} = \tau_{ji},\ \tau_{kk} \in L^2(\Omega)\quad \tau_{ij}{}^D \in L^\infty(\Omega),\quad i, j = 1,\ldots, n\} \tag{1.2}$$

Обозначим через K множество всех $\tau \in \Sigma$, удовлетворяющих условию Мизеса (k_* — заданная величина)

$$K = \{\tau \in \Sigma\colon |\tau^D(x)| \leqslant \sqrt{2}\, k_* \text{ для почти всех } x \in \Omega\}$$

Будем считать, что в Ω задано поле распределенных нагрузок $f = (f_i)$, а на части поверхности γ задано поле поверхностных нагрузок $F = (F_i)$, причем

$$f_i \in L^n(\Omega),\quad F_i \in L^\infty(\gamma),\quad i = 1,\ldots, n \tag{1.3}$$

Рассмотрим множество допустимых полей скоростей

$$V = \{v \in D^2(\Omega)\colon \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega,\ v = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \gamma,\quad \int_\Omega f_i v_i\, dx + \int_\gamma F_i v_i\, d\Gamma = 1\}$$

Известно (см., например, [1]), что коэффициент предельной нагрузки λ_* для жесткопластической среды определяется из решения следующей минимаксной задачи:

$$\lambda_* = \inf_V \sup_K \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\tau_{ij}\, dx = \sup_K \inf_V \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\tau_{ij}\, dx \tag{1.4}$$

Если ввести обозначения

$$J(v) = \sup_K \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\tau_{ij}\, dx = \sqrt{2}\, k_* \int_\Omega |\varepsilon(v)|\, dx$$

$$R(\tau) = \inf_V \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\tau_{ij}\, dx$$

то функционалы $J(v)$ и $R(\tau)$ дают соответственно верхнюю и нижнюю оценки коэффициента предельной нагрузки λ_*, причем

$$\lambda_* = \inf_V J(v) = \max_K R(\tau) = R(\tau_*)$$

Замена sup на max, как обычно, означает, что существует элемент $\tau_* \in K$, на котором достигается верхняя точная грань функционала R.

Для функционала J замена inf на min, вообще говоря, некорректна, поскольку на множестве V может и не быть поля скоростей, реализующего его нижнюю точную грань. Объясняется это тем, что класс V не содержит полей скоростей, описывающих разрывы типа скольжений. Более того, сам функционал J на таких полях неопределен. Все это создает значительные трудности в оценках сверху коэффициента предельной нагрузки.

Ниже будут построены функционалы Φ и связанные с ними множества полей скоростей V_Φ, содержащие широкий класс разрывных полей. Функционалы Φ на V_Φ будут давать оценки сверху для коэффициента предельной нагрузки. Эти оценки будут точны в том смысле, что нижняя точная грань функционала Φ на V_Φ равна значению коэффициента предельной нагрузки.

Практическая ценность подобных функционалов заключается в следующем. Во-первых, сужение Φ на V выдает функционал J, и следовательно, оценки сверху, которые дает J, можно получить, используя функционал Φ. Во-вторых, функционал Φ содержит больше параметров, которые можно изменять, и это дает большую свободу при построении оценок сверху для λ_*. В-третьих, вычисление функционала Φ на разрывных полях не труднее вычисления функционала J на гладких полях. Последнее представляется весьма существенным, поскольку получение оценки сверху на разрывном поле скоростей сводится главным образом к предельному переходу на последовательности гладких полей, в некотором смысле сходящейся к разрывному полю скоростей. По существу в данной работе такой предельный переход совершен в общем виде, что избавляет от необходимости проделывать его в каждом конкретном случае.

В п. 2 приводится пример, в котором использование описанной выше процедуры позволяет получить точное значение предельной нагрузки на разрывном поле.

Опишем общий план построения функционалов Φ и множеств V_Φ, на которых они определены. Основным источником их построения служит минимаксная задача, которая имеет седловую точку, причем значение соответствующего лагранжиана в седловой точке в точности равно коэффициенту предельной нагрузки. Эту задачу можно назвать математическим расширением задачи (1.4), ее лагранжиан — расширением лагранжиана

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\,\tau_{ij}\,dx$$

а ее седловую точку — обобщенным решением задачи (1.4). Однако построенные в ней множества изменения двойственных переменных, хотя и содержат в себе всевозможные разрывные и гладкие поля скоростей и напряжений, сложны для использования в приложениях. Поэтому естественно выделить определенные классы разрывов и получить промежуточные множества полей скоростей и напряжений, которые содержат в себе гладкие поля. Вычисляя значения расширенного лагранжиана на этих промежуточных множествах, придем к функционалам Φ. Их нижняя точная грань на этих множествах равна коэффициенту предельной нагрузки.

2. Основные результаты. Пусть поверхность Γ_0 делит область Ω на две области Ω^1 и Ω^2, каждая из которых имеет границу, удовлетворяющую условию Липшица. Обозначим через $\nu^1 = (\nu_i^1)$ и $\nu^2 = (\nu_i^2)$ единичные внешние нормали к поверхностям, ограничивающим области Ω^1 и Ω^2 соответственно, а через $\nu = (\nu_i)$ — внешнюю единичную нормаль к поверхности Γ. Рассмотрим класс функции $V(\Gamma_0, \gamma)$ следующего вида:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} V(\Gamma_0, \gamma) = \Big\{&(v, w):\ v = v^1 \in D^2(\Omega^1),\ \text{если } x \in \Omega^1\\ &v = v^2 \in D^2(\Omega^2),\ \text{если } x \in \Omega^2;\ v_i^1\nu_i^1 + v_i^2\nu_i^2 = 0\\ &\text{на } \Gamma_0,\ v_i\nu_i = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \gamma;\ \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega;\\ &w \in D^2(\Omega);\ w_i\nu_i = v_i\nu_i \text{ на } \gamma,\ w = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \gamma;\\ &\int_\Omega f_i v_i\,dx + \int_\gamma F_i w_i\,d\Gamma = 1\Big\}\end{aligned}$$

Отметим, что класс $V(\Gamma_0, \gamma)$ непуст, поскольку $(v, v) \in V(\Gamma_0, \gamma)$ для любой $v \in V$.

Класс функций $V(\Gamma_0, \gamma)$ содержит поля скоростей, которые могут иметь разрывы типа скольжений на поверхностях Γ_0 и Γ. Подкласс класса $V(\Gamma_0, \gamma)$, для которого $v \in D^2(\Omega)$, будем обозначать через $V(\gamma)$.

Положим $S(\nu, v) = \frac{1}{2}(\nu_i v_j + \nu_j v_i)$ и определим функционалы $\Phi_{\Gamma_0, \gamma}$ и Φ_γ на классах $V(\Gamma_0, \gamma)$ и $V(\gamma)$ следующим образом:

(2.2)
$$\Phi_{\Gamma_0,\gamma}(v, w) = \sqrt{2}\, k_* \Big(\int_{\Omega^1} |\varepsilon(v^1)|\, dx + \int_{\Omega^2} |\varepsilon(v^2)|\, dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_0} |S(\nu^1, v^1) + S(\nu^2, v^2)|\, d\Gamma_0 + \int_\gamma |S(\nu, v - w)|\, d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma\setminus\gamma} |S(\nu, v)|\, d\Gamma \Big), \quad \forall (v, w) \in V(\Gamma_0, \gamma)$$
$$\Phi_\gamma(v, w) = \sqrt{2}\, k_* \Big(\int_\Omega |\varepsilon(v)|\, dx + \int_\gamma |S(\nu, v - w)|\, d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma\setminus\gamma} |S(\nu, v)|\, d\Gamma \Big), \quad \forall (v, w) \in V(\gamma)$$

Имеют место следующие утверждения (доказательство см. в п. 3):

(2.3)
$$\lambda_* = \inf_{V(\Gamma_0, \gamma)} \Phi_{\Gamma_0,\gamma}(v, w) = \inf_{V(\gamma)} \Phi_\gamma(v, w) = \inf_V J(v)$$

Отметим, что значение нижней точной грани функционала $\Phi_{\Gamma_0,\gamma}$ на множестве $V(\Gamma_0, \gamma)$ не зависит от выбора поверхности Γ_0.

Таким образом, при построении верхних оценок для λ_* при помощи функционала $\Phi_{\Gamma_0,\gamma}$ имеем три параметра v, w и Γ_0 против одного параметра v при использовании функционала J.

В качестве примера использования построенных выше функционалов рассмотрим следующую модельную плоскую задачу. Дано кольцо, внешняя граница которого закреплена, а внутренняя нагружена касательными силами с плотностью, равной по величине пределу текучести материала. В такой задаче λ_* оценивается снизу единицей при помощи осесимметричного поля напряжений специального вида (см. ниже). На самом деле $\lambda_* = 1$, но, как показано в [2], не существует поля скоростей из класса V, на котором функционал J принимает значение, равное единице. Поэтому доказательство того факта, что $\lambda_* = 1$, при использовании лишь функционала J и класса V носит весьма тонкий характер и опирается на построение специальной последовательности полей скоростей из класса V, на которой значение функционала J стремится к единице. Однако использование класса $V(\gamma)$ и функционала Φ_γ позволяет элементарно показать, что $\lambda_* = 1$.

Приведем соответствующие выкладки. Введем полярные координаты ρ, θ с полюсом в центре кольца, причем для точек кольца $0 < R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Будем использовать обозначения

$$v = (v_\rho, v_\theta), \quad w = (w_\rho, w_\theta), \quad \tau = \begin{Vmatrix} \tau_{\rho\rho} & \tau_{\rho\theta} \\ \tau_{\rho\theta} & \tau_{\theta\theta} \end{Vmatrix}, \quad F = (F_\rho, F_\theta)$$

В данном случае γ — внутренняя граница кольца, $f = 0$, $F = (0, k_*)$.

Положим

$$\tau_* = k_* \left(\frac{R_1}{\rho} \right)^2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

тогда можно установить, что $R(\tau_*) = 1$ и, следовательно, $\lambda_* \geqslant 1$.

Возьмем $v_* = 0$, $w_* = (2\pi R_1)^{-1}(0, \varphi(\rho))$, где φ — непрерывно дифференцируемая в $[R_1, R_2]$ функция, такая, что $\varphi(R_1) = 1$ и $\varphi(R_2) = 0$. Ясно, что пара $(v_*, w_*) \in V(\gamma)$, причем

$$S(\nu, w_*) = -(4\pi R_1 k_*)^{-1} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ на } \gamma$$

Тогда

$$\Phi_\gamma (v_*, w_*) = \sqrt{2}\, k_* \int_\gamma |S(\nu, w_*)|\, d\Gamma = 1 \geqslant \lambda_*$$

Таким образом, $\lambda_* = 1$.

3. Обоснование результатов. Обозначим через μ_γ лебегову поверхностную меру, определяемую обычным образом на поверхности γ, удовлетворяющей условию Липшица, через Σ_γ — σ-алгебру подмножества γ, измеримых относительно меры μ_γ, через $\mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma)$ — банахово пространство всех конечно аддитивных функций φ, определенных на Σ_γ, которые имеют ограниченную вариацию на γ и абсолютно непрерывны относительно меры μ_γ (т. е., если $\gamma_0 \in \Sigma_\gamma$ и $\mu_\gamma(\gamma_0) = 0$, то вариация φ на γ_0 также равна нулю). Тогда можно определить интеграл от функции $g \in L^\infty(\gamma)$ по конечно аддитивной функции $\varphi \in \mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma)$ и функционал

$$g \mapsto \int_\gamma g\, d\varphi$$

является линейным непрерывным функционалом на $L^\infty(\gamma)$. Более того, пространство, сопряженное к $L^\infty(\gamma)$, изометрически изоморфно пространству $\mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma)$, если в последнем в качестве нормы взять полную вариацию φ на γ [4].

Будем обозначать норму в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)^n$ через $|||\cdot|||$. Положим

$$V_+ = \{v \in D^2(\Omega):\ v = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \gamma\}, \quad V_- = \{v \in W_2^1(\Omega)^n:\ v = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \gamma\}$$

Предположим, что γ так расположено на Γ, что V_- плотно в V_+ по норме пространства $D^2(\Omega)$. Это условие автоматически выполнено, если $\gamma = \varnothing$ или $\gamma = \Gamma$.

Определим теперь два основных пространства, которые будут использованы в теореме о расширении

$$U = \Big\{(u, \varphi):\ u = (u_i),\ \varphi = (\varphi_i),\ u_i \in L^{n/(n-1)}(\Omega),$$
$$\varphi_i \in \mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma),\ i = 1, \ldots, n,\ \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$\int_\Omega f_i u_i\, dx + \int_\gamma F_i\, d\varphi_i = 1\Big\}$$

$$G = \Big\{(\tau, g):\ \tau = (\tau_{ij}),\ g = (g_i),\ \tau \in K,$$
$$g_i \in L^\infty(\gamma),\ \tau_{ij,j} \in L^n(\Omega),\ i, j = 1, \ldots, n,$$
$$\int_\gamma g_i v_i\, d\Gamma = \int_\Omega (\varepsilon_{ij}(v)\tau_{ij} + v_i \tau_{ij,j})\, dx, \quad \forall v \in V_+\Big\}$$

В определении пространства G дифференциальный оператор $\tau_{ij,j}$ понимается в смысле распределений.

Рассмотрим на множестве $U \times G$ расширенный лагранжиан

$$L(v, \varphi; \tau, g) = -\int_\Omega \tau_{ij,j} v_i\, dx + \int_\gamma g_i\, d\varphi_i$$

Теорема. При выполнении сделанных предположений лагранжиан L имеет на множестве $U \times G$ седловую точку $(u, \Psi) \in U$, $(\sigma, h) \in G$, такую, что

(3.1) $$L(u, \Psi; \tau, g) \leqslant L(u, \Psi; \sigma, h) \leqslant L(v, \varphi; \sigma, h)$$

для любой пары $(v, \varphi) \in U$ и любой пары $(\tau, g) \in G$, причем

(3.2) $$\lambda_* = L(u, \Psi; \sigma, h) = \sup_G L(u, \Psi; \tau, g) = \min_U \sup_G L(v, \varphi; \tau, g)$$

Доказательство. Определим вспомогательные множества

$$K_0 = \{\tau \in K\colon \tau_{kk}(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in \Omega\}$$

$$V_m = \{v \in V\colon \ |||v||| \leqslant m\}$$

В силу стандартных теорем о седловых точках (см., например, [5]) на множестве $V_m \times K_0$ существует седловая точка лагранжиана

$$l(v, \tau) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\tau_{ij}\,dx$$

такая, что

$$l(u_m, \tau) \leqslant l(u_m, \tau_m) \leqslant l(v, \tau_m), \quad u_m \in V_m, \ \tau_m \in K_0 \tag{3.3}$$

для любых $v \in V_m$, $\tau \in K_0$

Из неравенства (1.3) следует, что

$$J(u_m) = \min_{V_m} J(v) = l(u_m, \tau_m) \tag{3.4}$$

Это означает, что последовательность u_m имеет равномерно ограниченную норму в $D^2(\Omega)$. Положим

$$\varphi_m(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} u_m\,d\Gamma, \quad \forall \gamma_0 \in \Sigma_\gamma$$

тогда $\varphi_m \in \mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma)^n$ и нормы φ_m равномерно ограничены по m в $\mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma)^n$. Поэтому можно выбрать направления, такие, что [4]

$$u_\alpha \xrightarrow[A]{} u \quad \text{слабо в } L^{n/(n-1)}(\Omega)^n \tag{3.5}$$

$$\varphi_\alpha \xrightarrow[A]{} \Psi \quad (*)\text{— слабо в } \mathbf{ba}(\gamma, \Sigma_\gamma, \mu_\gamma)^n$$

$$\tau_\alpha \xrightarrow[A]{} \tau_* \in K_0 \quad (*)\text{— слабо в } L^\infty(\Omega)^{n(n+1)/2}$$

Здесь A — упорядоченное множество, направленное по возрастанию.

Если $(\tau, g) \in G$, то имеем равенство

$$l(u_m, \tau) = L(u_m, \varphi_m; \tau, g) \tag{3.6}$$

Переходя к пределу в неравенстве (3.3) с учетом соотношений (3.4)—(3.6), получим

$$L(u, \psi; \tau, g) \leqslant \inf_{V_*} J(v) \leqslant l(v, \tau_*) \tag{3.7}$$

для любых $(\tau, g) \in G$ и любой функции $v \in V_*$, где $V_* = V \cap W_2^1(\Omega)^n$, причем $(u, \Psi) \in U$, так как $\operatorname{div} u = 0$ в Ω и

$$\int_\Omega f_i u_i\,dx + \int_\gamma F_i\,d\Psi_i = 1$$

Из правой части неравенства (3.7) следует, что существует число λ_0, такое, что

$$l(v, \tau_*) = \lambda_0\Big(\int_\Omega f_i v_i\,dx + \int_\gamma F_i v_i\,d\Gamma\Big), \quad \forall v \in V_\times \tag{3.8}$$

$$V_\times = \{v \in V_-\colon \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega\}$$

$$\lambda_* \leqslant \inf_{V_*} J(v) \leqslant \lambda_0 \tag{3.9}$$

В частности, тождество (3.8) имеет место для любого соленоидального поля из $W_2^1(\Omega)^n$, которое обращается в нуль на Γ, а тогда существует такая функция $p \in L^2(\Omega)$, что [6]

$$\int_\Omega (p \operatorname{div} v + \varepsilon_{ij}(v)\tau_{*ij})\,dx = \lambda_0 \int_\Omega f_i v_i\,dx \tag{3.10}$$

для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)^n$, след которой на Γ равен нулю. Положим $\sigma = (p\delta_{ij} + \tau_{*ij})$, тогда

$$\sigma \in K, \quad \sigma_{ij,j} = -\lambda_0 f_i \in L^n(\Omega) \tag{3.11}$$

Можно показать, что

$$l(v, \sigma) = \lambda_0 \left(\int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_\gamma F_i v_i \, d\Gamma \right), \quad \forall v \in V_+ \tag{3.12}$$

В силу наложенных условий плотности равенство (3.12) достаточно установить для любой функции $v \in V_-$.

Пусть v — любое поле из V_-, но такое, что

$$\int_\gamma \nu_i v_i \, d\Gamma = 0 \tag{3.13}$$

Существует соленоидальное поле $u_0 \in W_2^1(\Omega)^n$, такое, что $u_0 = v$ на Γ [6]. Рассматривая равенство (3.10) для функции $v - u_0$ с учетом тождества (3.8), получим, что (3.12) выполнено для выбранного поля v. Если v — произвольное поле из V_-, то учтем, что функция p, удовлетворяющая равенству (3.10), определена с точностью до постоянного слагаемого. Представим p в виде

$$p = p_0 + c, \quad \int_\Omega p_0 \, dx = 0$$

и подберем c так, чтобы имело место тождество (3.12).

Выберем функцию $u_* \in V_-$, такую, чтобы

$$\int_\Omega \operatorname{div} u_* \, dx = c_1 \neq 0$$

Если такой функции в V_- не существует, то проверка тождества (3.12) исчерпывается предыдущей ситуацией, так как в этом случае выполнено условие (3.13) для любой функции $v \in V_-$. Положим

$$c = \frac{\lambda_0}{c_1} \left(\int_\Omega f_i u_{*i} \, dx + \int_\gamma F_i u_{*i} \, d\Gamma \right) - \frac{1}{c_1} l(u_*, \sigma_*), \quad \sigma_* = (p_0 \delta_{ij} + \tau_{*ij})$$

Если v представить в виде

$$v = v' + \frac{u_*}{c_1} \int_\gamma v_i \nu_i \, d\Gamma$$

то поле v' удовлетворяет условию (3.13), тогда

$$l(v, \sigma) - \lambda_0 \left(\int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_\gamma F_i v_i \, d\Gamma \right) = \frac{1}{c_1} \int_\gamma v_i \nu_i \, d\Gamma \left[l(u_*, \sigma_*) - \right.$$

$$\left. - \lambda_0 \left(\int_\Omega f_i u_{*i} \, dx + \int_\gamma F_i u_{*i} \, d\Gamma \right) + c \int_\Omega \operatorname{div} u_* \, dx \right] = 0$$

Таким образом, тождество (3.12) доказано.

Из (3.11), (3.12) следует, что $(\sigma, h) \in G$, если $h = \lambda_0 F$, более того, $\lambda_0 = \lambda_*$, и, наконец

$$\lambda_* = L(v, \varphi; \sigma, h), \quad \forall (v, \varphi) \in U \tag{3.14}$$

Из (3.14) и левой части неравенства (3.7) вытекает утверждение теоремы.

Из этой теоремы следуют соотношения (2.3).

Действительно, если $(v, w) \in V(\Gamma_0, \gamma)$, то пара $(v, \varphi_w) \in U$, где

$$\varphi_w(\gamma_0) = \int_{\gamma_0} w \, d\Gamma, \quad \forall \gamma_0 \in \Sigma$$

Оценим сверху $\sup\limits_G L(v, \varphi_w; \tau, g)$. Чтобы показать идею получения этой оценки, предположим, для простоты, что область Ω звездна относительно некоторой своей точки.

Пусть $(\tau, g) \in G$, тогда существует последовательность симметричных тензорных полей τ^m, такая, что

(3.15) $$\tau_{kk}^m \to \tau_{kk} \text{ сильно в } L^2(\Omega)$$
$$\tau_{ij}^{Dm} \to \tau_{ij}^D \text{ (*)-слабо в } L^\infty(\gamma)$$
$$\tau_{ij,j}^m \to \tau_{ij,j}^m \text{ сильно в } L^n(\Omega)\ (i, j = 1, \ldots, n)$$
$$\tau_{ij}^m \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \tau^m \in K$$

Для построения такой последовательности достаточно проделать следующие операции: поместить начало координат в точку звездности области Ω, продолжить тензор τ при помощи преобразования подобия с центром в точке звездности на область, получаемую из Ω, тем же преобразованием подобия. Тогда указанная в (3.15) последовательность строится при помощи средних от продолжения тензора τ, при этом используются стандартные усредняющие ядра [7].

Далее имеем

$$L(v, \varphi_w;\ \tau^m, g) = -\int_\Omega v_i \tau_{ij,j}{}^m\, dx + \int_\gamma g_i w_i\, d\Gamma = \int_{\Omega^1} \varepsilon_{ij}(v^1)\, \tau_{ij}{}^m\, dx +$$
$$+ \int_{\Omega^2} \varepsilon_{ij}(v^2)\, \tau_{ij}{}^m\, dx - \int_{\Gamma_0} \tau_{ij}{}^m \left(S_{ij}(\nu^1, v^1) + S_{ij}(\nu^2, v^2)\right) d\Gamma_0 -$$
$$- \int_\gamma \tau_{ij}{}^m S_{ij}(\nu, v - w)\, d\Gamma - \int_{\Gamma \setminus \gamma} \tau_{ij}{}^m S_{ij}(\nu, v)\, d\Gamma + \int_\gamma (g_i - \nu_j \tau_{ij}{}^m)\, w_i\, d\Gamma$$

В силу определения класса $V(\Gamma_0, \gamma)$ первые инварианты тензоров $S(\nu^1, v^1) + S(\nu^2, v^2)$, $S(\nu, v - w)$ и $S(\nu, v)$ равны нулю на Γ_0, γ и $\Gamma \setminus \gamma$ соответственно. Так как $\tau^m \in K$, то придем к неравенству

$$L(v, \varphi_w; \tau^m, g) \leqslant \Phi_{\Gamma_0, \gamma}(v, w) + \int_\gamma (g_i - \nu_j \tau_{ij}{}^m)\, w_i\, d\Gamma$$

По определению класса $V(\Gamma_0, \gamma)$ вектор-функция $w \in V_+$, а тогда в силу (3.15) и определения класса G получим

$$\int_\gamma (g_i - \nu_j \tau_{ij}{}^m) w_i\, d\Gamma = \int_\Omega \left(w_i (\tau_{ij,j} - \tau_{ij,j}^m) + \varepsilon_{ij}(w)(\tau_{ij} - \tau_{ij}{}^m)\right) dx \to 0$$

Но, поскольку $L(v, \varphi_w;\ \tau^m, g) \to L(v, \varphi_w;\ \tau, g)$, окончательно будем иметь

$$L(v, \varphi_w;\ \tau, g) \leqslant \Phi_{\Gamma_0, \gamma}(v, w), \quad \forall (\tau, g) \in G$$

Последнее неравенство приводит к оценке

(3.16) $$\sup_G L(v, \varphi_w;\ \tau, g) \leqslant \Phi_{\Gamma_0, \gamma}(v, w)$$

Из оценки (3.16) и утверждения (3.2) теоремы следует, что

$$\lambda_* \leqslant \inf_{V(\Gamma_0, \gamma)} \Phi_{\Gamma_0, \gamma}(v, w)$$

Обратное неравенство очевидно. Таким образом, равенства (2.3) доказаны.

Отметим, что более тонкие рассуждения приводят к тому, что в соотношении (3.16) имеет место равенство.

В общем случае существование последовательности, обладающей свойствами, указанными в (3.15), доказывается стандартно, поскольку область, граница которой удовлетворяет условию Липшица, локально звездна. Учитывая, что $\overline{\Omega}$ — компакт, конечным разбиением единицы в $\overline{\Omega}$ все сводим к области, звездной относительно некоторой своей точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
2. *Каменярж Я. А.* О двойственных задачах теории предельной нагрузки для идеально-пластических сред.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 1, с. 51—54.
3. *Мосолов П. П.* О проблеме минимума функционала.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1967, т. 31, № 6, с. 1289—1310.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 724 с.
5. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Наука, 1979. 399 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье — Стокса.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1976, т. 59, с. 81—116.
7. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
19.V.1983