

УДК 539.374

ЖЕСТКОСТЬ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ ПРОСТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Леонов М. Я., Передерий В. Д.

Рассматриваются призматические стержни, для которых траектории касательных напряжений при упругой деформации близки к известным траекториям этих напряжений в предельном случае идеальной пластичности. Уделяется внимание исследованию жесткости упругопластического кручения при идеальной пластичности.

Проблема чистого кручения призматических неупругих стержней занимает особое место в краевых задачах механики сплошной среды, помимо того, что она является простейшей в этом классе задач; если исключить случай наличия зуба текучести [1], то кручение не сопровождается разгрузкой; предельный случай идеально пластического кручения — статически определимый и поддается исследованию элементарным способом. Появление частичной пластической деформации формально усложняет эту проблему [2]. Но обычно практический интерес здесь представляют не величины напряжений, а значения деформаций. Именно они часто лимитируют нагрузки. Ясно, что жесткость на кручение в этом смысле представляет первоочередной интерес. Она же определяется весьма точно обходным путем, минуя решение дифференциального уравнения в частных производных при неизвестной [упругопластической границе].

Довольно просто изучается [3] упругое кручение тонкостенных и цилиндрических стержней, у которых отсутствуют очаги концентрации напряжений. Пластическая деформация снижает остроту концентрации напряжений и, тем самым, расширяет границы применимости упрощенных методов решения упругопластических задач тем эффективнее, чем выше уровень пластических деформаций по сравнению с упругими.

В основе предлагаемого упрощения находится идея о возможности приближенного определения траекторий касательных напряжений на периферии поперечного сечения в наиболее нагруженной части как для упругого, так и для пластического материала; у самого контура они совпадают в силу граничных условий (контур всегда является траекторией касательных напряжений). Наибольшая разница между траекториями при упругих и пластических деформациях будет при идеальной пластичности. Тем не менее погрешность определения крутильной жесткости при замене действительных траекторий касательных напряжений в упругой стадии траекториями для идеально пластического материала является практически ничтожной для всех односвязных стержней с выпуклым контуром, а также и при наличии вогнутых участков контура, радиус кривизны которых превышает расстояние до ближайшей точки противоположной ветви контура [3]. Величина этой погрешности является «мерой простоты» скручиваемого стержня и верхней границей погрешности в определении жесткости при кручении [неупругих стержней]. Чем пластичнее материал (т. е. чем больше пластические деформации), тем меньше погрешность в определении крутильной жесткости; в предельном случае неограниченно больших деформаций без упрочнения она стремится к нулю.

В данной статье рассматривается случай линейного упрочнения, но конкретные расчеты сделаны для идеальной пластичности.

1. Чистое кручение соответствует случаю, когда в стержне возникают поворот поперечных сечений в своей плоскости как жестких фигур около продольной оси Oz на угол θz и продольные перемещения $w(x, y)$. Определим компоненты тензора деформаций в некоторой прямоугольной системе координат (l, n, z) при указанных условиях в произвольной точке (x, y)

$$(1.1) \quad \gamma_{lz} = \partial w / \partial l + \theta H_l(x, y), \quad \gamma_{nz} = \partial w / \partial n + \theta H_n(x, y)$$

Здесь $H_l(x, y)$ — расстояние от центра вращения (от оси oz) до луча l , исходящего из точки (x, y) ; аналогичный смысл имеет $H_n(x, y)$.

Определим циркуляцию указанных компонент (γ) тензора деформаций вдоль контура $ABDE$ (фиг. 1). Имеем

$$\int_{ABDE} \gamma_s ds = 2\theta \omega_{ABDE}$$

где $ABDE$ — замкнутый контур, принадлежащий поперечному сечению, ω_{ABDE} — площадь, ограниченная им.

Считая, что указанный контур образован элементами траекторий касательных напряжений (AB, DE) и элементами ортогональных к ним линий, можем последнее равенство записать иначе:

$$\gamma_{AB} \cdot AB - \gamma_{DE} \cdot DE = 2\theta \omega_{ABDE}$$

Выразим здесь деформации сдвига через напряжения за пределом упругости (τ_T — предел текучести при кручении, G — модуль сдвига, G' — соответствующий касательный модуль)

$$(1.2) \quad \gamma = \tau_T/G + (\tau - \tau_T)/G'$$

При этом найдем

$$\tau_{AB} \cdot AB - \tau_{DE} \cdot DE + (AB - DE)(G' - G) \tau_T/G = 2G'\theta \omega_{ABDE}$$

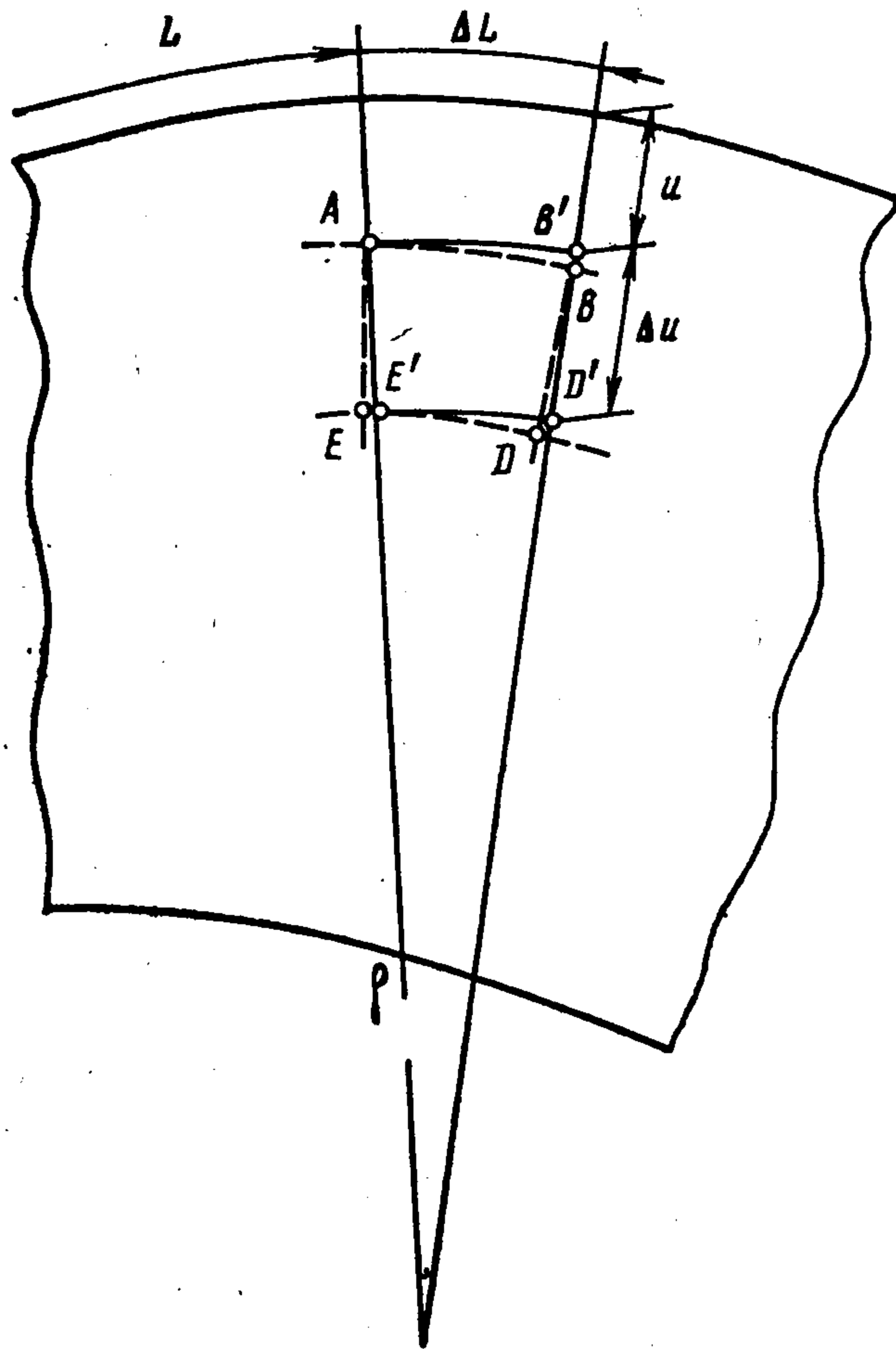
Принимая обозначение

$$(1.3) \quad \tau^\circ = \tau + (G' - G)\tau_T/G = G'\gamma$$

получим

$$(1.4) \quad \tau_{AB}^\circ \cdot AB - \tau_{DE}^\circ \cdot DE = 2G'\theta \omega_{ABDE}$$

Каждой точке контура поперечного сечения стержня будем ставить в соответствие круг, касающийся контура в указанной точке, целиком



Фиг. 1

принадлежащий поперечному сечению и имеющий наибольший радиус ($\delta/2$). Отрезки прямых, соединяющие центр этого круга с точками контура, которых этот круг касается, называются сопряженными нормальными. При этом положение некоторой точки B' (фиг. 1) определится, если известна нормаль, которой эта точка принадлежит, и расстояние u до контурной линии ($0 \leq u \leq \delta/2$).

Положение нормали будем определять длиной участка контура (L), заключенного [между некоторой неподвижной точкой и рассматриваемой нормалью. Положительным направлением криволинейной координаты L , для определенности, будем считать такое, при котором обход контура поперечного сечения совершается так, что область сечения остается всегда

справа, а координата u отсчитывается в направлении внутренней нормали контурной линии.

Будем считать, что указанные нормали достаточно близки к линиям, ортогональным траекториям касательных напряжений (в случае идеальной

пластичности указанные линии совпадают)

$$(1.5) \quad \tau^{\circ}(u) \frac{\rho - u}{\rho} dL - \tau^{\circ}(u + du) \frac{\rho - u - du}{\rho} dL \approx \\ \approx 2G'\theta \frac{\rho - u - \eta du}{\rho} dL du$$

где ρ — радиус кривизны элемента dL (ρ считается положительным для выпуклого участка контура), $0 < \eta < 1$.

Из последнего уравнения следует

$$\frac{\partial \tau^{\circ}}{\partial u} - \frac{1}{\rho - u} \tau^{\circ} = -2G'\theta$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tau^{\circ} = \frac{c}{\rho - u} + G'\theta(\rho - u), \quad c = \text{const}$$

Используя обозначение (1.3), получим

$$(1.6) \quad \tau = \tau_T - \frac{G'}{G} \tau_T + \frac{c}{\rho - u} + G'\theta(\rho - u)$$

где c — постоянная интегрирования, определяемая из условия сопряжения упругой и пластической зон (u° — координата упругопластической границы)

$$(1.7) \quad \tau(L, u)|_{u=u^{\circ}} = \tau_T$$

В результате общее решение запишем следующим образом:

$$(1.8) \quad \tau = \tau_T \left(1 - \frac{G'}{G} + \frac{G'}{G} \frac{\rho - u^{\circ}}{\rho - u} \right) + G'\theta \frac{(\rho - u)^2 - (\rho - u^{\circ})^2}{\rho - u}$$

Положив в формуле (1.6) $G' = G$, получим уравнение, характеризующее поле напряжений в упругом ядре

$$\tau = \frac{c}{\rho - u} + G\theta(\rho - u)$$

Выразив постоянную c через напряжение $\tau(L, \delta/2)$, которое обозначим τ_c , получим (здесь и далее верхний знак берется в случае, если условно выбранные направления контурного напряжения $\tau(L, 0)$ и напряжения τ_c совпадают)

$$(1.9) \quad \tau = \pm \tau_c \frac{\rho - \delta/2}{\rho - u} + G\theta \left[\rho - u - \frac{(\rho - \delta/2)^2}{\rho - u} \right]$$

Назовем функцией Прандтля (поток касательных напряжений) выражение

$$(1.10) \quad \Pi(u) = \int_0^u \tau_n du, \quad 0 \leq u \leq u^{\circ} \\ \Pi(u) = \int_0^{u^{\circ}} \tau_n du + \int_{u^{\circ}}^u \tau_y du, \quad u^{\circ} \leq u \leq \delta/2$$

где τ_n и τ_y — напряжения в пластической и упругой зонах соответственно, определяемые по формулам (1.8) и (1.9).

Требую выполнения условия непрерывности функции Прандтля в точке с координатой $u = \delta/2$, получим

$$(1.11) \quad \int_0^{u^{\circ}} \tau_n du + \int_{u^{\circ}}^{\delta/2} \tau_y du = \int_0^{u_*^{\circ}} \tau_n du + \int_{u_*^{\circ}}^{\delta/2} \tau_y du$$

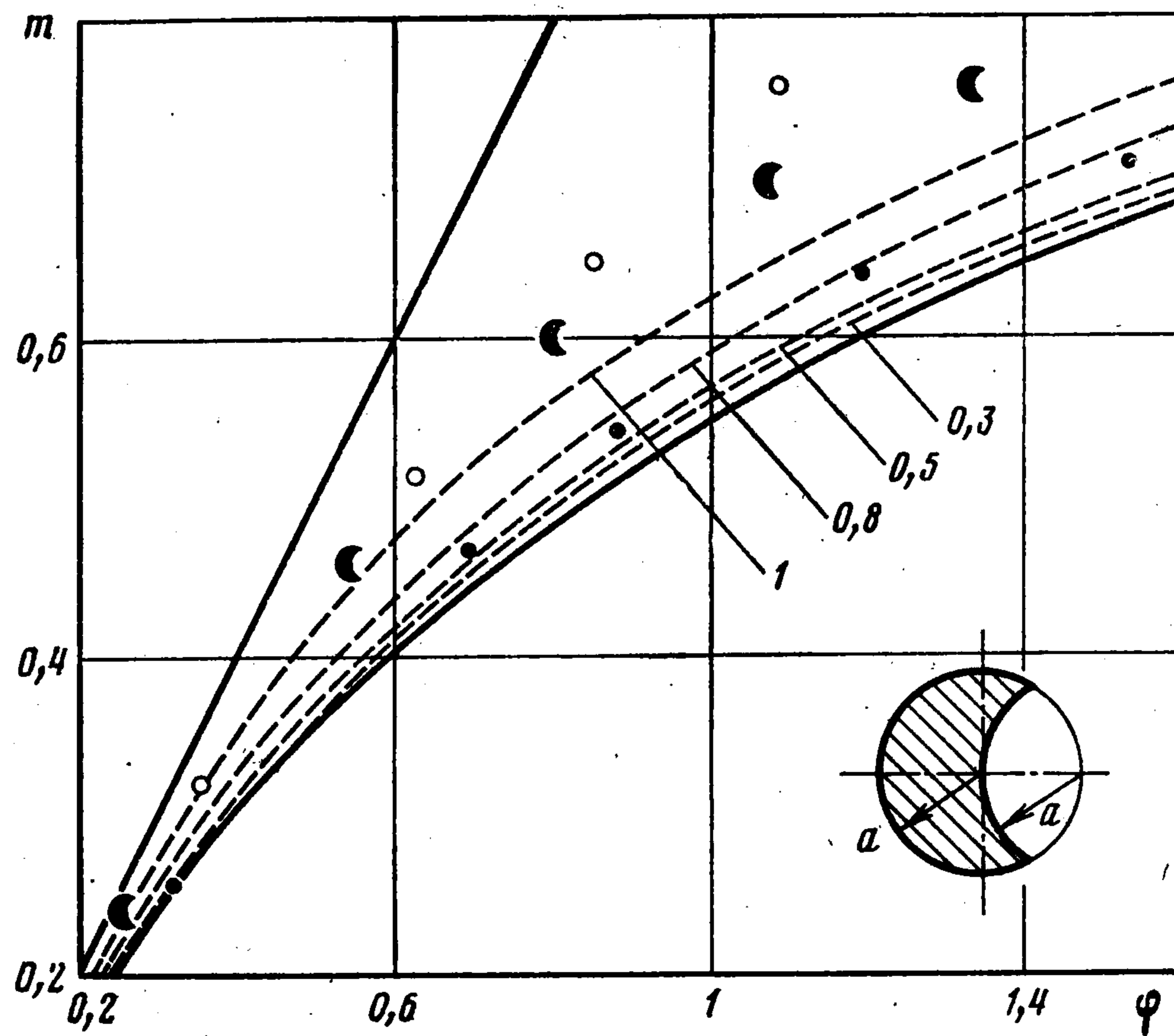
где u° и u_*° — координаты точек пересечения упругопластической границы с сопряженными нормальными.

Выражения (1.8) и (1.9) вместе с условиями непрерывности (1.11) и (1.7) составляют замкнутую систему уравнений, из которой определяются функции $\tau(L, \delta/2)$ и $u^\circ(L)$, что в свою очередь определяет функцию Прандтля.

Момент внутренних сил определяется по формуле (F — площадь поперечного сечения)

$$(1.12) \quad M = 2 \int \int_{(F)} \Pi(L, u) dF.$$

2. В случае идеальной пластичности в пластической области максимальное касательное напряжение всюду равно пределу текучести ($\tau_n = \tau_T$) и направлено перпендикулярно к нормальям контурной линии.



Фиг. 2.

В упругом ядре поле напряжений определяется уравнениями (1.9). Функция Прандтля в этом случае принимает вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Pi(u) &= \tau_T u, \quad 0 \leq u \leq u^\circ \\ \Pi(u) &= \tau_T u^\circ + \int_{u^\circ}^u \tau_y du, \quad u^\circ \leq u \leq \delta/2 \end{aligned}$$

Выражение (1.12) с учетом (2.1) определяет упруго-идеально-пластический крутящий момент при заданной закрутке.

Если пластическая зона распространилась на всю область поперечного сечения, крутящий момент принимает предельное значение

$$(2.2) \quad M_n = \frac{1}{4} \tau_T \oint_L \left(\delta^2 - \frac{\delta^3}{3\rho} \right) dL$$

Зависимость между крутящим моментом M и закруткой θ при обозначениях (M_y и θ_y — предельные упругие значения соответствующих величин, K — крутильная жесткость в пределах упругости)

$$m = \frac{M - M_y}{M_n - M_y}, \quad \varphi = K \frac{\theta - \theta_y}{M_n - M_y}$$

представлена на фиг. 2. Штриховыми линиями приведены значения $m(\varphi)$ для прямоугольных сечений; цифры на линиях обозначают отношение

сторон. Полумесяцы соответствуют профилю Вебера, изображенному на той же фигуре. Светлыми точками указаны результаты для соответствующих сечений с отношением радиусов внутреннего и наружного контуров, равным 0,9 а темными точками отмечены значения m для стержней круглого поперечного сечения.

Проведенные расчеты показывают, что кривые, определяющие зависимость m (φ), заключены в зоне, ограниченной на фиг. 2 сплошными линиями.

При увеличении закрутки θ увеличиваются зоны пластичности, где принятое допущение выполняется точно. При этом величина крутящего момента стремится к точному значению (2.2).

Отметим, что максимальная погрешность в определении крутящего момента по предлагаемым формулам имеет место на пределе упругости. Между тем из сопоставления величины M_y с известными точными решениями следует, что указанная максимальная погрешность для простых стержней мала. Так, для призматических стержней эллиптического и прямоугольного сечения она не превышает соответственно 3 и 5%, для профиля Вебера (фиг. 2) — 1,5%. Отметим, что в работе [4] определен крутящий момент стержня прямоугольного сечения более сложным методом, но с такой же точностью, как и нами при отношении сторон 0,2 и 0,4. В работе [5] для стержня квадратного поперечного сечения результаты располагаются ниже предельной кривой и не могут считаться возможными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов М. Я., Швайко Н. Ю.* Введение в дислокационную теорию упругопластического кручения. — В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 227—232.
2. *Галин Л. А.* Упругопластическое кручение призматических стержней полигонального сечения. — ПММ, 1944, т. 8, вып. 4, с. 307—322.
3. *Леонов М. Я.* Основы механики упругого тела. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1963. 328 с.
4. *Аннин Б. Д., Садовский В. М.* Упругопластическое кручение стержня прямоугольного сечения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 182—185.
5. *Баннчук Н. Б.* Расчет упругопластического кручения стержней методом локальных вариаций. — Инж. ж. МТТ, 1967, № 1, с. 145—148.

Фрунзе

Поступила в редакцию
15.VII.1982