Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 6, 1983

УДК 624.07

К ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ТИПА ТИМОШЕНКО

Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А.

Строится асимптотически точная теория изотропных стержней типа Тимошенко. Формулируется вариационная задача на сечении для вычисления коэффициентов поперечного сдвига. Коэффициенты сдвига найдены для ряда поперечных сечений.

1. Одномерные теории стержней. В классической теории стержень моделируется кривой Γ, оснащенной в каждой точке орторепером, один из векторов которого касателен к Γ. Теория содержит четыре функционально независимые степени свободы: три компоненты $r^i(\xi)$ радиус-вектора точек кривой Γ (малые латинские индексы i, j, k пробегают значения 1, 2, 3 и соответствуют проекциям на декартовы оси системы координат наблюдателя, ξ — параметр на Γ) и шесть компонент ортогональных к Γ векторов орторепера $\tau_\alpha{}^i$ (малые греческие индексы пробегают значения 1, 2), связанных пятью соотношениями

$$\tau_\alpha{}^i\tau_{i\beta}=\delta_{\alpha\beta},\quad \tau_\alpha{}^i r_{i,\,\xi}=0 \tag{1.1}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера, запятой перед ξ в индексах обозначается дифференцирование по ξ. Степень свободы, имеющаяся при задании орторепера, описывает относительный поворот поперечного сечения.

Кривизны ω_α и кручение ω стержня вводятся соотношениями

$$\tau^i_{,\,s}=-\omega^\alpha\tau_\alpha{}^i,\quad \tau^i_{\alpha,\,s}=\omega_\alpha\tau^i+\omega e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\tau_\beta{}^i$$

где τ^i — единичный касательный вектор к Γ, s — длина дуги вдоль Γ, запятой перед s в индексах обозначается дифференцирование по s. В качестве мер удлинения, изгиба и кручения можно взять величины

$$\gamma=\frac{1}{2}(s^2_{,\,\xi}-1),\quad \Omega_\alpha=(1+2\gamma)^{1/2}\omega_\alpha-\omega_\alpha{}^\circ$$
$$\Omega=(1+2\gamma)^{1/2}\omega-\omega^\circ$$

Градусом отмечены величины в недеформированном состоянии; в качестве параметра ξ выбрана длина дуги на кривой Γ_0. В терминах $\tau_\alpha{}^i(\xi)$ и $r^i(\xi)$ формулы для γ, Ω_α и Ω записываются следующим образом:

$$\gamma=\frac{1}{2}(r^i_{,\,\xi}r_{i,\,\xi}-1),\quad \Omega_\alpha=r^i_{,\,\xi}\tau_{i\alpha,\,\xi}-\omega_\alpha{}^\circ,\quad \Omega=\frac{1}{2}e^{\alpha\beta}\tau^i_{\alpha,\,\xi}\tau_{i\beta}-\omega^\circ \tag{1.2}$$

Вариационное уравнение одномерной теории стержней имеет вид

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{|\Gamma_0|}(K-\Phi)\,d\xi\,dt+\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{|\Gamma_0|}A\,d\xi\,dt=0 \tag{1.3}$$

где $|\Gamma_0|$ — длина дуги стержня в недеформированном состоянии, K и Φ — плотности кинетической и внутренней энергий на единицу длины, A — работа внешних сил, варьированию подвергаются функции r^i и $\tau_\alpha{}^i$, подчиненные связям (1.1).

В классической теории изотропных неоднородных стержней (с центрально-симметричным сечением и четными упругими свойствами)

$$2\Phi=\langle E\rangle\gamma^2+\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\Omega_\alpha\Omega_\beta+C\Omega^2 \tag{1.4}$$
$$2K=\langle\rho\rangle r_{,t}{}^i r_{i,\,t}+\langle\rho\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\tau^i_{\alpha,\,t}\tau_{i\beta,\,t}$$

Здесь $\langle\cdot\rangle$ — интеграл по поперечному сечению, ξ^α — декартовы координаты в поперечном сечении, E — модуль Юнга, ρ — плотность массы.

Для вычисления жесткости на кручение C надо решить на сечении задачу о кручении Сен-Венана (μ — модуль сдвига, запятой перед греческими индексами обозначается дифференцирование по ξ^α)

$$(1.5)\qquad C\Omega^2 = \inf_g \langle \mu (g_{,\alpha} + \Omega e_{\gamma\alpha}\xi^\gamma)(g_{,}{}^{\alpha} + \Omega e_{\sigma}^{\cdot\alpha}\xi^\sigma)\rangle$$

Через $e_{\gamma\alpha}$ обозначаются символы Леви-Чивита ($e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$).

Формулы (1.4) были получены для однородного стержня из гипотезы плоских сечений Кирхгофом [1]. Их можно получить при помощи асимптотического анализа трехмерного функционала энергии, оставляя в выражении для энергии только главные члены и пренебрегая поправками порядка h/R, h/l и ε по сравнению с единицей [2], где h — диаметр поперечного сечения, R — характерный радиус кривизны кручения, l — характерный масштаб изменения напряженного состояния вдоль стержня, ε — амплитуда деформации (определения R, l, ε см. в [2]). Ниже построена уточненная теория, в которой в энергии удержаны поправки порядка h/R, h/l и $(h/l)^2$ по сравнению с единицей.

В уточненной теории векторы $\tau_\alpha{}^i$ не считаются ортогональными к вектору τ^i и вводятся две дополнительные степени свободы — поперечный сдвиг $\varphi_\alpha = \tau^i\tau_{i\alpha}$ (эта идея принадлежит С. П. Тимошенко [3]). Векторы $\tau_\alpha{}^i$, как и в классической теории, имеют единичную длину и взаимно ортогональны ($\tau_\alpha{}^i\tau_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Меры изгиба и кручения определяются по векторам $r^i(\xi)$, $\tau_\alpha{}^i(\xi)$ формулами (1.2). Плотность внутренней энергии в уточненной теории, помимо классических членов, содержит перекрестные члены между растяжением и кручением, растяжением и изгибом, изгибом и кручением и энергию сдвига

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} 2\Phi = {} & \langle E\rangle \gamma^2 + \langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle \Omega_\alpha\Omega_\beta + C\Omega^2 + 2\,[\langle E\xi^\alpha\xi_\alpha\rangle - \\ & - 2(1+\nu)\,C]\,\omega^\circ\gamma\Omega - 2\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle \sqrt{C_1/C}\,\omega_\gamma{}^\circ e_{\alpha\cdot}{}^{\gamma}\Omega_\beta\Omega - \\ & - 2D^{\alpha\beta}\omega_\alpha{}^\circ\gamma\Omega_\beta + J^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta \end{aligned}$$

Перекрестный член между растяжением и кручением имеется только для естественно закрученных стержней ($\omega^\circ \neq 0$) и впервые был вычислен в [4]. Из асимптотических соображений он был получен в [5].

Величина $\langle E\xi^\alpha\xi_\alpha\rangle - 2(1+\nu)\,C$, характеризующая взаимодействие между растяжением и кручением, вычисляется по модулям жесткости классической теории $\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle$ и C. В отличие от этого эффект поперечного сдвига связан с тремя дополнительными независимыми характеристиками стержня — жесткостями на сдвиг $J^{\alpha\beta}$. Дальше показано, что они определяются из решения следующей вериационной задачи на сечении:

$$(1.7)\qquad J^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta = \inf_z \langle \mu\,(\varphi_\alpha + z_{,\alpha})\,(\varphi^\alpha + z_{,}{}^{\alpha})\rangle$$

Минимум в (1.7) ищется по всем функциям $z(\xi^\alpha)$, удовлетворяющим ограничению $\langle \mu z\xi^\alpha\rangle = 0$, φ_α считаются постоянными параметрами. Коэффициенты поперечного сдвига $K^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta}/\langle\mu\rangle$, как правило, порядка единицы, и энергия сдвига $J^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta$ является формально главной частью энергии. Поэтому на первом шаге вариационно-асимптотического метода [6] надо минимизировать энергию сдвига и в первом приближении в соответствии с гипотезой плоских сечений $\varphi_\alpha = 0$. Однако возможны случаи (они обсуждаются ниже), когда $K^{\alpha\beta} \ll 1$ и теория, которая выводится дальше как уточненная, становится теорией первого приближения.

Стержни, криволинейные в недеформированном состоянии, характеризуются еще пятью параметрами — четырьмя компонентами несимметричного тензора $D^{\alpha\beta}$ и скаляром C_1, связанными с перекрестным взаимодействием между растяжением и изгибом, изгибом и кручением. Для вычисления $D^{\alpha\beta}$ надо найти коэффициенты квадратичной формы $J^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + B^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\theta_\beta + C^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta$, являющейся минимальным значением функционала

$$(1.8)\qquad \left\langle \mu\left(z_{,\alpha} + \varphi_\alpha - \frac{\nu}{2}\chi_\alpha{}^\nu\theta_\nu\right)\left(z_,{}^\alpha + \varphi^\alpha - \frac{\nu}{2}\chi^{\alpha\sigma}\theta_\sigma\right)\right\rangle$$

$$\chi_\alpha{}^\beta = 2\left(\xi^\beta\xi_\alpha - \langle\mu\xi^\beta\xi_\alpha\rangle/\langle\mu\rangle\right) - \left(\xi_\nu\xi^\nu - \langle\mu\xi_\nu\xi^\nu\rangle/\langle\mu\rangle\right)\delta_\alpha{}^\beta$$

Здесь φ_α и θ_α — постоянные параметры, $\chi_\alpha{}^\beta$ — квадратичные полиномы. Минимум ищется по всем z, удовлетворяющим ограничениям $\langle\mu z\xi^\alpha\rangle = 0$. Тензор $D^{\alpha\beta}$ определяется по коэффициентам квадратичной формы $J^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}$ из формул

$$(1.9)\qquad D^{\alpha\beta} = (2+\nu)\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle + \langle E\rangle H^{\alpha\beta},\quad H_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = {}^1/_2 J^{(-1)}_{\alpha\gamma}B^{\gamma\beta} + \lambda_\alpha{}^\beta$$

$$\lambda^{11} = {}^1/_2\langle E\xi_1\xi_1\rangle^{-1}\left(C^{11} - {}^1/_4 J^{(-1)}_{\alpha\beta}B^{\alpha1}B^{\beta1}\right),\quad \lambda^{22} = {}^1/_2\langle E\xi_2\xi_2\rangle^{-1}\times$$
$$\times\left(C^{22} - {}^1/_4 J^{(-1)}_{\alpha\beta}B^{\alpha2}B^{\beta2}\right),\quad \lambda^{12} = \lambda^{21} = \langle E\xi_\alpha\xi^\alpha\rangle^{-1}\left(C^{12} - \right.$$
$$\left. - {}^1/_4 J^{(-1)}_{\alpha\beta}B^{\alpha1}B^{\beta2}\right)$$

где $J^{(-1)}_{\alpha\beta}$ — тензор, обратный к тензору $J^{\alpha\beta}(J^{(-1)}_{\alpha\beta}J^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma)$. Для вычисления скаляра C_1 надо решить задачу о минимуме функционала

$$(1.10)\qquad \langle\lambda\,(z_{,\alpha}{}^\alpha + 2\nu g)^2 + 2\mu\,(z_{(\alpha,\beta)} + \nu\delta_{\alpha\beta}g)\,(z^{(\alpha,\beta)} + \nu\delta^{\alpha\beta}g) -$$
$$- 2\mu\,(g_{,\alpha} + e_{\gamma\alpha}\xi^\gamma)\,z^\alpha\rangle$$

где g — минимальный элемент в задаче о кручении (1.5). Минимум ищется по всем z^α, удовлетворяющим ограничениям (3.3). Обозначим минимальное значение функционала (1.10) через J. Тогда C_1 вычисляется по формуле

$$(1.11)\qquad C_1 = \langle Eg^2\rangle + J$$

Так же как для оболочек [7, 8], перекрестный член между растяжением и изгибом может быть существен для определения перемещений в первом приближении. Формулы (1.6)—(1.11) получены в предположении, что в поперечных направлениях изменяется только модуль сдвига, а коэффициент Пуассона является постоянным.

Отметим, что асимптотическая теория стержней с учетом поперечного сдвига строилась также в работе [9].

2. Трехмерная задача. Рассмотрим в декартовой системе координат x^i упругий изотропный стержень, занимающий в недеформированном состоянии область V_0, которая образована движением вдоль оси стержня Γ_0 плоской фигуры S, перпендикулярной к Γ_0 в каждой точке оси. Центр тяжести плоской фигуры находится на оси стержня. На стержень действуют зависящие от времени поверхностные силы P_i и массовые силы F_i, которые предполагаются мертвыми. Введем в области V_0 сопутствующую систему координат ξ^α, $\xi^3 = \xi$ по формулам

$$(2.1)\qquad x^{0i}(\xi, \xi^\alpha) = r^{0i}(\xi) + \tau_\alpha{}^{0i}(\xi)\,\xi^\alpha$$

Здесь $x^{0i} = r^{0i}(\xi)$ — уравнение оси стержня Γ_0, ξ — длина дуги вдоль оси, $\tau_1{}^{0i}$ и $\tau_2{}^{0i}$ — компоненты двух векторов, образующих вместе с вектором $\tau^{0i} = r_{,\xi}{}^{0i}$ орторепер.

Область S будем считать центрально-симметричной; это означает, что наряду с каждой точкой с координатами ξ^α она содержит точку с координатами — ξ^α. Распределение неоднородности по сечению будем также предполагать центрально-симметричным (т. е. модуль Юнга $E(\xi^\alpha)$ и модуль сдвига $\mu(\xi^\alpha)$ — четные функции координат ξ^α), а коэффициент Пуассона ν — постоянным.

Уравнения, описывающие деформацию стержня, следуют из вариационного уравнения

$$(2.2)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}(I-L)\,dt=0,\quad I=\int_0^{|\Gamma_0|}\langle\Lambda\sqrt{g^\circ}\rangle\,d\xi$$

$$L=\int_0^{|\Gamma_0|}(\langle F_ix^i\sqrt{g^\circ}\rangle+\langle P_ix^i\rangle_{\partial S})\,d\xi+\langle P_ix^i\rangle\Big|_{\xi=0}^{\xi=|\Gamma_0|}$$

$$\Lambda=\frac{1}{2}[\lambda(g^{\circ ab}\varepsilon_{ab})^2+2\mu g^{\circ ab}g^{\circ cd}\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd}]-$$

$$-\frac{1}{2}\rho v^iv_i,\quad g^\circ=\det\|g^{\circ ab}\|$$

Здесь $\langle\cdot\rangle_{\partial S}$ — интеграл по границе области S, $x^i(\xi^a, t)$ — закон движения тела, $v^i=x_{,t}^i$, Λ — разность внутренней и кинетической энергии, L — функционал, задающий работу внешних массовых и поверхностных сил, g_{ab}°, $g^{\circ ab}$ — компоненты метрического тензора. Компоненты тензора деформаций вычисляются через закон движения по формуле

$$(2.3)\qquad \varepsilon_{ab}=\frac{1}{2}(x^i_{,a}x_{i,b}-\mathring{g}_{ab})$$

Рассматриваемая проблема заключается в замене сформулированной трехмерной задачи теории упругости приближенной «одномерной», в которую входят функции только продольной координаты ξ и времени t. Одномерную теорию можно рассматривать как результат предельного перехода $h\to 0$. Для построения одномерной теории дальше применяется вариационно-асимптотический метод [6].

3. Асимптотический анализ трехмерной задачи. *Преобразование выражения для энергии.* Представим U в виде суммы трех положительно-определенных квадратичных форм — продольной энергии $U_\parallel$, поперечной энергии $U_\perp$ и энергии сдвига $U_<$

$$U=U_\parallel+U_\perp+U_<$$

$$U_\parallel={}^1/_2E_\parallel\varepsilon_{33}^2,\quad U_\perp={}^1/_2E^{\alpha\beta\gamma\delta}(\varepsilon_{\alpha\beta}+E_{\alpha\beta}\varepsilon_{33}+E^\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\sigma3})(\alpha,\beta\to\gamma,\delta)$$

$$U_<={}^1/_2G^{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha3}+E_\alpha\varepsilon_{33})(\alpha\to\beta)$$

Символ $(\alpha,\beta\to\gamma,\delta)$ обозначает выражение, стоящее в предыдущих скобках, с индексами α, β, замененными на γ, δ. Компоненты «двумерных» тензоров упругих модулей выражаются через компоненты метрического тензора, параметры Ламе λ, μ и коэффициент Пуассона ν

$$E_\parallel=4\mu\frac{g^{\circ33}}{g_{33}^\circ}+2\mu(\nu-1)\frac{1}{g_{33}^{\circ2}}-$$

$$-4\mu\frac{e_{\alpha\nu}e_{\sigma\rho}g^{\circ\nu\rho}g^{\circ3\alpha}g^{\circ3\sigma}}{g_{33}^{\circ2}e_{\tau\beta}e_{\gamma\delta}\left[g^{\circ3\tau}g^{\circ3\gamma}+\frac{1}{2}(2/g_{33}^\circ-g^{\circ33})g^{\circ\tau\gamma}\right]g^{\circ\beta\delta}}$$

$$G^{\alpha\beta}=4\mu[g^{\circ3\alpha}g^{\circ3\beta}+(2/g_{33}^\circ-g^{\circ33})g^{\circ\alpha\beta}],\quad E^\sigma_{\alpha\beta}=-\frac{2}{g_{33}^\circ}\mathring{g}_{3(\alpha}\delta^\sigma_{\beta)}$$

$$E_\alpha=\frac{e_{\alpha\nu}e_{\sigma\rho}g^{\circ\nu\rho}g^{\circ3\sigma}}{g_{33}^\circ e_{\tau\beta}e_{\gamma\delta}\left[g^{\circ3\tau}g^{\circ3\gamma}+\frac{1}{2}(2/g_{33}^\circ-g^{\circ33})g^{\circ\tau\gamma}\right]g^{\circ\beta\delta}}$$

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda g^{\circ\alpha\beta} g^{\circ\gamma\delta} + \mu (g^{\circ\alpha\gamma} g^{\circ\beta\delta} + g^{\circ\beta\gamma} g^{\circ\alpha\delta})$$

$$E_{\alpha\beta} = \frac{\nu}{g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + \frac{(1-\nu)}{g_{33}^{\circ 2}} \overset{\circ}{g}_{\alpha 3} \overset{\circ}{g}_{\beta 3}$$

Учитывая, что компоненты метрического тензора в системе координат ξ^a даются формулами

$$g_{33}^{\circ} = (1 + \omega_\alpha^{\circ} \xi^\alpha)^2 + \omega^{\circ 2} \xi_\alpha \xi^\alpha, \quad g^{\circ 33} = (1 + \omega_\alpha^{\circ} \xi^\alpha)^{-2}$$

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha 3} = \omega^{\circ} e_{\beta\alpha} \xi^\beta$$

$$g^{\circ\alpha 3} = \omega^{\circ} e_{\beta}{}^{\alpha} \xi^\beta (1 + \omega_\gamma^{\circ} \xi^\gamma)^{-2}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$g^{\circ\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \omega^{\circ 2} (\delta_{\alpha\beta} \xi_\gamma \xi^\gamma - \xi_\alpha \xi_\beta)(1 + \omega_\nu^{\circ} \xi^\nu)^{-2}$$

$$g^{\circ} = \det \| \overset{\circ}{g}_{ab} \| = (1 + \omega_\alpha^{\circ} \xi^\alpha)^{-2}$$

для компонент двумерных упругих модулей, пренебрегая членами порядка $(h/R)^2$ по сравнению с единицей, имеем

$$E_{\|} = E(1 - 4\omega_\alpha^{\circ} \xi^\alpha), \quad E^{\alpha\beta\gamma\delta} = E_0^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda \delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\delta} +$$

$$+ \mu (\delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \delta^{\beta\gamma} \delta^{\alpha\delta})$$

$$E_{\alpha\beta} = \nu \delta_{\alpha\beta} (1 - 2\omega_\gamma^{\circ} \xi^\gamma), \quad G^{\alpha\beta} = 4\mu \delta^{\alpha\beta} (1 - 2\omega_\gamma^{\circ} \xi^\gamma)$$

$$E_{\alpha\beta}^{\sigma} = 2\omega^{\circ} e_{(\alpha\tau} \delta_{\beta)}^{\sigma} \xi^\tau, \quad E_\alpha = \omega^{\circ} e_{\alpha\beta} \xi^\beta$$

Внешние силы. Примем, что внешние поверхностные и массовые силы имеют порядки

$$P_i = O\left(\frac{h}{l} \mu\varepsilon\right), \quad F_i = O\left(\frac{1}{l} \mu\varepsilon\right)$$

и массовые силы F_i постоянны по сечению S. Предположим, что зависимость $P_i(\xi^\alpha)$ на торцах может быть представлена в виде $P_i = \mu (C_i + C_{i\alpha} \xi^\alpha)$, где C_i, $C_{i\alpha} = \text{const}$. Асимптотический анализ трехмерной задачи начнем со статики.

Первое приближение. Как было показано в [10], закон движения в первом приближении имеет вид

$$x^i(\xi^\alpha, \xi) = r^i(\xi) + h\tau_\alpha{}^i \zeta^\alpha + h y^i, \quad \zeta^\alpha = h^{-1} \xi^\alpha \tag{3.1}$$

$$y_\alpha = \tau_\alpha{}^i y_i = -\nu\left(\zeta_\alpha \gamma + \frac{1}{2} \chi_\alpha{}^\beta h \Omega_\beta\right), \quad y = \tau^i \quad y_i = g h \Omega$$

где g — минимизирующий элемент в вариационной задаче (1.5). Подстановка (3.1) в выражение для энергии и интегрирование по поперечному сечению приводит к формуле для Φ (1.4). Следующие члены разложения (3.1) имеют порядки $\varepsilon h/l$ и вносят в энергию малые вклады.

Второе приближение. В соответствии с общей схемой вариационно-асимптотического метода представим закон движения в виде

$$x^i(\xi^\alpha, \xi) = r^i + h\tau_\alpha{}^i \zeta^\alpha + h y^i + h z^i, \quad y^i = \tau^i y + \tau_\alpha{}^i y^\alpha \tag{3.2}$$

Произвол в выборе r^i и $\tau_\alpha{}^i$ позволяет наложить на z^i ограничения

$$\langle \mu z^i \rangle = 0, \quad \langle \mu z_{\alpha|\beta} \rangle e^{\alpha\beta} = 0, \quad \langle \mu z \zeta^\alpha \rangle = 0 \quad (z_\alpha = \tau_\alpha{}^i z_i,\ z = \tau^i z_i) \tag{3.3}$$

где символом $|\beta$ обозначено дифференцирование по ζ^β. Подставим (3.2) в выражение для компонент тензора деформаций (2.3). После отбрасывания величин порядка h^2/Rl и ε по сравнению с единицей получим

$$\varepsilon_{33} = {}^1\!/_2 (2\gamma + 2h\Omega_\alpha \zeta^\alpha + 2h^2 \omega_\alpha^{\circ} \Omega_\beta \zeta^\alpha \zeta^\beta + \tag{3.4}$$

$$+ 2h^2 \omega^{\circ} \Omega \zeta_\alpha \zeta^\alpha + 2h\tau^i y_{i,\xi} + 2h\tau^i z_{i,\xi})$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = {}^1\!/_2 [h\Omega (g_{|\alpha} + \zeta^\gamma e_{\gamma\alpha}) + \varphi_\alpha + h\zeta^\gamma \tau_{\gamma,\xi}^i y_{i|\alpha} + z_{|\alpha} +$$

$$+ h\zeta^\gamma \tau_{\gamma,\xi}^i z_{i|\alpha} + h y_{,\xi}^i \tau_{i\alpha} + h\tau_\alpha{}^i z_{i,\xi}], \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = y_{(\alpha|\beta)} + z_{(\alpha|\beta)}$$

Выделим в функционале энергии главные в асимптотическом смысле члены, содержащие z и z_α. Согласно (3.4), они имеют вид

$$(3.5)\qquad \langle {}^1/_2 E_0^{\alpha\beta\gamma\delta}(z_{\alpha|\beta}+\nu\delta_{\alpha\beta}gh^2\Omega,_\xi)(\alpha,\beta\to\gamma,\delta)-\mu h^2\Omega,_\xi(g_{|\alpha}+ \zeta^\nu e_{\gamma\alpha})z^\alpha+{}^1/_2\mu\delta^{\alpha\beta}(z_{|\alpha}+\varphi_\alpha+hy_{\alpha,\xi})(\alpha\to\beta)\rangle - \langle P_i(\tau^i z+\tau_\alpha{}^i z^\alpha)\rangle_{\partial S}$$

Сделаем замену искомой функции

$$z=z'+\frac{1}{2}\nu(\zeta_\alpha\zeta^\alpha-\langle\mu\zeta_\alpha\zeta^\alpha\rangle/\langle\mu\rangle)h\gamma,_\xi-\varphi_\alpha\zeta^\alpha$$

В терминах функций z', z_α главные члены приобретают форму

$$(3.6)\qquad \langle {}^1/_2 E_0^{\alpha\beta\gamma\delta}(z_{\alpha|\beta}+\nu\delta_{\alpha\beta}gh^2\Omega,_\xi)(\alpha,\beta\to\gamma,\delta)-\mu h^2\Omega,_\xi(g_{|\alpha}+ \zeta^\nu e_{\gamma\alpha})z^\alpha+{}^1/_2\mu\delta^{\alpha\beta}\left(z'_{|\alpha}-\frac{\nu}{2}\chi_\alpha{}^\nu h^2\Omega_{\gamma,\xi}\right)(\alpha\to\beta)\rangle - \langle P_i(\tau^i z'+\tau_\alpha{}^i z^\alpha)\rangle_{\partial S}$$

Ограничения (3.3) для функции z' переходят в ограничения

$$(3.7)\qquad \langle\mu z'\rangle=0,\quad \langle\mu z'\zeta^\beta\rangle-\varphi_\alpha\langle\mu\zeta^\alpha\zeta^\beta\rangle=0$$

Минимизация функционала (3.6) при ограничениях (3.7) приводит к вариационным задачам (1.7), (1.8), (1.10). Минимум достигается на функциях

$$(3.8)\qquad z=\frac{1}{2}\nu(\zeta_\alpha\zeta^\alpha-\langle\mu\zeta_\alpha\zeta^\alpha\rangle/\langle\mu\rangle)h\gamma,_\xi-\varphi_\alpha(\zeta^\alpha-A_{\tau\cdot}^{\cdot\alpha}g^\tau)+ \nu(e^\nu-S_{\tau\cdot}{}^{\cdot\nu}g^\tau)h^2\Omega_{\gamma,\xi}+f-\varkappa_{\alpha\beta}\langle f\zeta^\beta\rangle g^\alpha,\qquad z_\alpha=z_\alpha{}^\circ h^2\Omega,_\xi+f_\alpha$$

где функции g^τ, e^ν, f, $z_\alpha{}^\circ$, f_α являются решениями соответствующих вариационной задаче (3.6) уравнений Эйлера, $A_{\tau\cdot}{}^{\cdot\alpha}$ и $S_{\tau\cdot}{}^{\cdot\nu}$ — постоянные тензоры, вычисляемые по формулам

$$A_{\tau\cdot}^{\cdot\alpha}=\varkappa_{\tau\beta}\langle\mu\zeta^\beta\zeta^\alpha\rangle,\quad S_{\tau\cdot}{}^{\cdot\nu}=\varkappa_{\tau\beta}\langle\mu e^\nu\zeta^\beta\rangle,\quad \varkappa_{\tau\beta}=\langle\mu\zeta^\beta g^\tau\rangle^{-1}$$

Таким образом, на втором шаге вариационно-асимптотического метода закон движения определен до членов порядка $\varepsilon h/l$ включительно. Можно показать, что для построения теории, учитывающей в энергии поправки порядка h/R и $(h/l)^2$ по сравнению с единицей, этого достаточно.

Подстановка (3.2) в вариационное уравнение (2.2) и удерживание членов нужного порядка приводит к вариационному уравнению (1.3) с плотностями внутренней энергии и работы сил вида

$$(3.9)\qquad \Phi=\frac{1}{2}\langle E\rangle\gamma^2+\frac{1}{2}\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\Omega_\alpha\Omega_\beta+\frac{1}{2}C\Omega^2- (2+\nu)\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\omega_\alpha{}^\circ\Omega_\beta\gamma+[\langle E\xi^\alpha\xi_\alpha\rangle-2(1+\nu)C]\omega^\circ\gamma\Omega+ \frac{1}{2}C_1\Omega^2_{,\xi}+\frac{1}{2}(J^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta+B^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\Omega_{\beta,\xi}+C^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha,\xi}\Omega_{\beta,\xi})$$

$$A=Q^i r_i+(Q_i{}^\alpha+\omega_\beta{}^\circ I^{\alpha\beta}F_i)\tau_\alpha{}^i+R\Omega+R^\alpha\Omega_\alpha+N\gamma+ N^\alpha\varphi_\alpha+(T_i r^i+T_i{}^\alpha\tau_\alpha{}^i)\Big|_{\xi=0}^{\xi=|\Gamma_0|}$$

$$R=\langle P_i g\rangle_{\partial S}\tau^i-\langle P_{i,\xi}z^{\circ\alpha}\rangle\tau_\alpha{}^i-ae^{\alpha\beta}\langle\mu f_{\alpha,\beta\xi}\rangle$$

$$a=e_{\alpha\beta}\langle\mu(g,^\alpha+e_{\rho\cdot}^{\cdot\alpha}\xi^\rho)\xi^\beta\rangle/(2\langle\mu\rangle),$$

$$R^\alpha=-(\nu/2)\langle P_i\chi^{\alpha\beta}\rangle_{\partial S}\tau_\beta{}^i-\nu\langle P_{i,\xi}(e^\alpha-S_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}g^\beta)\rangle_{\partial S}\tau^i$$

$$N=-\nu\left[Q_i{}^\alpha\tau_\alpha{}^i+\frac{1}{2}\langle P_{i,\xi}(\xi^\alpha\xi_\alpha-\langle\mu\xi_\alpha\xi^\alpha\rangle/\langle\mu\rangle)\rangle_{\partial S}\tau^i\right]$$

$$N^\alpha=-Q_i{}^\alpha\tau^i+A_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}\langle P_i g^\beta\rangle_{\partial S}\tau^i$$

$$Q^i=|S|F^i+\langle P^i\rangle_{\partial S},\quad Q_i{}^\alpha=\langle P_i\xi^\alpha\rangle_{\partial S},\quad T_i=\langle P_i\rangle$$

$$T_i{}^\alpha=\langle P_i\xi^\alpha\rangle$$

В однородном случае формула для Φ (при $\gamma = 0$) получена в [11], а в рамках линейной теории прямых стержней — по существу уже в работе [12]. Однако как в [12], так и в [11] не была замечена возможность осуществляемого дальше преобразования и выражение (3.9) не было приведено к окончательной простой форме (1.6).

Преобразование вариационного уравнения. Выполним замены искомых функций, приводящие энергию к более простой форме. Переопределим поперечный сдвиг

$$\varphi_\alpha = \overline{\varphi}_\alpha + \lambda_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\,\Omega_{\gamma,\,\xi}$$

где $\lambda_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}$ — постоянный тензор, который в дальнейшем будет выбран специальным образом. Тогда мера изгиба перепишется в виде

$$\Omega_\alpha = \overline{\Omega}_\alpha + \lambda_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\Omega_{\gamma,\,\xi\xi},\quad \overline{\Omega}_\alpha = \overline{\varphi}_{\alpha,\,\xi} - \tau^i_{,\,\xi}\tau_{i\alpha} - \omega_\alpha^\circ \tag{3.10}$$

Учитывая (3.10), группу слагаемых из плотности энергии Φ (3.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\,\Omega_\alpha\Omega_\beta + \frac{1}{2}(J^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta + B^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\Omega_{\beta,\,\xi} + C^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha,\,\xi}\Omega_{\beta,\,\xi}) = \\ &= \frac{1}{2}\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\,\overline{\Omega}_\alpha\overline{\Omega}_\beta + \frac{1}{2}(J^{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\alpha\overline{\varphi}_\beta + 2\Upsilon^{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\alpha\Omega_{\beta,\,\xi} + E^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha,\,\xi}\Omega_{\beta,\,\xi}) \\ &\Upsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}B^{\alpha\beta} + J^{\alpha\gamma}\lambda_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta},\quad E^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} + B^{\gamma(\beta}\lambda_{\gamma\cdot}^{\cdot\alpha)} + \\ &+ J^{\gamma\delta}\lambda_{\gamma\cdot}^{\cdot\alpha}\lambda_{\delta\cdot}^{\cdot\beta} - 2\langle E\xi^{(\alpha}\xi^\gamma\rangle\,\lambda_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь опущен дивергентный член $(\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\,\lambda_\beta{}^\delta\Omega_\alpha\Omega_{\delta,\,\xi})_{,\xi}$.

Представим сумму в правой части (3.11) в виде квадратичной формы по $\overline{\varphi}_\alpha + H_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\Omega_{\gamma,\,\xi}$:

$$J^{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\alpha\overline{\varphi}_\beta + 2\Upsilon^{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\alpha\Omega_{\beta,\,\xi} + E^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha,\,\xi}\Omega_{\beta,\,\xi} = J^{\alpha\beta}(\overline{\varphi}_\alpha + H_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\Omega_{\gamma,\,\xi})\ (\alpha\to\beta)$$

Тензоры $\Upsilon^{\alpha\beta}$, $E^{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ связаны уравнениями

$$\Upsilon^{\alpha\beta} = J^{\alpha\gamma}H_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta},\quad E^{\alpha\beta} = J^{\gamma\delta}H_{\gamma\cdot}^{\cdot\alpha}H_{\delta\cdot}^{\cdot\beta} \tag{3.12}$$

Разрешив первое соотношение (3.12) относительно тензора $H_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta}$ и подставив во второе, получим

$$E^{\alpha\beta} = J^{(-1)}_{\nu\rho}\Upsilon^{\nu\alpha}\Upsilon^{\rho\beta} \tag{3.13}$$

Удовлетворим соотношению (3.13) путем соответствующего выбора тензора $\lambda_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$, который будем считать симметричным. Подставляя в (3.13) значение входящих в него величин (3.11), получим

$$\langle E\xi^{(\alpha}\xi^\gamma\rangle\,\lambda_\gamma^{\beta)} = \frac{1}{2}\left(C^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}J^{(-1)}_{\nu\rho}B^{\nu\alpha}B^{\rho\beta}\right) \tag{3.14}$$

Выражение (3.14) есть система трех линейных уравнений относительно компонент тензора $\lambda_\gamma{}^\beta$. Можно показать, что определитель системы (3.14) отличен от нуля. Условимся, что оси сопутствующей системы координат ξ^α совпадают с осями сечения S, в которых тензор $\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle$ диагонален. Тогда (3.14) распадается на три независимых уравнения, из которых находим значения $\lambda_\alpha{}^\beta$ (1.9). Сделаем еще одну замену искомых функций: $\overline{\varphi}_\alpha \to \overline{\overline{\varphi}}_\alpha$

$$\overline{\overline{\varphi}}_\alpha = \overline{\varphi}_\alpha + H_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\Omega_{\gamma,\,\xi}$$

Заменяя в мере изгиба $\overline{\Omega}_\alpha$ (3.10) $\overline{\varphi}_\alpha$ на $\overline{\overline{\varphi}}_\alpha$, получим

$$\overline{\Omega}_\alpha = \overline{\overline{\varphi}}_{\alpha,\,\xi} - \tau^i_{,\,\xi}\tau_{i\alpha} - \omega_\alpha^\circ - H_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\Omega_{\gamma,\,\xi\xi} \tag{3.15}$$

Выражение для меры изгиба будет совпадать с ранее введенным, если одновременно переопределить компоненты радиус-вектора r^i: $r^i \to \bar{r}^i$,

$r^i = \bar{r}^i - \tau_\nu{}^i H^{\nu\gamma}\Omega_\gamma$. Отметим, что в рамках рассматриваемой точности замену искомых функций можно представить также в виде

(3.16) $$r^i = \bar{r}^i - \tau_\nu{}^i H^{\nu\gamma}\bar{\Omega}_\gamma$$

С точностью до величин порядка $\varepsilon h^2/Rl$ и $(h/R)^2\varepsilon$ для меры изгиба получим

$$\bar{\Omega}_\alpha = \bar{\bar{\varphi}}_{\alpha,\xi} - \bar{\tau}^i{}_{,\xi}\tau_{i\alpha} - \omega_\alpha{}^\circ = \bar{\tau}^i\tau_{i\alpha,\xi} - \omega_\alpha{}^\circ, \quad \bar{\tau}^i = \bar{r}^i{}_{,\xi}, \ \bar{\tau}^i\tau_{i\alpha} = \bar{\bar{\varphi}}_\alpha$$

Представим группу слагаемых в плотности энергии, связанных с кручением в форме

$$\frac{1}{2}C\Omega^2 + \frac{1}{2}C_1\Omega^2_{,\xi} = \frac{1}{2}C\left(\Omega + \sqrt{C_1/C}\,\Omega_{,\xi}\right)^2$$

Здесь опущен дивергентный член $(\sqrt{CC_1}\Omega^2)_{,\xi}$.

Сделаем еще одну замену искомых функций: $\tau_\alpha{}^i \to \bar{\tau}_\alpha{}^i$

(3.17) $$\tau_\alpha{}^i = \bar{\tau}_\alpha{}^i - \bar{\tau}_\beta{}^i e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\sqrt{C_1/C}\,\Omega$$

При этом векторы $\bar{\tau}^i$, $\bar{\tau}_\alpha{}^i$ будут удовлетворять соотношениям

$$\bar{\tau}^i\bar{\tau}_{i\alpha} = \bar{\bar{\varphi}}_\alpha + O(\varepsilon^2), \quad \bar{\tau}_\alpha{}^i\bar{\tau}_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} + O(\varepsilon)$$

Используя эти соотношения, можно показать справедливость равенства

$$\Omega + \sqrt{C_1/C}\,\Omega_{,\xi} = \bar{\Omega} + O(\varepsilon^2), \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{2}e^{\alpha\beta}\bar{\tau}^i_{\alpha,\xi}\bar{\tau}_{i\beta}$$

Из (3.17) следует, что

(3.18) $$\tau_\alpha{}^i = \bar{\tau}_\alpha{}^i - \bar{\tau}_\beta{}^i e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\sqrt{C_1/C}\,\bar{\Omega} + \bar{\tau}_\beta{}^i e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}C_1/C\bar{\Omega}_{,\xi} + O\left(\left((h/l)^2\varepsilon\right)\right)$$

С учетом (3.16) и (3.18) выражения мер изгиба Ω_α и удлинение оси γ примут вид

$$\bar{\Omega}_\alpha = \bar{\bar{\Omega}}_\alpha - \omega_\gamma{}^\circ e_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\sqrt{C_1/C}\,\bar{\Omega}, \quad \bar{\bar{\Omega}}_\alpha = \bar{\tau}^i\tau_{i\alpha,\xi} - \omega_\alpha{}^\circ$$

$$\gamma = \bar{\gamma} - \omega_\gamma{}^\circ H^{\gamma\beta}\bar{\bar{\Omega}}_\beta$$

После сделанных преобразований и замен искомых функций плотность энергии (3.9) приводится (черточки опускаем) к форме (1.6), а работа внешних сил A (с точностью до дивергентных членов) — к форме (3.9) с измененными значениями эффективных сил R и R^α

$$R = \langle P_i g\rangle_{\partial S}\tau^i - Q_i{}^\alpha\tau_\gamma{}^i e_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\sqrt{C_1/C} - Q^\alpha_{i,\xi}\tau_\gamma{}^i e_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}C_1/C +$$
$$+ \langle P_{i,\xi}g\rangle_{\partial S}\tau^i\sqrt{C_1/C} - ae^{\alpha\beta}\langle\mu f_{\alpha,\beta\xi}\rangle$$

$$R^\alpha = -\frac{\nu}{2}\langle P_i\chi^{\alpha\beta}\rangle_{\partial S}\tau_\beta{}^i - Q^i\tau_{i\beta}H^{\beta\alpha} - \nu\langle P_{i,\xi}(e^\alpha - S_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}g^\beta)\rangle_{\partial S}\tau^i +$$
$$+ Q^\beta_{i,\xi}\tau^i(\lambda_\beta{}^\alpha - H_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}) + \frac{1}{2}A_{\gamma\cdot}^{\cdot\beta}\langle P_{i,\xi}g^\gamma\rangle_{\partial S}\tau^i J^{(-1)}_{\beta\rho}B^{\rho\alpha}$$

Работа сил на торцах $\xi = 0$, $\xi = |\Gamma_0|$ в уточненной теории взята такой же, как и в классической теории. В статике законность этого гарантируется принципом Сен-Венана. В динамике вопрос о краевых условиях требует специального исследования.

4. Эффективные коэффициенты одномерной теории. Приведем значения коэффициентов $J^{\alpha\beta}$ и $H^{\alpha\beta}$ и соответствующие минимизирующие функции вариационной задачи (1.8) в одномерном случае для некоторых поперечных сечений.

1°. *Круг радиуса r*

$$J^{\alpha\beta} = \mu\frac{6}{7}|S|\delta^{\alpha\beta}, \quad H^{\alpha\beta} = \frac{\nu}{12}\left[1 + \frac{\nu}{2(1+\nu)}\right]r^2\delta^{\alpha\beta}$$

$$z = \frac{1}{7}\xi^\alpha\left(1 - \frac{3}{2}\xi^\gamma\xi_\gamma/r^2\right)(2\varphi_\alpha - \nu r^2\Omega_{\alpha,\xi})$$

2°. *Кольцо с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$)*

$$J^{\alpha\beta} = \mu \frac{6\,|S|\,(r_1^2 + r_2^2)^2}{7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4}\,\delta^{\alpha\beta}$$

$$H^{\alpha\beta} = \frac{\nu}{12}\left[\frac{r_1^4 + 10r_1^2r_2^2 + r_2^4}{r_2^2 + r_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{2(1+\nu)}\,\frac{7(r_1^8 + r_2^8) + 20r_1^2r_2^2(r_1^4 + r_2^4) - 54r_1^4r_2^4}{(r_1^2 + r_2^2)(7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4)}\right]\delta^{\alpha\beta}$$

$$z = \left[-1 + \frac{3(r_1^2 + r_2^2)}{7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4}\left(\frac{3r_1^2r_2^2}{\xi^\gamma\xi_\gamma} - \xi^\gamma\xi_\gamma + 3r_1^2 + 3r_2^2\right)\right]\xi^\alpha\varphi_\alpha +$$

$$+ \frac{\nu}{3}\left[\frac{1}{2}\xi^\gamma\xi_\gamma - \frac{r_1^4 + r_1^2r_2^2 + r_2^4}{7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4}\left(\frac{3r_1^2r_2^2}{\xi^\gamma\xi_\gamma} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \xi^\gamma\xi_\gamma + 3r_1^2 + 3r_2^2\right)\right]\xi^\alpha\Omega_{\alpha,\xi}$$

3°. *Эллипс* $\xi_1^2/a^2 + \xi_2^2/b^2 \leqslant 1$

$$J_{11} = \mu\frac{3}{2}\,|S|\,\frac{3a^2 + b^2}{5a^2 + 2b^2}, \quad H_{11} = \frac{\nu}{6(3a^2 + b^2)}\left[\frac{3}{4}a^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}a^2b^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{1+\nu}\right)b^4\right]$$

$$z = g_\alpha\varphi^\alpha + e_\alpha\Omega^\alpha_{,\xi}$$

$$g_1 = \xi_1\,\frac{4a^2(a^2 + b^2) - 3(3a^2 + b^2)\xi^\gamma\xi_\gamma - (3\xi_2^2 - \xi_1^2)(a^2 - b^2)}{4a^2(5a^2 + 2b^2)}$$

$$e_1 = \xi_1\frac{\nu}{6}\left[\frac{111a^4 + 30a^2b^2 + 3b^4}{16a^2(5a^2 + 2b^2)}\xi^\gamma\xi_\gamma + \right.$$

$$+ \frac{(31a^4 - 2a^2b^2 + 3b^4)((a^2 - b^2)(3\xi_2^2 - \xi_1^2) - 12a^2(2a^2 + b^2))}{48a^2(3a^2 + b^2)(5a^2 + 2b^2)} +$$

$$\left. + \frac{4(a^2 - b^2)(3\xi_2^2 - \xi_1^2 + 3a^2)}{3(3a^2 + b^2)} + \frac{b^2 - a^2}{16}\right]$$

4°. *Прямоугольник* $|\xi_1| \leqslant a$, $|\xi_2| \leqslant b$

$$J_{11} = \mu\frac{5}{6}\,|S|, \quad z = g_\alpha\varphi^\alpha + \nu e_\alpha\Omega^\alpha_{,\xi}$$

$$H_{11} = \frac{\nu}{15}a^2 + \frac{3\nu^2}{4(1+\nu)}\left[\frac{7}{15}a^2 + \frac{2}{9}b^2 + \frac{2b^4}{45a^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{4b^5}{\pi^5a^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^5}\,\mathrm{th}\,\frac{k\pi a}{b} - \frac{128ab}{\pi^5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^5}\,\mathrm{cth}\,\frac{(2k-1)\pi b}{2a}\right]$$

$$g_1 = \frac{1}{4}\xi_1\left(1 - \frac{5}{3}\frac{\xi_1^2}{a^2}\right)$$

$$e_1 = \frac{11}{36}\xi_1^3 - \frac{7}{12}a^2\xi_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}2b^3\,\mathrm{sh}\,(k\pi\xi_1/b)\times$$

$$\times\cos(k\pi\xi_2/b)\,[\pi^3k^3\,\mathrm{ch}\,(k\pi a/b)]^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}16a^2b\,\mathrm{ch}\,((2k-1)\,\xi_2/2a)\times$$

$$\times\sin((2k-1)\,\xi_1/2a)\,[\pi^3(2k-1)^3\,\mathrm{sh}\,(2k-1)\,b/2a]^{-1}$$

Значения J_{22}, H_{22} и функций g_2 и e_2 для эллипса и прямоугольника получаются заменой $a \leftrightarrow b$ и индексов $1 \leftrightarrow 2$, остальные компоненты $J^{\alpha\beta}$, $H^{\alpha\beta}$ в главных осях инерции равны нулю.

5°. *Неоднородный стержень прямоугольного поперечного сечения* $|\xi_1| \leqslant a$, $|\xi_2| \leqslant b$ *с модулем сдвига* μ, *зависящим произвольным образом от координаты* ξ_1:

$$J_{11} = \frac{\langle\mu_*\rangle^2}{\langle\mu_*^2/\mu\rangle}, \quad J_{22} = \frac{5}{6}\langle\mu\rangle$$

$$z = g_\alpha\varphi^\alpha, \quad g_1 = \frac{\langle\mu_*\rangle}{\langle\mu_*^2/\mu\rangle}f - \xi_1, \quad g_2 = -\frac{5}{12}\frac{\xi_2^3}{b^2} + \frac{1}{4}\xi_2$$

Здесь функции μ_* и f определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений $\mu_{*,1} = \mu\xi_1$, $f_{,1} = \mu_*/\mu$. Постоянные интегрирования фиксированы условиями $\mu_*(a) = 0$ и $\langle \mu f \rangle = 0$.

6°. *Стержень прямоугольного сечения* $|\xi_1| \leqslant a$, $|\xi_2| \leqslant b$, *склеенный из трех прямоугольных стержней*. Пусть модуль сдвига μ является кусочно-постоянной функцией ξ_1:

$$\mu = \mu_1, \quad -a \leqslant \xi_1 \leqslant -c;$$

$$\mu = \mu_0, \quad -c \leqslant \xi_1 \leqslant c; \quad \mu = \mu_1, \quad c \leqslant \xi_1 \leqslant a$$

$$J_{11} = \mu_0 \frac{5}{6} |S| \varkappa_{11}, \quad J_{22} = \mu_1 \frac{5}{6} |S| \varkappa_{22}$$

$$\varkappa_{22} = 1 + \delta(\alpha - 1), \quad \delta = c/a, \quad \alpha = \mu_0/\mu_1$$

$$\varkappa_{11} = \frac{\alpha[3(1-\delta^5) - 10(1-\delta^3) + 15(1-\delta)] + 8\alpha^2\delta^5 + 20\alpha(1-\delta^2)\delta^3 + 15\delta(1-\delta^2)^2}{8[\alpha + {}^5/_8(\alpha-1)(4\delta^2 - \delta^4 - 3)\delta]^2}$$

Замечание. Стержень, рассматриваемый в п. 6, имеет следующие значения изгибных жесткостей:

$$\langle E\xi_1\xi_1 \rangle = \frac{8}{3}(1+\nu) a^3 b \mu_1 [1 - \delta^3(1-\alpha)], \quad \langle E\xi_2\xi_2 \rangle =$$

$$= \frac{8}{3}(1+\nu) a b^3 \mu_1 [1 - \delta(1-\alpha)]$$

Энергии изгиба и сдвига в направлении оси ξ_1 имеют порядки соответственно $\langle E\xi_1\xi_1 \rangle \varepsilon^2/h^2$ и $\langle E\xi_1\xi_1 \rangle^2 \varepsilon^2/h^2 l^2 J_{11}$. Их отношение характеризуется величиной

$$\eta = (l/h)^2 \beta, \quad \beta = \frac{5\alpha\varkappa_{11}}{(1+\nu)[1 - \delta^3(1-\alpha)]} \tag{4.1}$$

Если напряженное состояние таково, что $\beta \sim (h/l)^2$, то энергия поперечного сдвига оказывается величиной того же порядка малости, что и энергия изгиба, и энергию поперечного сдвига надо учитывать уже в первом приближении. Из формулы (4.1) видно, что β становится малым при сильном перепаде модулей сдвига. Например, при $\alpha \sim 10^{-2}$, $\beta \sim 10^{-2}$ и для напряженных состояний с $h/l \sim 1/10$ отмеченный эффект существен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Об энергии упругого стержня.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 704—718.
3. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. *Джанелидзе Г. Ю.* Соотношения Кирхгофа для естественно скрученных стержней и их приложения.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1946, № 1, с. 23—32.
5. *Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А.* К теории естественно закрученных криволинейных стержней.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 103—113.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 664—687.
7. *Бердичевский В. Л., Мисюра В. А.* О перекрестных эффектах между растяжением и изгибом в задачах о деформации цилиндрических оболочек.— В кн.: Тр. 12-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1980. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1980, с. 165—171.
8. *Мисюра В. А.* Об эффекте потери точности классической теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 3, с. 584—587.
9. *Елисеев В. В.* Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 145—150.
10. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 3, с. 558—561.
11. *Старосельский Л. А.* Об уравнениях, описывающих колебания криволинейных упругих стержней.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 63—67.
12. *Бердичевский В. Л., Квашнина С. С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней,— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 120—135.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.1982