

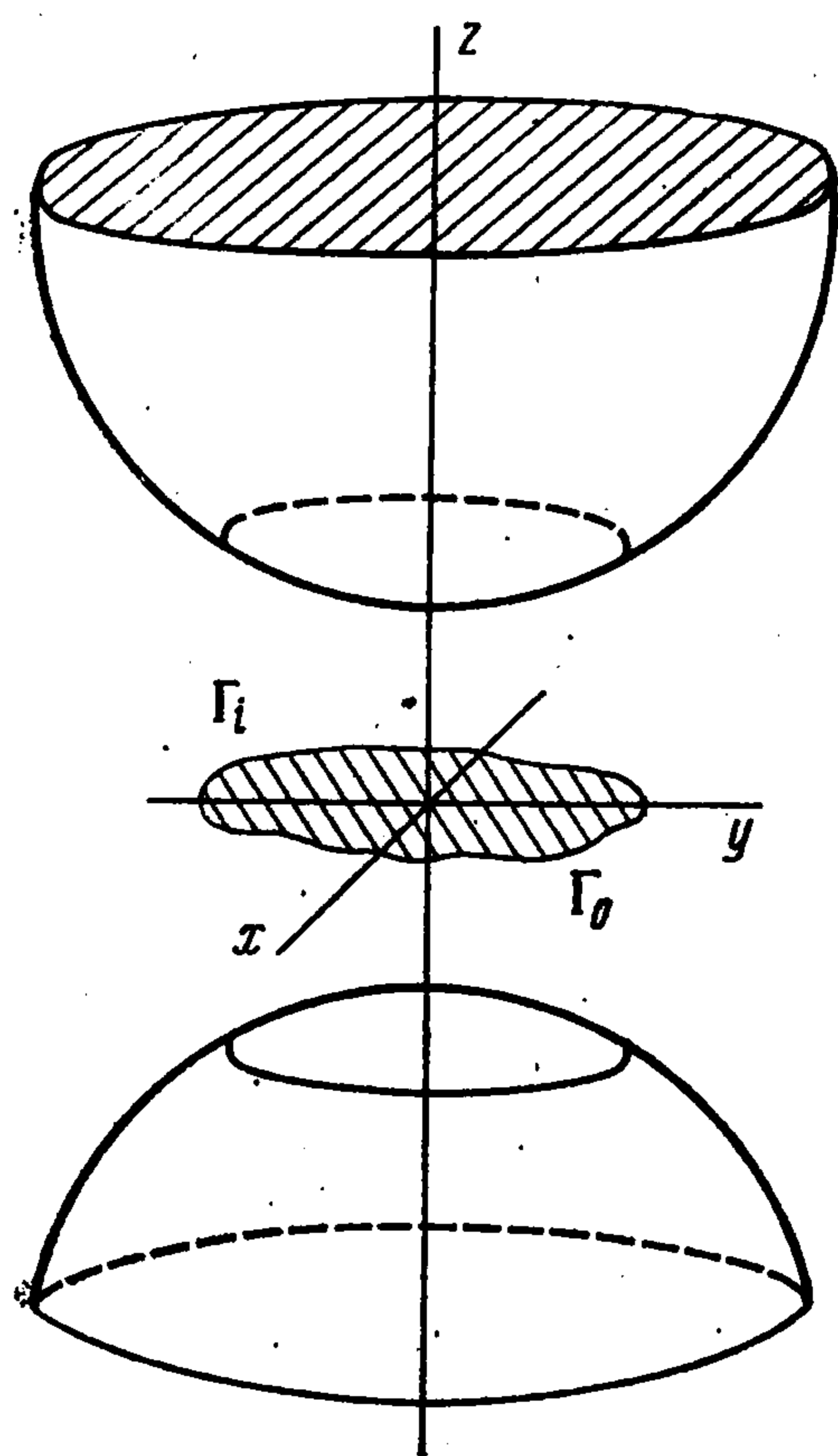
УДК 539.3 : 621.891

## О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО ТРЕНИЯ

Кудиш И. И.

Ставится и исследуется пространственная контактная задача для упругих шероховатых тел, катящихся одно по другому в условиях смешанного трения: в одной части области контакта упругие тела разделены, слоем вязкой несжимаемой жидкости (смазки), а в другой части они находятся в непосредственном контакте (подобные условия характерны для подшипников качения, зубчатых передач и т. д.). Задача сводится к системе нелинейных интегродифференциальных и интегральных уравнений и неравенств в области контакта, часть внешней границы и ряд внутренних границ которой, разделяющих смазанные и несмазанные зоны, заранее неизвестны. Частными случаями являются задачи о сухом и полностью смазанном контакте. Дается формулировка задачи для случая одинаковых материалов тел. Рассматривается задача о смешанном трении в сильно вытянутом контакте. При этом асимптотическими методами исследуются сечения области контакта, в которых взаимодействие тел осуществляется непосредственно или через слой смазки.

**1. Постановка задачи.** В области контакта введем подвижную систему координат (фигура). Ось  $z$  направим от нижнего тела к верхнему так, чтобы она проходила через центры кривизн контактирующих тел. Плоскость



$xu$  совместим со срединной плоскостью в смазочном слое  $z = 0$ . При этом уравнения поверхностей, ограничивающих контактирующие тела, имеют вид  $z = \pm \frac{1}{2}h(x, y)$  соответственно. Здесь  $h = h(x, y)$  — функция зазора между контактирующими телами.

Будем считать контакт локальным и заменять контактирующие тела полупространствами. Снятие микронеровностей, покрывающих поверхности контактирующих тел, аппроксимируем степенной функцией давления  $p$  с показателем  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  [1]. Предполагается, что имеет место медленное стационарное движение поверхностей контактирующих тел с линейными скоростями  $u_1 = (u_1, v_1)$  и  $u_2 = (u_2, v_2)$ . Считается, что скорость проскальзывания мала по сравнению со скоростью качения, инерционными силами по сравнению с вязкими силами в смазке можно пренебречь [2, 3]. Предполагается также, что смазка между телами обладает свойствами несжимаемой ньютоновской жидкости и находится в изотермических условиях, причем толщина слоя мала по сравнению с характерными размерами области контакта [2, 3].

В этих предположениях вектор касательных напряжений в слое смазки пропорционален градиенту линейной скорости частиц смазки, т. е.

$$(1.1) \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\tau = (\tau_{xz}, \tau_{yz}), \quad u = (u, v))$$

где  $\mu$  — вязкость смазки.

Там, где имеет место непосредственный контакт упругих тел, возникают силы сухого трения. В общем случае область непосредственного контакта разбивается на зоны сцепления и проскальзывания, в которых относительное проскальзывание тел  $s(x, y)$  соответственно равно нулю и отлично от нуля, причем в последнем случае напряжение трения подчиняется закону Кулона

$$(1.2) \quad \tau = f p s / |s|, \quad |s| > 0$$

( $f = f(p, |s|)$  — коэффициент трения). При этом в зоне сцепления выполнено неравенство

$$(1.3) \quad |\tau| \leq f p, \quad |s| = 0$$

Остановимся на граничных условиях для скорости жидкости  $u$ . В силу условий непротекания и прилипания с учетом предположения о малости  $\text{grad } h$  получим для компонент скорости  $w = (u, v, w)$  частиц жидкости на поверхностях трения

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u &= u_1, \quad w = -1/2 (u_1, \text{grad } h), \quad z = -h/2 \\ u &= u_2, \quad w = 1/2 (u_2, \text{grad } h), \quad z = h/2 \end{aligned}$$

Проделав стандартные выкладки [3] с учетом указанных выше допущений и условий (1.4), после интегрирования уравнения неразрывности  $\text{div } w = 0$  по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2$  найдем

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{\partial}{\partial y} Q_y = 0, \quad Q = (Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} u(x, y, z) dz$$

Проинтегрировав, кроме того, уравнения движения с учетом ряда сделанных выше допущений и условий (1.4), найдем

$$(1.6) \quad u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{h} z + \frac{1}{2\mu} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \text{grad } p, \quad p = p(x, y)$$

и для расхода жидкости получим

$$(1.7) \quad Q = \frac{u_1 + u_2}{2} h - \frac{h^3}{12\mu} \text{grad } p$$

Следовательно, уравнение Рейнольдса принимает вид

$$(1.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v_1 + v_2}{2} \frac{\partial h}{\partial y}$$

При выводе уравнения (1.8) также учтена малость скорости проскальзывания по сравнению со скоростью качения. Очевидно, что уравнение (1.8) справедливо в тех зонах области контакта, в которых  $h > 0$ .

При выводе уравнения для определения зазора  $h$  и при формулировании задачи определения касательных напряжений  $\tau$  и скоростей проскальзывания  $s$  для простоты предположим, что материалы упругих тел одинаковы. Тогда задача определения контактного давления и зазора отщепляется от задачи определения касательных напряжений и скоростей проскальзывания в области контакта.

Выпишем разности упругих смещений  $W = (U_2 - U_1, V_2 - V_1, W_2 - W_1)$  точек поверхностей верхнего и нижнего тела. Следуя [4], получим

$$(1.9) \quad \begin{aligned} U_2 - U_1 &= \frac{1}{2\pi G} \iint_E \left[ \frac{1 - \nu \sin^2 \theta}{R} (\tau_{xz}^+ - \tau_{xz}^-) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu \sin \theta \cos \theta}{R} (\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-) \right] dx' dy' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \frac{1}{2\pi G} \iint_E \left[ \frac{v \sin \theta \cos \theta}{R} (\tau_{xz}^+ - \tau_{xz}^-) + \right. \\
&+ \left. \frac{1 - v \cos^2 \theta}{R} (\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-) \right] dx' dy' \\
W_2 - W_1 &= k p^\alpha + \frac{1 - 2v}{4\pi G} \iint_E \left[ \frac{\cos \theta}{R} (\tau_{xz}^+ + \tau_{xz}^-) + \right. \\
&+ \left. \frac{\sin \theta}{R} (\tau_{yz}^+ + \tau_{yz}^-) \right] dx' dy' + \frac{1 - v}{\pi G} \iint_E \frac{p dx' dy'}{R}
\end{aligned}$$

Здесь  $\tau^+ = (\tau_{xz}^+, \tau_{yz}^+)$  и  $\tau^- = (\tau_{xz}^-, \tau_{yz}^-)$  — касательные напряжения, действующие на верхнюю и нижнюю контактирующие поверхности соответственно и определяемые соотношениями (1.1)–(1.3). Область контакта  $E = E_p \cup E_\tau$ , где  $E_p$  — зона области контакта, в которой  $p > 0$ ,  $E_\tau$  — зона области контакта, в которой  $|\tau| > 0$ .

Из кинематических соотношений, пренебрегая малыми второго порядка по  $|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|$ , для скорости проскальзывания  $\mathbf{s}$  получим<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
(1.10) \quad \mathbf{s} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \nabla) (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{U}_2 &= (U_2, V_2), \quad \mathbf{U}_1 = (U_1, V_1), \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Теперь с учетом смятия микронеровностей для зазора  $h$  найдем (см. формулы (1.1), (1.6) и (1.9))

$$\begin{aligned}
(1.11) \quad h &= h_0 + k p^\alpha + \frac{x^2}{R_x'} + \frac{y^2}{R_y'} + \frac{1 - v}{\pi G} \iint_{E_p} \frac{p dx' dy'}{R} - \\
&- \frac{1 - 2v}{4\pi G} \iint_{E_p} \left[ \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x'} + \sin \theta \frac{\partial p}{\partial y'} \right] \frac{h dx' dy'}{R} \\
\sin \theta &= \frac{y - y'}{R}, \quad \cos \theta = \frac{x - x'}{R}, \quad R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}
\end{aligned}$$

Здесь  $h_0$  — заранее неизвестная постоянная,  $k$  и  $\alpha$  — коэффициенты в законе смятия микронеровностей,  $R_x'$  и  $R_y'$  — приведенные радиусы кривизны контактирующих тел,  $G$  и  $v$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материалов тел.

В зоне, где смазка отсутствует, имеем равенство  $h = 0$ , где  $h$  определяется из (1.11).

К указанным уравнениям и неравенствам необходимо добавить условие статики и граничные условия

$$(1.12) \quad \iint_{E_p} p(x', y') dx' dy' = P; \quad p|_\Gamma = 0$$

$\Gamma_i$  — заданная граница входа в область контакта  $E_p$ , если

$$h|_{\Gamma_i} > 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{n})|_{\Gamma_i} < 0$$

$$\frac{dp}{dn} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \text{если} \quad h|_{\Gamma_0} > 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} \geq 0$$

Здесь  $P$  — сжимающая контактирующие тела сила,  $\Gamma$  — граница области контакта  $E_p$ ,  $\Gamma_i$  — граница области входа — часть границы  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$  — граница области выхода — часть границы  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль к границе  $\Gamma$ .

<sup>1</sup> Гольдштейн Р. В., Заговский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Решение пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением вариационным методом. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979, № 134. 66 с.

Таким образом, для определения  $p$  и  $h$  получаем следующие соотношения: если  $h > 0$ , то имеет место (1.8), (1.11), в противном случае  $h = 0$  и для определения  $p$  используется (1.11) при  $h = 0$ ; при этом функция  $h$  вычисляется на основании (1.11). К указанным соотношениям добавляются условия (1.12).

После определения давления  $p$  и зазора  $h$  в случае одинаковых или несжимаемых материалов тел можно перейти к нахождению напряжений трения и скоростей проскальзывания. При помощи соотношений (1.1)—(1.3), (1.6), (1.9) и (1.10) задача определения касательных напряжений и скоростей проскальзывания в области контакта сводится к системе нелинейных уравнений и неравенств

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \tau &= \mu s/h \quad \text{при } h > 0 \\ |\tau| &\leq fp \quad (|s| = 0), \quad \tau = fps/|s| \quad (|s| > 0) \quad \text{при } h = 0 \\ s &= -B(\tau) + v, \quad |\tau| |_{\partial E_\tau} = 0 \\ B(\tau) &= \frac{u_1 + u_2}{2} \iint_{E_\tau} D^1(x - x', y - y') \tau(x', y') dx' dy' + \\ &+ \frac{v_1 + v_2}{2} \iint_{E_\tau} D^2(x - x', y - y') \tau(x', y') dx' dy' \end{aligned}$$

Элементы матриц  $D^1$  и  $D^2$  имеют вид <sup>2</sup>

$$(1.14) \quad \begin{aligned} D_{11}^1 &= -\frac{\cos \theta (3v \sin^2 \theta - 1)}{\pi GR^2}, \quad D_{12}^1 = D_{21}^1 = -\frac{v \sin \theta (1 - 3 \cos^2 \theta)}{\pi GR^2} \\ D_{22}^1 &= -\frac{\cos \theta (v - 1 - 3v \sin^2 \theta)}{\pi GR^2}, \quad D_{11}^2 = -\frac{\sin \theta (v - 1 - 3v \cos^2 \theta)}{\pi GR^2} \\ D_{12}^2 &= D_{21}^2 = -\frac{v \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta)}{\pi GR^2} \\ D_{22}^2 &= -\frac{\sin \theta (3v \cos^2 \theta - 1)}{\pi GR^2} \end{aligned}$$

( $v = u_2 - u_1$  — вектор скорости «жесткого» проскальзывания,  $\partial E_\tau$  — заранее неизвестная граница области  $E_\tau$ ).

После определения вектора проскальзывания в зоне, где имеется смазка, т. е.  $h > 0$ , напряжения трения на поверхностях можно представить в виде

$$(1.15) \quad \tau^\pm = \mp \frac{\mu s}{h} - \frac{h}{2} \text{grad } p$$

Сделаем ряд замечаний физического характера, касающихся законов трения (1.1)—(1.3). В силу адсорбционных эффектов граничные слои смазок приобретают свойства структурных анизотропных жидкостей. Как показывает ряд экспериментальных исследований [5], в небольшом количестве молекулярных слоев жидкости на границе твердого тела происходит непрерывный переход от жидкостного трения (соотношение (1.1)) к сухому (соотношения (1.2), (1.3)). Конкретные закономерности этого перехода мало изучены и зависят от адсорбционных свойств пары смазка — твердое тело.

В дальнейшем будем требовать непрерывности перехода соотношения (1.1) в (1.2), (1.3), т. е. непрерывности касательных напряжений  $\tau$  на линиях раздела зон с  $h > 0$  и  $h = 0$ .

Получим некоторые следствия, вытекающие из условия непрерывности касательных напряжений. Рассмотрим часть границы между смазанными и несмазанными зонами контакта, на которой имеет место проскальзывание, т. е.  $|s| > 0$ . Тогда при помощи (1.2) и (1.15), исходя из непрерывно-

<sup>2</sup> См. также сноску на стр. 1008.

сти касательных напряжений, получим  $\mu = \mu(p, h)$  и

$$(1.16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mu/h = fp/|s|, \quad |s| > 0$$

С другой стороны, для аналогичного участка границы  $h = 0$ , на котором имеет место сцепление  $|s| = 0$ , с учетом непрерывности напряжений трения и формул (1.3) и (1.15) найдем

$$(1.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0, |s| \rightarrow 0} (\mu|s|/h - fp) \leq 0, \quad |s| = 0$$

Соотношения (1.16) и (1.17) отражают структурные свойства граничных слоев смазки; первое из них подтверждается графиком зависимости коэффициента трения от толщины слоя ([5], с. 316).

Таким образом, к описанной выше постановке задачи определения  $\tau$  и  $s$  (1.13), (1.14) с учетом непрерывности  $\tau$  на границах зон с  $h > 0$  и  $h = 0$  необходимо добавить соотношения  $\mu = \mu(p, h)$  и  $f = f(p, |s|)$ , которые на границах «смазанных» и «несмазанных» зон контакта удовлетворяют соотношениям (1.16) и (1.17).

2. Случай сильно вытянутого в направлении оси  $y$  контакта. Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{a_H}, \quad y' = \frac{y}{b_H}, \quad p' = \frac{p}{p_H}, \quad h' = \frac{h}{h_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\tau' = \frac{\tau}{f_0 p_H}$$

$$s' = \frac{2s}{|u_1 + u_2|}, \quad v' = \frac{2v}{|u_1 + u_2|}, \quad Q' = \frac{2R_x' Q}{|u_1 + u_2| a_H^2}$$

$$\varphi(\delta) = \frac{K(e) - D}{\delta^2 D}, \quad D = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)], \quad e = \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\theta_0 = \frac{(1 - 2v) a_H}{4(1 - v) R_x'}, \quad V = \frac{6\mu_0 |u_1 + u_2| R_x'^2}{p_H a_H^3}, \quad \lambda = \frac{k p_H^\alpha R_x'}{a_H^2}$$

$$\delta = \frac{a_H}{b_H}, \quad H_0 = \frac{h_0 R_x'}{a_H^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{v_1 + v_2}{u_1 + u_2}$$

$$\psi_h = \frac{1}{12(1 - v) \pi \delta^3 D} \left( \frac{a_H}{R_x'} \right)^2, \quad \psi_0 = \frac{1}{(1 - v) \pi \delta^3 D} \frac{a_H}{R_x'}$$

Здесь  $K(e)$  и  $E(e)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; постоянная  $\delta$  определяется из уравнения  $\delta^2 \varphi(\delta) = R_x'/R_y'$ ,  $a_H$  и  $b_H$  — полуоси герцевского эллипса контакта,  $p_H$  — максимальное герцевское напряжение.

Рассмотрим случай сильно вытянутого контакта, когда  $\delta \ll 1$ ,  $\gamma \sim \delta$  и  $v_y \sim \delta$ . Удобно перейти к записи уравнения для  $h$  в виде, в котором  $H_0$  — безразмерная толщина слоя на выходе из области контакта, т. е. в точке  $(x_T, y) \in \Gamma_0$ . При этом имеем  $H_0 = H_0(y)$ . В случае  $\delta \ll 1$  входящие в уравнения задачи интегралы, согласно [6], могут быть упрощены. Тогда с учетом указанного выше преобразования уравнения для  $h$  задачу определения главных членов асимптотик  $p$  и  $h$  запишем в виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{V}{H_0^2} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad H_0 > 0$$

$$(2.2) \quad \lambda p^\alpha + x^2 - c_p^2 + \frac{2}{\pi \delta^3 D} \int_a^p p(t, y) \ln \frac{c_p - t}{|x - t|} dt = 0, \quad H_0 = 0$$

$$(2.3) \quad \int_{a_p}^{c_p} p(t, y) dt = \frac{\pi}{2} p_{00}(y), \quad p(a_p, y) = p(c_p, y) = 0$$

$$(2.4) \quad \partial p'(c_p, y) / \partial x = 0, \quad H_0 > 0$$

$$(2.5) \quad H_0(h-1) = \lambda p^\alpha + x^2 - c_p^2 + \frac{2}{\pi \delta^3 D} \int_{a_p}^{c_p} p(t, y) \ln \frac{c_p - t}{|x - t|} dt + \\ + \frac{H_0 \theta_0}{\delta^3 D} \int_x^{c_p} h \frac{\partial p(t, y)}{\partial t} dt$$

В (2.1)–(2.5) учтено, что если зазор  $h$  в некоторой точке обращается в нуль, то в рамках плоской задачи это влечет за собой равенство  $h = 0$  во всей области контакта и, следовательно,  $H_0 = 0$ . Это вытекает из того, что в плоском случае расход жидкости через зазор  $h$  во всей области контакта постоянен. Кроме того, в (2.1)–(2.5) введены обозначения:  $a_p$  и  $c_p$  — соответственно абсциссы точек входа и выхода из области контакта в сечении  $y = \text{const}$ , в котором  $p > 0$ , т. е.  $a_p = a_p(y)$  и  $c_p = c_p(y)$ ;  $p_{00}(y)$  — заранее неизвестная функция, характеризующая силу, приложенную к данному сечению.

Совершенно аналогично, в задаче определения  $\tau$  и  $s$  при  $\delta \ll 1$ ,  $\gamma \sim \delta$  и  $v_y \sim \delta$ ; для главных членов асимптотик получим  $\tau_y = s_y = 0$  и

$$(2.6) \quad \tau_x = \mu s_x / h \text{ при } H_0 > 0 \\ |\tau_x| \leq fp (s_x = 0), \quad \tau_x = fp \text{ sign } s_x (|s_x| > 0) \text{ при } H_0 = 0 \\ s_x = -2\psi_0(1-\nu) \int_{a_\tau}^{c_\tau} \frac{\tau_x(t, y)}{|t-x|} dt + v_x, \quad \tau_x(a_\tau, y) = \tau_x(c_\tau, y) = 0$$

Здесь  $a_\tau$  и  $c_\tau$  — соответственно координаты начала и конца области контакта, вне которой имеем  $\tau_x = 0$ .

Системы уравнений и неравенств (2.1)–(2.5) и (2.6) справедливы всюду в области контакта вне малых, порядка  $\delta$ , окрестностей точек  $y = \pm 1$  и других зон контакта, примыкающих к границам с радиусом кривизны порядка  $\delta$ . Кроме того, из указанных систем вытекает, что в общем случае область контакта разбивается на ряд чередующихся между собой полос, заполненных смазкой, и полос, в которых смазка отсутствует.

Исходя из (2.1)–(2.6) и соотношений (1.16), (1.17), можно показать непрерывность давления  $p$  и компоненты вектора скорости проскальзывания  $s_x$  при переходе через сечение  $y = \text{const}$ , в котором  $H_0$  обращается в нуль.

Ниже будет исследована задача определения  $p$  и  $h$ .

Рассмотрим случай, когда всюду в области контакта смазка отсутствует, т. е.  $H_0 = 0$ . При этом необходимо решить уравнения (2.2), (2.3). Учитывая, что форма контактирующих тел описывается четной функцией, получим  $c_p = -a_p$ . Тогда преобразование переменных

$$(2.7) \quad (x, -c_p, c_p) = \sigma(x_0, -c_0, c_0), \\ p = p_{00}(y) p^0, \quad \lambda = \sigma^2 p_{00}^{-\alpha}(y) \lambda_0, \quad \sigma = \frac{p_{00}(y)}{\delta^3 D}$$

уравнения (2.2), (2.3) приводятся к виду, с точностью до обозначений совпадающему с видом соответствующих уравнений задачи с заранее неизвестной областью контакта в [7]. В силу этого при исследовании уравне-

ний (2.2), (2.3) методами срачиваемых и регулярных асимптотических разложений могут быть получены результаты, приведенные в [7]. В частности, при  $\lambda_0 = \lambda_0(\delta) \ll 1$ ,  $\alpha > 3$  и  $\lambda_0 = \lambda_0(\delta) \gg 1$  решение задачи строится регулярными асимптотическими методами в аналитическом виде, а при  $\lambda_0 = \lambda_0(\delta) \ll 1$  и  $0 < \alpha \leq 3$  — методом срачиваемых асимптотических разложений.

Рассмотрим случай, когда всюду в области контакта имеется отличный от нуля слой смазки, т. е.  $H_0 > 0$ . При этом необходимо исследовать уравнения (2.1), (2.3)—(2.5). Преобразованием переменных (2.7)

$$(2.8) \quad H_0 = \sigma^2 H_{00}, \quad V = p_{00}(y) \sigma^3 V_0, \quad \theta_0 = \frac{1}{\sigma} \theta_{00}$$

уравнения (2.1), (2.3)—(2.5) приводятся к уравнениям, аналогичным (с учетом обозначений) уравнениям работы [8] при  $F(x) = x$ . В [8] изложен асимптотический анализ указанных уравнений для случая тяжелого нагружения, т. е. когда  $V_0 = V_0(\delta) \ll 1$  или  $\mu(p^0, h) \gg 1$  при  $p^0 \sim 1$ .

Опустив индексы 0 и  $p$ , преобразованные с учетом (2.7) и (2.8), уравнения задачи запишем в виде

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{V}{H_0^2} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$(2.10) \quad H_0(h-1) = \lambda p^\alpha + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t, y) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt + \\ + H_0 \theta_0 \int_x^c h \frac{\partial p(t, y)}{\partial t} dt$$

$$(2.11) \quad p(a, y) = p(c, y) = \frac{\partial p(c, y)}{\partial x} = 0, \quad \int_x^c p(t, y) dt = \frac{\pi}{2}$$

Из (2.10) следует, что  $h(c, y) = 1$ . Поэтому, продифференцировав (2.10) по  $x$ , получим дифференциальное уравнение относительно  $h(x, y)$ . Проинтегрировав затем его относительно  $h$ , с учетом условия  $h(c, y) = 1$  найдем

$$(2.12) \quad H_0(h-1) = \lambda p^\alpha - H_0 \theta_0 p + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t, y) \ln \frac{c-t}{|c-t|} dt - \\ - \theta_0 e^{-\theta_0 p} \int_c^x \frac{\partial p(t, y)}{\partial t} e^{\theta_0 p} \left[ \lambda p^\alpha - H_0 \theta_0 p + t^2 - c^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(s, y) \ln \frac{c-s}{|t-s|} ds \right] dt$$

Рассмотрим уравнения (2.9), (2.12), (2.11) в случае тяжелого нагружения. Контакт будем называть тяжело нагруженным, если в уравнения задачи входит малый параметр  $\omega = \omega(\delta)$  (его физический смысл указан выше) и в области вдали от границ контакта имеет место оценка [8]

$$(2.13) \quad H_0(h-1) \ll 1 \text{ при } x-a \gg \varepsilon_q, c-x \gg \varepsilon_g$$

Здесь  $\varepsilon_q = \varepsilon_q(\omega) \ll 1$  и  $\varepsilon_g = \varepsilon_g(\omega) \ll 1$  — характерные размеры зон входа и выхода из области контакта, являющихся погранслоями в окрестностях точек  $x = a$  и  $x = c$ .

Определим асимптотику решения задачи во внешней области, т. е. вдали от границ контакта. Тогда, проинтегрировав уравнение (2.10) относительно  $h$ , с учетом оценки (2.13) во внешней области получим уравнения

для вырожденного решения

$$(2.14) \quad z - \theta_0 \int_c^x \frac{\partial p_0(t, y)}{\partial t} z(t, y) dt = \lambda p_0^\alpha(c, y) e^{\theta_0 p_0(c, y)}$$

$$z(x, y) = e^{\theta_0 p_0} \left[ \lambda p_0^\alpha - H_0 \theta_0 p_0 + x^2 - c^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_a^c p_0(t, y) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt + H_0 \theta_0 p_0(c, y) \right], \quad \int_a^c p_0(t, y) dt = \frac{\pi}{2}$$

которое путем дифференцирования и дальнейшего преобразования приводится к виду

$$(2.15) \quad \lambda p_0^\alpha - H_0 \theta_0 p_0 + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p_0(t, y) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt = \\ = \lambda p_0^\alpha(c, y) - H_0 \theta_0 p_0(c, y) \\ \int_a^c p_0(t, y) dt = \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим случай  $\theta_0 = 0$  и  $0 < \alpha < 1$ . Очевидно, что дальнейший асимптотический анализ полностью совпадает с изложенным в работе [8], в которой получены две замкнутых асимптотически справедливых в зонах входа и выхода системы уравнений относительно главных членов асимптотик давления и зазора. Кроме того, в [8] получена оценка для толщины слоя смазки  $H_0$

$$(2.16) \quad H_0 = A (V \varepsilon_q^2)^{1/2}, \quad A = A(\alpha_1, \lambda_0, \alpha) \sim 1 \text{ при } \omega \ll 1$$

где  $\varepsilon_q \ll V^{0,4}$  для режимов масляного голодания и  $\varepsilon_q = V^{0,4}$  для режимов обильной смазки.

Выше был рассмотрен случай несжимаемых материалов тел ( $\theta_0 = 0$ ). Случай сжимаемых материалов тел ( $\theta_0 > 0$ ) может быть также рассмотрен методом, несущественно отличающимся от изложенного в [8] при  $\alpha = 1$  и  $H_0 \theta_0 = \lambda$ .

Следует отметить, что функция  $p_{00}(y)$ , входящая в условие статики (2.3) и соотношения (2.7), (2.8), может быть определена по асимптотической методике, не зависящей от того, гладкие или шероховатые тела.

Аналогично может быть рассмотрен режим легкого нагружения, при котором непосредственного контакта, как правило, не возникает и  $V \gg 1$ . При этом в случае сильно вытянутого в направлении  $y$  контакта в каждом сечении  $y = \text{const}$ , в окрестностях которого кривизна границы входа  $\Gamma_i$  невелика, задача с малой погрешностью сводится к плоской контактно-гидродинамической задаче. Полученная таким образом плоская задача может быть исследована методами регулярных возмущений [9].

Выше были рассмотрены плоские задачи, возникающие в сечениях  $y = \text{const}$ , в которых имеет место либо непосредственный контакт тел, либо — контакт тел через масляную прослойку. Воспользовавшись полученными результатами, можно рассмотреть задачу о смешанном режиме трения. Пусть  $a_0(y)$  и  $a_p(y)$  — соответственно части границ областей сухого и смазанного контактов шероховатых упругих тел. Тогда в сечениях  $y = \text{const}$ , в которых  $a_p(y) < a_0(y)$ , контактирующие тела будут разделены слоем смазки, а в остальных сечениях  $y = \text{const}$  имеем  $a_p(y) = a_0(y)$ , и тела будут непосредственно контактировать.

Приведем простой пример, иллюстрирующий изложенную выше геометрию области контакта. Будем считать контактирующие тела гладкими, а вязкость жидкости — постоянной. Рассмотрим сечения области контакта, близкие к сечению  $y = 0$ , в которых с малой ошибкой можно пренебречь изменением функции  $p_{00}(y)$ . Тогда при режимах масляного голодания в рассматриваемых сечениях области контакта профиль зазора будет иметь вид [8]

$$(2.17) \quad H_0(y) = A_0 (V\epsilon_q^2)^{1/3} |\alpha_1(y)|^{2/3}, \quad \alpha_1(y) = (a_p(y) - a_0(y))/\epsilon_q$$

где  $A_0$  — постоянная, а  $\alpha_1(y)$  характеризует локальную удаленность границы входа от границы эллипса контакта по Герцу. Задавая разные функции  $\alpha_1(y)$  (например,  $\alpha_1(y) = z_*\theta(-z_*)$ ,  $z_* = \cos(10y) - 0,9$ ;  $\theta(z_*)$  — функция Хэвисайда), будем получать разные условия смазывания в области контакта.

Из (2.17) становится очевидной зависимость толщины слоя смазки в области контакта от конфигурации границы входа. Следует отметить, что аналогичное поведение смазки в области контакта при режимах масляного голодания отмечалось в эксперименте [10].

Заметим, что с ростом силы  $P$ , уменьшением степени шероховатости тел  $k$  (при фиксированных  $a_H$ ,  $b_H$  и  $a_p(y) - a_0^\circ(y)$ , где  $a_0^\circ(y)$  — абсцисса границы герцевского эллипса контакта гладких тел) параметр  $\lambda$ , характеризующий вклад шероховатости в решение задачи, уменьшается, а вместе с ним уменьшается и  $|a_0(y) - a_0^\circ(y)|$  ( $a_0(y) - a_0^\circ(y) < 0$ ). Поэтому зоны шероховатого контакта, в которых ранее имел место сухой контакт, при увеличении  $P$  или уменьшении  $k$  будут разделяться слоем смазки. Аналогичная картина поведения смазки в контакте реализуется при увеличении  $|a_p(y)|$  ( $a_p(y) < 0$ ) при фиксированных значениях  $a_0(y)$  и  $\lambda \geq 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демкин Н. Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 111 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
5. Ахматов А. С. Молекулярная физика граничного трения. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
6. Kalker J. J. On elastic line contact. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, v. 39, № 4, p. 1125—1132. — Рус. перев.: М.: Мир, Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Прикл. механика, 1972, № 4, с. 270—278.
7. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учете поверхностной структуры взаимодействующих тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 58—70.
8. Кудиш И. И. Асимптотические методы исследования плоских задач контактно-гидродинамической теории смазки при режимах тяжелого нагружения. Ч. 1. Изотермическая задача. — Изв. АН АрмССР: Механика, 1982, № 5, с. 46—64.
9. Кудиш И. И. Некоторые задачи упругогидродинамической теории смазки легко нагруженного контакта. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 81—95.
10. Wedeven L. D., Evans D., Cameron A. Optical analysis of Ball bearing starvation. — Trans. ASME. Ser. F. J. Lubricat. Technol., 1971, v. 93, № 3, p. 349—363. — Рус. перев.: М.: Мир, Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Проблемы трения и смазки, 1971, № 3, с. 34—49.

Москва

Поступила в редакцию  
8.VI.1982