

Поэтому и для частного класса тел степенной формы расчет АХ по формулам (3)—(4) предпочтительнее по сравнению с методом интерполяции по m .

Взяв в качестве базовых тела с показателями степени $m_1 = 0,5$, $m_2 = 0,6$, $m_3 = 0,7$, для $m_0 = 0,55$ и $m_0 = 0,65$ с использованием формулы (4) соответственно получим $\beta_1 = 0,374$, $\beta_2 = 0,758$, $\beta_3 = -0,134$ и $\beta_1 = -0,121$, $\beta_2 = 0,734$, $\beta_3 = 0,389$.

На фиг. 1 показаны графики функций $C_x(\lambda/m)$, построенные по результатам расчетов [6] при числах Маха набегающего потока $M_\infty = 2,6, \infty$; $\gamma = 1,4$. На фиг. 2 представлены результаты расчетов методом [7] для тел степенной формы со сферическим носком (такое искажение формы не приводит к необходимости пересчета β_v) при пространственном обтекании потоком совершенного газа, $\alpha = 10^\circ$, $M_\infty = 20$, $\gamma = 1,4$. Светлые и темные точки соответствуют результатам пересчета по формуле (3). Сплошные линии отвечают $m_0 = 0,65$, штриховые — $m_0 = 0,55$.

Видно, что расчет АХ на основании соотношений (3) позволяет получать оценки составляющих аэродинамической силы, весьма близкие к результатам точных расчетов сверхзвукового обтекания совершенным газом. Этот вывод распространяется также на случаи обтекания равновесно и неравновесно диссоциирующим воздухом. Для реальных течений газа подтверждается независимость коэффициентов β_v от условий обтекания, угла атаки, а также от того, какая именно составляющая аэродинамической силы рассматривается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е. В., Баранцев Р. Г. Локальный метод аэродинамического расчета в разреженном газе. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 210 с.
2. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Локальные методы в газовой динамике. — В кн.: Аннотации докл. 5-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 79.
3. Динамика разреженного газа. Тр. 6-й Всес. конф. Новосибирск: Изд-е Ин-та теплофиз. СО АН СССР, 1980. Ч. I. 175 с. Ч. II. 208 с.
4. Бунимович А. И., Чистолитов В. Г. Аналитический метод расчета аэродинамических сил в пространственной задаче в условиях «законы локальности». — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 467—472.
5. Дубинский А. В. Соотношения между силами, действующими на различные по форме тела, движущиеся в газе. — ПММ, 1981, т. 44, вып. 1, с. 179—181.
6. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
7. Айтонец А. В. Расчет пространственного сверхзвукового обтекания затупленных тел с изломами образующей с учетом равновесного и замороженного состояния газа в ударном слое. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2, с. 178—181.

Москва

Поступила в редакцию
8.1.1982

УДК 539.375

РАВНОВЕСИЕ РАЗРЕЗА ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕРЕГОВ

Житников Ю. В., Тулинов Б. М.

Рассматривается равновесие разреза по дуге окружности в случае двухосного растяжения — сжатия. При таком напряженном состоянии вдоль разреза образуется свободная поверхность, а в области контакта, при наличии сил трения; — зона сцепления и взаимных смещений. В этом случае на границах зоны контакта и свободной поверхности, а также зоны сцепления и взаимных смещений, строится несингулярное решение.

Ранее [1—3] рассматривались задачи с учетом как свободной поверхности, так и области контакта. Найдено [4] решение для разреза по дуге окружности в сложнопластическом состоянии в случае взаимодействия берегов на протяжении разреза с учетом образования зон сцепления и взаимных смещений.

1. Рассмотрим разрез по дуге окружности единичного радиуса. Уравнение разреза в системе координат x, y имеет вид $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $\alpha_0 \leq \theta \leq \beta_0$ (α_0, β_0 — координаты границы разреза).

На бесконечности действуют во взаимно перпендикулярных направлениях напряжения p, q ($p \leq 0, q \geq 0$), причем p направлено под углом γ к оси Ox . Напряженное состояние будем описывать комплексными потенциалами Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z), \Psi(z)$ [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\Phi(z) + \Phi^*(z)] \\ \sigma_r + i\tau_{r\theta} &= \Phi(z) + \Omega\left(\frac{1}{z^*}\right) + z^*\left(z^* - \frac{1}{z}\right)\Psi^*(z) \\ 2G(u' + iv') &= iz\left[\nu\Phi(z) - \Omega\left(\frac{1}{z^*}\right) - z^*\left(z^* - \frac{1}{z}\right)\Psi^*(z)\right] \\ \Omega(z) &= \Phi^*\left(\frac{1}{z^*}\right) - \frac{1}{z}\Phi^*\left(\frac{1}{z^*}\right) - \frac{1}{z^2}\Psi^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \\ u' &= \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Здесь $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ — для обобщенного плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, u, v — компоненты смещения вдоль осей Ox и Oy соответственно, $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений в полярной системе координат с вершиной в точке O .

Компоненты смещения в прямоугольной системе координат и в полярной v_r, v_θ связаны следующим образом:

$$(1.2) \quad u + iv = (v_r + iv_\theta) e^{i\theta}$$

Между потенциалами $\Phi(z), \Omega(z)$ должно иметь место соотношение [1]

$$(1.3) \quad \Phi(0) = \Omega^*(\infty)$$

Комплексные потенциалы имеют следующую асимптотику:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} |z| \rightarrow \infty, \quad \Phi(z) &= \Gamma, \quad \Psi(z) = \Gamma', \quad \Omega(z) = -\Gamma^*/z^2 \\ \Gamma &= (p + q)/4, \quad \Gamma' = -1/2(p - q)e^{-2i\gamma}, \quad |p| \geq |q| \end{aligned}$$

Будем считать, что вдоль разреза возникает только одна область свободной поверхности — обозначим ее L_1 (например, при $0 \leq \theta - \gamma \leq \pi$). В отсутствие сил трения область взаимных смещений (обозначим ее L) занимает весь разрез, а при их наличии к свободной поверхности примыкает зона взаимных сдвиговых смещений (обозначим ее L_2), которая в общем случае граничит с зоной сцепления. Поскольку в зоне сцепления взаимных смещений не возникает, то ее будем рассматривать как континуум, а краевое условие по сдвигу будем ставить в области взаимных смещений.

2. Рассмотрим случай отсутствия сил трения в области контакта берегов разреза. Граничные условия на разрезе в этом случае имеют вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tau_{r\theta}^\pm &= 0, \quad r \rightarrow R \pm 0; \quad t \in L, \quad \sigma_r^\pm = 0, \quad t = L_1 \\ v_r^+ - v_r^- &= 0, \quad t \in L_2 \quad (t = e^{i\theta}, \quad \alpha_0 \leq \theta \leq \beta_0) \end{aligned}$$

Используя соотношения Колосова — Мусхелишвили [1] и условия (2.1), приходим к следующей задаче сопряжения:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi^+ + \Phi^- - (\Phi^{*+} + \Phi^{*-}) + \Omega^+ + \Omega^- - (\Omega^{*+} + \Omega^{*-}) &= 0, \quad t \in L \\ \Phi^+ + \Phi^- + \Phi^{*+} + \Phi^{*-} + \Omega^+ + \Omega^- + \Omega^{*+} + \Omega^{*-} &= 0, \quad t \in L_1 \\ \Phi^+ - \Phi^- - (\Omega^+ - \Omega^-) &= 0, \quad t \in L \\ 2G[(u'^+ - u'^-) + i(v'^+ - v'^-)] &= it[\kappa(\Phi^+ - \Phi^-) + \Omega^+ - \Omega^-], \quad t \in L \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (2.2) в виде [3,5]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\eta(t) dt}{t-z} + \Gamma \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\eta(t) dt}{t-z} + \Gamma - \frac{\Gamma'}{z^2} - D_0, \quad t \in L \end{aligned}$$

где (учитываем (1.2), (1.3))

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \eta &= -\frac{2G}{\kappa + 1} \frac{(u'^+ - u'^-) + i(v'^+ - v'^-)}{t} = -(g_1' + ig_1 - g + ig'), \\ g(\theta) &= \frac{2G}{\kappa + 1} (v_\theta^+ - v_\theta^-) \end{aligned}$$

$$g_1(\theta) = \frac{2G}{\kappa + 1} (v_r^+ - v_r^-)$$

$$D_0 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\eta^* dt}{t} = \frac{1}{2\pi} \left[i \int_L g d\theta - \int_{L_2} g_1 d\theta \right]$$

Интегралы в выражениях (2.3) при $t \rightarrow t_0 \in L$ вычисляются с использованием формулы Сохоцкого — Племеля [6]. При подстановке (2.3) для комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ два последних уравнения будут удовлетворяться тождественно, а первое сводится к сингулярному интегральному уравнению, решение которого имеет вид [6]:

$$(2.5) \quad \eta - \eta^* = iA(t)/x(t)$$

$$A(t) = A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4 + \frac{D_1}{t} + \frac{D_2}{t^2} + C$$

$$A_1 = -\Gamma', \quad A_2 = -A_1 \frac{a+b}{2}, \quad A_3 = -\frac{(a-b)^2}{8} A_1 + B,$$

$$A_4 = -B \frac{a+b}{2} - \frac{(a+b)(a-b)^2}{16} A_1, \quad D_1 = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \Gamma'^*,$$

$$D_2 = -\Gamma'^* \sqrt{ab}, \quad B = -(D_0 + D_0^*)$$

Домножим обе части уравнения (2.5) на $1/t$ ($t \in L$) и проинтегрируем по разрезу, после чего приходим к соотношению

$$(2.6) \quad C = -A_4 + A_3^* \sqrt{ab}$$

Подставляя выражение для функции $\eta(t)$ (2.4) и используя соотношение (2.6), приходим к дифференциальному уравнению, решение которого имеет вид

$$(2.7) \quad h = 0, t \in L_2; h = 1, t \in L_1$$

$$g(\theta) = \left(F_1 t + F_2 + \frac{F_3}{t} + \frac{F_4}{t^2} \right) \frac{X(t)}{2} + s + h \int_{\theta}^{\beta_1} g_1(\theta) d\theta$$

$$F_1 = -\frac{A_1}{2i}, \quad F_2 = F_1 \frac{a+b}{2}, \quad F_3 = F_4 \frac{a+b}{2ab}, \quad F_4 = F_1^* / \sqrt{ab}$$

$$s = -B f_1, \quad f_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{4} \right) \sin^{-1} \left(\frac{\beta - \alpha}{4} \right) \right)$$

α_1, β_1 — неизвестные границы свободной поверхности ($\alpha_1 \leq \beta_1$).

Подставляя (2.3) во второе уравнение (2.2), приходим к сингулярному интегральному уравнению, решение которого с использованием формулы перестановки Пуанкаре — Бертрана [6] имеет вид

$$(2.8) \quad g_1 - \int_{\theta}^{\beta_1} g_1 d\theta = \frac{iR(t)}{x_1(t)} + s(t) - \frac{i}{\pi x_1} \int_{L_2} \frac{s x_1 dt_1}{t_1 - t} - \frac{i}{\pi x_1} \int_L s dt, \quad t \in L_1$$

$$R(t) = R_1 t^3 + R_2 t^2 + R_3 t + R_4 + \frac{M_1}{t} + \frac{M_2}{t^2} + C_1$$

$$R_1 = -\frac{3\Gamma'}{4}, \quad R_2 = -R_1 \frac{d+f}{2}, \quad R_3 = -\frac{(d-f)^2}{8} R_1 + B_1$$

$$R_4 = -\left(R_1 \frac{(d-f)^2}{8} + B_1 \right) \frac{d+f}{2}$$

$$B_1 = \frac{\Gamma'^*(a+b)}{8ab\sqrt{ab}} + \frac{\Gamma'(3a^2 + 2ab + 3b^2)}{32} - \frac{3D_0}{2} - \frac{D_0^*}{2} + 2\Gamma$$

$$M_1 = -\frac{(d+f)3\Gamma'^*}{8\sqrt{df}}, \quad M_2 = \frac{3\Gamma'^*}{4} \sqrt{df}; \quad x_1 = \sqrt{(z-d)(z-f)}$$

$$d = e^{i\alpha_1}, \quad f = e^{i\beta_1}$$

Домножим обе части (2.8) на $1/t$ ($t \in L_1$) и проинтегрируем по L_1 , после чего получим

$$(2.9) \quad C_1 = -R_4 - R_3^* \sqrt{df} - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{s x_1}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_L s dt$$

В уравнения (2.7), (2.8) входит неизвестная постоянная D_0 . Для ее определения

заметим, что постоянные C и C_1 связаны соотношением

$$(2.10) \quad C_1 = \frac{C}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left(F_1 t + F_2 + \frac{F_3}{t} + \frac{F_4}{t^2} \right) x(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_L s dt$$

Используя (2.6), (2.9), (2.10), получим

$$(2.11) \quad D_0 = (z_1^* l - z_1 k^*) / (ll^* - kk^*)$$

$$z_1 = \frac{\Gamma'}{16} ((3a^2 + 2ab + 3b^2)(d+f) - 8(a+b)\sqrt{ab}\sqrt{df} - 3(d+f)(d-f)^2) + \frac{\Gamma'^*}{8} \left(\frac{2(d+f)(a+b)}{ab\sqrt{ab}} - \frac{3(d-f)^2}{df\sqrt{df}} - \frac{(3a^2 + 2ab + 3b^2)}{a^2 b^2} \sqrt{df} \right) + 4\Gamma(\sqrt{d} - \sqrt{f})^2, \quad k = 3(d+f) - 2\sqrt{df} - r_1$$

$$l = d + f - 6\sqrt{df} - r_1, \quad r_1 = -\frac{4}{\pi} \int_L \frac{f_1 x_1}{t} dt + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

В общем случае выражения (2.8) с учетом (2.10), (2.11) определяют сингулярное решение в точках $t = d$, $t = f$, характеризуемое коэффициентами интенсивности [5]

$$(2.12) \quad K_1^+ = \lim_{\theta \rightarrow \beta_1} \sqrt{2(\beta_1 - \theta)} |g_1'(\theta)|; \quad K_1^- = \lim_{\theta \rightarrow \alpha_1} \sqrt{2(\theta - \alpha_1)} |g_1'(\theta)|$$

В силу того что сингулярные нормальные напряжения на разрезе в окрестности границы области свободной поверхности всегда приведут к вспарыванию зажатого участка трещины, на этой границе будет строиться несингулярное решение. Аналогично критерию, использованному в [2,3], условием равновесия является равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений

$$(2.13) \quad R(t) = 0$$

Уравнение (2.13) определяет неизвестные границы зоны свободной поверхности и контакта. Если оба корня уравнения находятся внутри разреза ($\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$), то зона контакта примыкает к правой и левой вершинам трещины исходного разреза, если же один из корней лежит вне разреза, то возникает область свободной поверхности, примыкающая к одной из вершин трещины.

Таким образом, уравнение (2.12) и выражения (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) определяют напряженное состояние твердого тела, ослабленного плоской дугообразной трещиной.

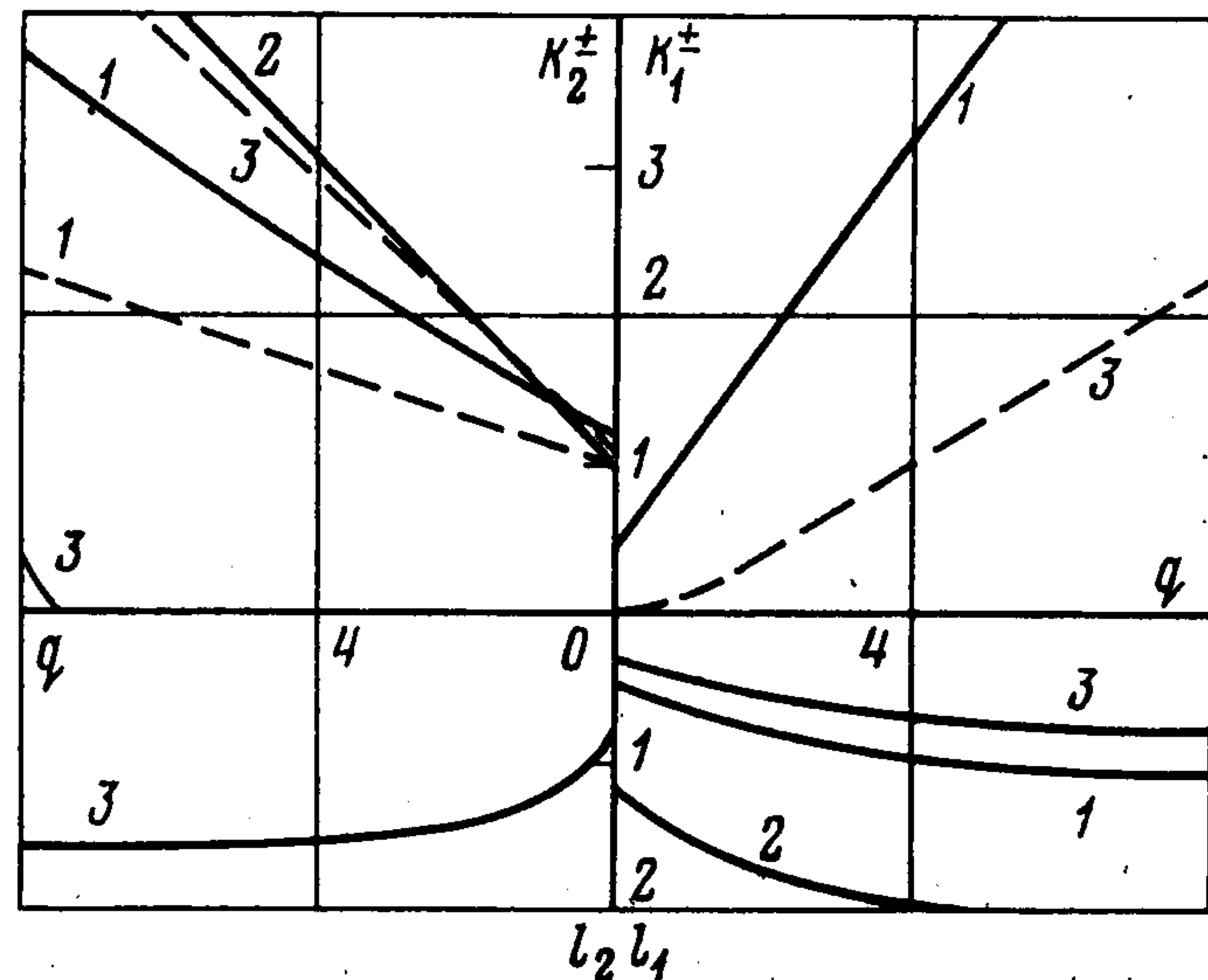
На фигуре изображен график зависимости коэффициентов интенсивности K_1^+ , K_1^- , K_2^+ , K_2^- (сплошные кривые — величины с индексом плюс, штриховые — с индексом минус) напряжений в конце трещины и длины области свободной поверхности от напряжений p, q ($p = -5$), в случае, когда разрез расположен в области $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $\gamma = 0$ (кривые 1) и в области $0 \leq \theta \leq \pi$, $\gamma = 0$ (кривые 2), при $\mu = 0,4$.

3. Рассмотрим теперь случай, когда между берегами трещины в области контакта действуют силы трения. Будем считать, что дугообразный разрез расположен в области, вдоль которой имеет место только одна зона взаимных смещений, вдоль которой сдвиговые напряжения не меняют свой знак (например, $\pi/2 \leq \theta - \gamma \leq \pi$). Граничные условия в этом случае имеют вид

$$(3.1) \quad \tau_{r\theta}^\pm = \rho \sigma_r^\pm, \quad r \rightarrow R \pm 0, \quad t \in L_2, \quad \sigma_r^\pm = 0, \quad t \in L_1$$

$$v_r^+ - v_r^- = 0, \quad t \in L_2 \quad (t = e^{i\theta}, \quad \alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \theta \leq \beta_2 \leq \beta_0)$$

$\rho = \pm \mu$, μ — коэффициент трения, знак плюс или минус может быть определен из направления сдвиговых напряжений, возникающих на месте разреза в сплошном теле (например в случае, $\pi/2 \leq \theta - \gamma \leq \pi$ имеем $\tau_{r\theta}^\pm = \mu \sigma_r^\pm$, а при $0 \leq \theta - \gamma \leq \pi/2$ будет $\tau_{r\theta}^\pm = -\mu \sigma_r^\pm$), α_2, β_2 — неизвестные пока границы области взаимных смещений.



Используя соотношения (1.1), (3.1), приходим к следующей задаче сопряжений:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} &(\Phi^+ + \Phi^-) (\rho + i) + (\Phi^{+*} + \Phi^{-*}) (\rho - i) + (\Omega^+ + \Omega^-) (\rho + i) + \\ &+ (\Omega^{+*} + \Omega^{-*}) (\rho - i) = 0, \quad t \in L \\ &\Phi^+ + \Phi^- + \Phi^{+*} + \Phi^{-*} + \Omega^{+*} + \Omega^{-*} + \Omega^+ + \Omega^- = 0, \quad t \in L_1 \\ &\Phi^+ - \Phi^- - (\Omega^+ - \Omega^-) = 0, \quad t \in L \\ &2G [(u'^+ - u'^-) + i (v'^+ - v'^-)] = it (\kappa (\Phi^+ - \Phi^-) + (\Omega^+ - \Omega^-)), \\ &t \in L \end{aligned}$$

Решение системы (3.2) будем искать в виде (2.3), подстановка которого в первое уравнение системы (3.2) приводит к следующему сингулярному уравнению [6]:

$$\int_L \frac{\eta (\rho + i) + \eta^* (\rho - i)}{t - t_0} dt = \pi p (t_0), \quad p (t) = \frac{\Gamma'^*}{t^2} (\rho + i) + \\ + \Gamma' t^2 (\rho - i) - 4\Gamma\rho + D_0 (3\rho - i) + D_0^* (\rho - i)$$

Решение этого уравнения имеет вид [6]

$$(3.3) \quad \eta (\rho + i) + \eta^* (\rho - i) = - \frac{1}{\pi x (t_0)} \int_L \frac{x (t) p (t) dt}{t - t_0} + \frac{Ci}{x (t_0)} \\ C = (1 - i\rho) \int_L \eta^* dt, \quad x (t) = \sqrt{(t - a) (t - b)}, \quad a = e^{i\alpha_2}, \quad b = e^{i\beta_2}$$

Вычисляя значение интеграла в правой части уравнения (3.3), приходим к выражению

$$(3.4) \quad \eta (\rho + i) + \eta^* (\rho - i) = i \frac{A (t)}{x (t)} \\ A (t) = A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4 + C + \frac{D_1}{t} + \frac{D_2}{t^2} \\ A_1 = \Gamma' (\rho - i), \quad A_2 = -A_1 \frac{(a + b)}{2}, \quad A_3 = -\frac{(a - b)^2 A_1}{8} + B \\ B = D_0 (3\rho - i) + D_0^* (\rho - i) + 4\Gamma\rho, \quad A_4 = -B \frac{a + b}{2} - \\ - \frac{(a + b) (a - b)^2}{16} A_1, \quad D_1 = -A_2^* \sqrt{ab}, \quad D_2 = -A_1^* \sqrt{ab}$$

Выражение для C получается аналогично (2.6)

$$(3.5) \quad C = -A_4 - A_3^* \sqrt{ab}$$

Подставляя выражение для функции $\eta (t)$ в (3.4) и используя (3.5), приходим к дифференциальному уравнению, решение которого имеет вид

$$(3.6) \quad h = 0, \quad t \in L_2; \quad h = 1, \quad t \in L_1 \\ g (\theta) = \left(F_1 t + F_2 + \frac{F_3}{t} + \frac{F_4}{t^2} \right) \frac{x (t)}{2} + s (t) + h e^{-\rho\theta} \int_0^{\beta_1} (g_1 - \rho g_1') e^{\rho\theta} d\theta \\ F_1 = \frac{iA_1}{\rho + 2i}, \quad F_2 = \frac{iA_1 (a + b)}{2(\rho + 2i)}, \quad F_3 = \frac{F_2^*}{\sqrt{ab}}, \quad F_4 = \frac{F_1^*}{\sqrt{ab}} \\ s (t) = e^{-\rho\theta} \int_0^{\beta_1} \frac{e^{\rho\theta} (K_1 t + K_2)}{2x (t)} d\theta \\ K_1 = iA_3 - abF_1 (\rho + i) + F_2 (a + b) \left(\rho + \frac{i}{2} \right) - F_3 \rho, \quad K_2 = \frac{K_1^*}{\sqrt{ab}}$$

(α_1, β_1 — границы свободной поверхности).

Подставляя выражение (2.3) во второе уравнение (3.2) и используя решение (3.6), приходим к сингулярному интегральному уравнению, решение которого аналогично (2.8) имеет вид

$$(3.7) \quad g_1' - e^{-\rho\theta} \int_0^{\beta_1} e^{\rho\theta} (g_1 - \rho g_1') d\theta = \frac{iR (t)}{x_1 (t)} + s (t) - \\ - \frac{i}{\pi x_1 (t)} \int_{L_2} \frac{t x_1 s dt_1}{t_1 (t_1 - t)}, \quad t \in L_1, \quad R (t) = R_1 t^3 + R_2 t^2 + R_3 t - \\ - R_3^* \sqrt{df} + \frac{M_1}{t} + \frac{M_2}{t^2}, \quad R_1 = -\frac{3\Gamma'i}{2(\rho + 2i)}$$

$$R_2 = -R_1 \frac{d+f}{2}, \quad R_3 = -R_1 \frac{(d-f)^2}{8} + B_1,$$

$$R_4 = \left(-R_1 \frac{(d-f)^2}{8} - B_1 \right) \frac{d+f}{2}, \quad M_1 = -R_2^* \sqrt{df},$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma^* (\rho+i) (a+b)}{4ab\sqrt{ab} (\rho-2i)} - \frac{\Gamma (\rho-i) (3a^2 + 2ab + 3b^2)}{\rho+2i} \frac{1}{16} - \frac{3D_0}{2} - \frac{D_0^*}{2} + 2\Gamma$$

$$M_2 = -R_1^* \sqrt{df}, \quad x_1(z) = \sqrt{(z-d)(z-f)}, \quad d = e^{i\beta_1}, \quad f = e^{i\alpha_1}$$

Для определения постоянной D_0 заметим, что C и C_1 связаны соотношением

$$(3.8) \quad C_1 = -\frac{C}{2(\rho-i)} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left(F_1 t + F_2 + \frac{F_3}{t} + \frac{F_4}{t^2} \right) x(t) dt + \frac{1}{\pi} \int s dt$$

Используя (3.5), (3.6), (3.8), получим

$$(3.9) \quad D_0 = (z_1^* l - z_1 k^*) / (ll^* - kk^*)$$

$$z_1 = \frac{\Gamma'}{8} \left(-\frac{3i(d+f)(d-f)^2}{(\rho+2i)} - \frac{(\rho-i)}{(\rho+2i)} (3a^2 + 2ab + 3b^2)(d+f) + \frac{8(\rho-i)(a+b)\sqrt{ab}\sqrt{df}}{(\rho+2i)} + \frac{3(a+b)(a-b)^2\rho}{(\rho+2i)} \right) +$$

$$+ \frac{\Gamma^*}{4} \left(-\frac{2(a+b)(d+f)(\rho+i)}{ab\sqrt{ab}(\rho-2i)} - \frac{3i(d-f)^2}{(\rho-2i)\sqrt{df}df} + \frac{(\rho+i)}{\rho-2i} \frac{(3a^2 + 2ab + 3b^2)}{a^2b^2} \sqrt{df} - \frac{(a-b)^2(\rho+i)\rho}{ab\sqrt{ab}(\rho-i)(\rho-2i)} \right) +$$

$$+ 4\Gamma(\sqrt{d} - \sqrt{f})^2 + \frac{\Gamma\rho(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\rho-i} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{(s_1 G_1 + s_1^* G_1^*)}{t} x(t) dt$$

$$k = 3(d+f) - 2\sqrt{df} - \frac{(3\rho-i)}{\rho-i} (a+b) + \frac{2\sqrt{ab}(\rho+i)}{\rho-i} + Q_1$$

$$l = d+f - 6\sqrt{df} + \frac{2(3\rho+i)}{\rho-i} \sqrt{ab} - (a+b) + Q_2$$

$$s_1 = e^{\rho\theta} \int_0^{\beta_2} \frac{e^{\rho\theta'} t}{x(t)} dt, \quad G_1 = -\frac{i(a-b)^2}{8} A_1 - abF_1(\rho+i) +$$

$$+ F_2(a+b) \left(\rho + \frac{i}{2} \right) - F_3\rho,$$

$$Q_1 = i \int_{L_2} \frac{(c_1(3\rho-i) - c_1^*(\rho+i))}{t} x(t) dt$$

$$Q_2 = -i \int_{L_2} \frac{(c_1(\rho-i) - (3\rho+i)c_1^*)}{t} x(t) dt$$

В общем случае выражения (3.6), (3.7), (3.9) определяют сингулярное решение в точках $\theta = \beta_1$, $\theta = \alpha_1$, $\theta = \beta_2$, $\theta = \alpha_2$, характеризуемое коэффициентами интенсивности напряжений [5]

$$(3.10) \quad K_1^- = \lim_{\theta \rightarrow \alpha_1} \sqrt{2(\theta - \alpha_1)} |g'(\theta)|, \quad K_2^- = \lim_{\theta \rightarrow \alpha_2} \sqrt{2(\theta - \alpha_2)} |g_1'(\theta)|$$

$$K_1^+ = \lim_{\theta \rightarrow \beta_1} \sqrt{2(\beta_1 - \theta)} |g'(\theta)|, \quad K_2^+ = \lim_{\theta \rightarrow \beta_2} \sqrt{2(\beta_2 - \theta)} |g_1'(\theta)|$$

Граница свободной поверхности и области контакта будет определяться уравнением (2.13). Так как сингулярные сдвиговые напряжения на разрезе в окрестности границы области взаимных смещений всегда приведут к вспарыванию зажатого участка трещины, поэтому на границе зоны сцепления и взаимных смещений будет строиться несингулярное решение. Аналогично [4] условием равновесия будет равенство нулю коэффициента интенсивности напряжений

$$(3.11) \quad A(t) = 0$$

Уравнение (3.11) с учетом (3.5) определит неизвестные границы зоны сцепления и взаимных смещений. Если оба корня этого уравнения находятся внутри разреза.

($\alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \beta_0$), то построенное решение будет сингулярно вблизи одной вершины, к другой же вершине будет примыкать область сцепления.

В качестве примера рассмотрим разрез, расположенный в области $\pi \leq \theta \leq \pi/2$, $\gamma = 0$. В этом случае в выражении (3.1) $\rho = \mu$. На фигуре представлен график зависимости коэффициентов интенсивности напряжений и длин областей свободной поверхности и взаимных сдвиговых смещений от напряжения (сплошная кривая соответствует правой, а штриховая — левой вершинам трещины) при $\mu = 0,4$, $p = -10$, $l_1 = \beta_1 - \alpha_1$, $l_2 = \beta_2 - \alpha_2$ (кривые 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1966. 246 с.
3. Саврук М. П. Контактная задача теории упругости для бесконечной плоскости с криволинейным разрезом.— Физ.-хим. мех. материалов, 1981, т. 17, № 1, с. 67—71.
4. Житников Ю. В., Тулинов Б. М. Равновесие разреза по дуге окружности в сложно-напряженном состоянии.— ПММ, 1982, т. 46, № 3, с. 521—524.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.IV.1982

Технический редактор В. М. Пахомова

Сдано в набор 25.07.83 Подписано к печати 14.09.83 Т-015143 Формат бумаги 70×108^{1/16}
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 35,2 тыс. Уч.-изд. л. 15,2 Бум. л. 5,5
Тираж 2262 экз. Зак. 3049

Издательство «Наука», 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10