УДК 532.5

ЭВОЛЮЦИЯ КОНТАКТНОГО РАЗРЫВА В БАРОТРОПНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА

Шелухин В. В.

Устанавливается однозначная разрешимость в целом по времени начально-краевой задачи с разрывными данными для уравнений одномерного баротропного течения вязкого политропного газа и исследуется поведение решения при неограниченном возрастании времени, при этом линия контактного разрыва моделируется траекторией поршня с малой массой, помещенного между двумя газами. В частности, если разрыв разделяет один и тот же газ, показывается, что разрыв давления может исчезнуть лишь при неограниченном возрастании времени, причем уменьшение разрыва следует экспоненциальному закону.

Пусть в начальный момент $t = 0$ область $-1 < \xi < 0$ занята газом с вязкостью μ_1 и уравнением состояния $p_1 = a_1\rho^{\gamma_1}$, а область $0 < \xi < 1$ занята газом с соответствующими характеристиками μ_2 и $p_2 = a_2\rho^{\gamma_2}$. Здесь μ_i, a_i, $\gamma_i > 1$ $(i = 1, 2)$ — положительные постоянные, p — давление, ρ — плотность. В дальнейшем скорость обозначается через u.

Поведение среды в области $-1 < \xi < 1$ при $t > 0$ описывается следующим образом. Движение каждого из газов вне линии контактного разрыва $\xi = C(t)$, $C(0) = 0$ определяется уравнениями

(1) $$\rho(u_t + uu_\xi) = \mu u_{\xi\xi} - p_\xi,\ \rho_t + (\rho u)_\xi = 0$$

Условия контактного разрыва на неизвестной линии $\xi = C(t)$ имеют вид

(2) $$[u] = [\mu u_\xi - p] = 0,\ C'(t) = u\ \ ([u] = u(C(t) + 0, t) - u(C(t) - 0, t))$$

Далее, будем считать, что в точках $\xi = -1$, $\xi = 1$ выполняются условия прилипания

(3) $$u(-1, t) = u(1, t) = 0$$

Функции $u_0(\xi)$, $\rho_0(\xi)$, задающие начальные данные

(4) $$u(\xi, 0) = u_0(\xi),\ \rho(\xi, 0) = \rho_0(\xi)$$

предполагаются гладкими при $\xi \neq 0$, в точке $\xi = 0$ непрерывность функций ρ_0, p_0 не требуется.

Задачу (1) — (4) удобно решать в массовых лагранжевых переменных

$$x(\xi, t) = \int\limits_{C(t)}^{\xi} \rho(y, t)\, dy$$

в которых линия контактного разрыва становится известной и имеет вид $x = 0$.

Введем обозначения

$$\Omega_1 = \{x:\ -h_1 < x < 0\},\ \ \Omega_2 = \{x:\ 0 < x < h_2\}$$
$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \ Q_{iT} = \Omega_i \times (0, T),\ \ \Gamma = \{x, t : x = 0,\ t \geqslant 0\}$$
$$h_i = \left|\int\limits_0^{(-1)^i} \rho_0(\xi)\, d\xi\right|,\ v = \rho^{-1},\ \sigma = \mu\rho u_x - p,\ p = a\rho^\gamma$$

Здесь $\mu(x)$, $\gamma(x)$, $a(x)$ — кусочно-постоянные функции, принимающие в областях Ω_1, Ω_2 значения μ_1, γ_1, a_1 и μ_2, γ_2, a_2 соответственно.

В новых переменных исходная задача (1) — (4) записывается как начально-краевая в области $\Omega \times (t > 0)$ для уравнений с разрывными коэффициентами и начальными данными

(5) $$u_t = \sigma_x,\ v_t = u_x;\ [u]_\Gamma = [\sigma]_\Gamma = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0$$
$$u(x, 0) = u_0(x),\ v(x, 0) = v_0(x)$$

Приведем основные результаты, используя обозначения функциональных пространств, принятые в [1].

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) $u_0 \in H^{2+\nu}(\overline{\Omega}_i)$, $v_0 \in H^{1+\nu}(\overline{\Omega}_i)$; u_0, $\sigma_0 \in C(\overline{\Omega})$; $0 < \nu < 1$;

2) $\inf_\Omega v_0 > 0$, $\sup_\Omega v_0 < \infty$; 3) $\sigma_{0x}|_{\partial\Omega} = 0$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (5) в целом по времени и оно обладает свойствами

$$u \in H^{2+\nu,\,1+\nu/2}(\overline{Q}_{iT}),\ v \in H^{1+\nu,\,1+\nu/2}(\overline{Q}_{iT}),\ \forall T > 0$$

где функция v строго положительная и ограниченная.

Теорема 2. При неограниченном возрастании времени решение задачи (5) стабилизируется, т. е. сходится к стационарному решению $u = 0$, $p = p_\infty$ в следующем смысле:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\sum_1^2 (\|u\|_{W_2^1(\Omega_i)} + \|p - p_\infty\|_{C^1(\Omega_i)}) + |[p]_\Gamma|\right\} = 0$$

Постоянная p_∞ находится из соотношения

$$h_1(p_\infty a_1^{-1})^{\varkappa_1} + h_2(p_\infty a_2^{-1})^{\varkappa_2} = \int_\Omega v_0\,dx \equiv \beta, \quad \varkappa = -\gamma^{1}$$

В случае, когда $\gamma_1\mu_1^{-1} = \gamma_2\mu_2^{-1}$ и $p_0(0+0) \neq p_0(0-0)$, существуют положительные постоянные c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, не зависящие от t, такие, что

$$c_1 \exp(-c_2 t) \leqslant |[p]_\Gamma| \leqslant c_3 \exp(-c_4 t)$$

Опишем кратко схему доказательства этих утверждений. Решение задачи (5) строится как предел при $m \to 0$ решения задачи (задача А), аналогичной (5), где условия контактного разрыва на линии Г заменены на

$$[u]_\Gamma = 0,\ mU_t = [\sigma]_\Gamma\ (U(t) = u(0, t))$$

При каждом фиксированном $m > 0$ задача А описывает движение свободного поршня массы m, разделяющего два газа.

Задача А исследована в [2], и для нее справедлива теорема 1. Предельный переход совершается на основании не зависящих от m оценок решения в нормах гельдеровских пространств и теорем вложения. При получении оценок используется методика работы [2].

В основе доказательства теоремы 2 о стабилизации лежат оценки решения задачи (5), равномерные по времени. Среди них центральными являются оценки на плотность сверху и снизу; они выводятся при помощи законов сохранения энергии и массы

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{\gamma-1}pv\right)dx + \int_\Omega \mu\rho u_x^2\,dx = 0, \quad \frac{d}{dt}\int_\Omega v\,dx = 0$$

из следующего соотношения:

$$p = \frac{\mu}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(1 + \int_0^t E(x,\tau)\,d\tau\right)$$

$$E(x,t) = \frac{\gamma}{\mu}p_0(x)\exp\left\{\frac{\gamma}{\mu\beta}\left[\int_0^t\int_\Omega (u^2 + pv)\,dx\,d\tau + B(x,t)\right]\right\}$$

$$B(x,t) = [\mu]\int_0^t U\,d\tau - \int_\Omega v(y,t)\int_y^x u(z,t)\,dz\,dy - \int_\Omega v_0(x)\int_0^x u_0(y)\,dy\,dx + \beta\int_0^x u_0(y)\,dy$$

Имея равномерные по времени оценки для плотности, все остальные необходимые оценки, а также и асимптотику по времени можно получить следуя схеме рассуждений, принятой в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
2. *Шелухин В. В.* Однозначная разрешимость задачи о движении поршня в вязком газе.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 31. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1977, с. 132—150.

3. *Шелухин В. В.* Стабилизация решения одной модельной задачи о движении поршня в вязком газе.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 33. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1978, с. 134—146.

Новосибирск

Поступила в редакцию 10.III.1982

УДК 533.69

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЛ НА ОСНОВЕ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Антонец А. В., Дубинский А. В.

Доказывается существование соотношений между аэродинамическими характеристиками (АХ) различных по форме тел вращения, инвариантных относительно модели обтекания и угла атаки. На этой основе развивается метод расчета АХ, рассматривается пример его использования для тел со степенной формой образующей, дается сравнение с результатами «точных» численных расчетов.

В рамках моделей локального взаимодействия ([1—4] и др.) местное силовое воздействие потока в каждой точке поверхности тела зависит лишь от местного угла атаки и параметров, характеризующих процесс обтекания «в целом». Такие модели эффективно применяются к широкому кругу режимов обтекания (свободномолекулярный режим, гиперзвуковые течения плотного и разреженного газа, обтекание световым потоком, промежуточная область течения разреженного газа). Однако существующие методы аэродинамического расчета ([1,4] и др.) предусматривают знание конкретной модели локального взаимодействия.

Пусть уравнение поверхности выпуклого тела вращения в связанной с телом системе координат $x\varphi r$ задается функцией $r(x)$, ось Ox направлена вдоль оси тела. Выражение для коэффициента проекции аэродинамической силы $\mathbf{R}$ на некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\mathbf{l}$, можно представить в виде

$$(1)\qquad C_l=\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{l}}{qS_k}=\frac{1}{S_k}\int\limits_0^{r_k}\int\limits_0^{2\pi}F_l\left(\alpha,\varphi,\frac{dr}{dx}\right)d\varphi\cdot r\,dr=$$

$$=\int\limits_{u_-}^{u_+}\Phi_l(\alpha,u^{-1})\frac{d}{du}\left(\frac{r}{r_k}\right)^2du,\quad q=\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}$$

где q — скоростной напор, α — угол атаки, S_k, r_k — площадь и радиус миделевого поперечного сечения; функции F_l, Φ_l зависят от указанных аргументов и модели обтекания, $u=dx/dr$ — котангенс угла наклона контура тела к его оси, пробегающий значения от u_- до u_+.

Рассмотрим $n+1$ тел, у которых угол наклона образующей к оси изменяется в одинаковых пределах; индекс ν будет указывать на номер тела. Тогда, если функции $r_\nu(u)$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$ удовлетворяют условию

$$(2)\qquad \left(\frac{r_0}{r_{k0}}\right)^2-\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\left(\frac{r_\nu}{r_{k\nu}}\right)^2=C$$

то из (1) следует, что их одноименные АХ $C_{l\nu}$ связаны соотношением

$$(3)\qquad C_{l0}=\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu C_{l\nu}$$

Это соотношение инвариантно относительно выбора одинаковой для всех тел функции Φ_l, т. е. справедливо для любой модели локального взаимодействия и, в отличие от случая двух пространственных тел [5], для произвольного угла атаки и любой составляющей аэродинамической силы. Рассматривая тела, образующие которых исходят из начала координат, полагаем $C=0$.