УДК 531.31

О ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА ШАРА, КАТАЮЩЕГОСЯ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Сумбатов А. С.

Рассматривается катание без скольжения однородного шара по неподвижной поверхности. Устанавливаются виды поверхностей и соответствующие им подвижные оси, относительно которых изменение кинетического момента шара описывается таким же дифференциальным уравнением, как если бы оси были неподвижными.

1. Теорема об изменении кинетического момента $\mathbf{K}_A$ механической системы относительно произвольного полюса A имеет вид [1]

$$\mathbf{K}_A^{\cdot} + M\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_G = \sum \mathrm{mom}_A \mathbf{R} + \sum \mathrm{mom}_A \mathbf{F} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}_A$ — скорость точки A в неподвижном пространстве, $M\mathbf{v}_G$ — количество движения тела, правая часть (1.1) представляет сумму главных моментов относительно точки A реакций связей и активных сил, действующих на систему.

Пусть некоторая ось AL постоянно проходит через движущуюся точку A, $\mathbf{e}$ — орт этой оси. Если связи в каждый момент времени допускают виртуальный поворот системы как одного твердого тела вокруг оси AL и выполняется кинематическое условие [2]

$$M(\mathbf{v}_G, \mathbf{v}_A \times \mathbf{e}) + (\mathbf{K}_A, \mathbf{e}^{\cdot}) = 0 \tag{1.2}$$

то из (1.1) следует скалярное уравнение

$$K_{AL}^{\cdot} = \sum \mathrm{mom}_{AL} \mathbf{F} \tag{1.3}$$

которое выражает закон изменения кинетического момента системы относительно оси AL в такой же форме, как если бы ось была неподвижной. Дополнительное условие

$$\Sigma\, \mathrm{mom}_{AL} \mathbf{F} = 0$$

приводит к обобщенному интегралу площадей

$$K_{AL} = (\mathbf{K}_A, \mathbf{e}) = \mathrm{const}$$

Более частные кинематические условия, вместо (1.2), указаны в работах [1, 3].

Заметим, что соотношение (1.2) не зависит от выбора полюса на оси AL. Действительно, пусть P — произвольная точка на оси AL. Имеем

$$\mathbf{AP} = \sigma\mathbf{e}, \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \sigma^{\cdot}\mathbf{e} + \sigma\mathbf{e}^{\cdot}, \quad \mathbf{K}_P = \mathbf{K}_A + M\mathbf{v}_G \times \sigma\mathbf{e}$$

и, следовательно

$$M(\mathbf{v}_G, \mathbf{v}_P \times \mathbf{e}) + (\mathbf{K}_P, \mathbf{e}^{\cdot}) = M(\mathbf{v}_G, \mathbf{v}_A \times \mathbf{e}) + (\mathbf{K}_A, \mathbf{e}^{\cdot})$$

Чтобы иметь закон изменения кинетического момента системы в форме (1.3), необходимо соответственно выбрать полюс и направление оси. Однако как это делать в каждом конкретном случае, неизвестно. Общего правила здесь нет. Обычно в качестве AL берут неподвижную ось ($\mathbf{v}_A = \mathbf{e}^{\cdot} = 0$) или ось Кёнига (т. $A \equiv$ т. G, $\mathbf{e}^{\cdot} = 0$). Условие (1.2) при этом удовлетворяется автоматически, но не всегда среди виртуальных перемещений существует поворот системы как одного твердого тела вокруг выбранной оси, например в классической задаче о катании твердого тела, ограниченного регулярной выпуклой поверхностью, по неподвижному основанию. С другой стороны, в этой задаче связи (отсутствие скольжения) допускают виртуальный поворот тела вокруг произвольной оси AL, проведенной через точку A касания тела с опорной поверхностью, и требуется только определить такое направление оси AL, чтобы кинематическое условие (1.2) выполнялось при всех возможных движениях тела.

Подчеркнем, что для заданного движения системы условие (1.2) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно $\mathbf{e}(t)$, которое, очевидно, всегда имеет решение. Однако движение системы заранее неизвестно, и поэтому разумно предполагать, что искомые положение полюса и направление подвижной оси вполне определяются постоянными параметрами и конфигурацией системы. В задаче о катании тела это означает, что орт оси AL — функция, например, гауссовых координат точки A контакта соприкасающихся поверхностей и угла между одноименными главными направлениями этих поверхностей в точке A.

Ниже рассмотрена задача о катании однородного шара, в которой анализ выбора подвижного направления в указанной постановке проводится полностью. Вопросы интегрируемости уравнений качения однородных шаров изучались в работах [1, 3—8].

2. В ведем обозначения: r — геометрический радиус, ρ — радиус инерции шара, k_1 и k_2 — главные кривизны, u, v — гауссовы координаты опорной поверхности, $AXYZ$ — ее триедр Дарбу [9] с началом в точке A контакта сферической и опорной поверхностей, k_{g1} и k_{g2} — геодезические кривизны линий кривизны последней, (v_1, v_2, 0) — проекции на оси $AXYZ$ скорости полюса A, φ — угол поворота шара вокруг нормали AZ по отношению к трехграннику Дарбу, (α, β, γ) — компоненты в осях $AXYZ$ орта $\mathbf{e}$ оси AL.

В соответствии с известными формулами кинематики качения одной поверхности по другой [1, 7] имеем в осях $AXYZ$ выражения для компонент угловой скорости триедра $AXYZ$

$$\Omega_1 = -k_2v_2,\quad \Omega_2 = k_1v_1,\quad \Omega_3 = k_{g1}v_1 + k_{g2}v_2$$

и угловой скорости шара

$$\omega_1 = -(k_2 + r^{-1})\,v_2,\quad \omega_2 = (k_1 + r^{-1})\,v_1,\quad \omega_3 = \varphi^{\cdot} + k_{g1}v_1 + k_{g2}v_2$$

Из соображений симметрии следует, что $\mathbf{e} = \mathbf{e}\,(u, v)$. Абсолютная скорость поворота оси AL задается компонентами

$$(\mathbf{e}^{\cdot})_1 = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \gamma k_1 - \beta k_{g1}\right)v_1 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \beta k_{g2}\right)v_2$$

$$(\mathbf{e}^{\cdot})_2 = \left(\frac{\partial\beta}{\partial u} + \alpha k_{g1}\right)v_1 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial v} + \gamma k_2 + \alpha k_{g2}\right)v_2$$

$$(\mathbf{e}^{\cdot})_3 = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial u} - \alpha k_1\right)v_1 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial v} - \beta k_2\right)v_2$$

Составив выражение (1.2), получим равенство нулю формы, квадратичной относительно величин v_1, v_2, $\varphi^{\cdot}$, которые при любом взаимном расположении шара и опоры могут принимать произвольные значения. Равенство нулю коэффициентов этой формы дает систему уравнений

$$\partial\beta/\partial u + \alpha k_{g1} = 0,\quad \partial\alpha/\partial v - \beta k_{g2} = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial\gamma/\partial u - \alpha k_1 = 0,\quad \partial\gamma/\partial v - \beta k_2 = 0 \tag{2.2}$$

$$\rho^2(k_2 - k_1)\gamma + (\rho^2 + r^2)\left[(rk_1 + 1)\left(\frac{\partial\beta}{\partial v} + \alpha k_{g2}\right) - (rk_2 + 1)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \beta k_{g1}\right)\right] = 0 \tag{2.3}$$

Присоединим еще два уравнения

$$\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \beta k_{g1}\right) + \alpha\gamma k_1 = 0,\qquad \beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial v} + \alpha k_{g2}\right) + \beta\gamma k_2 = 0 \tag{2.4}$$

полученные дифференцированием соответственно по u, v тождества

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{2.5}$$

с использованием уравнений (2.1) и (2.2). Система уравнений (2.1) — (2.5) служит для определения неизвестных функций α, β, γ.

Исключив из уравнений (2.3), (2.4) величины

$$\partial\alpha/\partial u - \beta k_{g1},\quad \partial\beta/\partial v + \alpha k_{g2}$$

получим $\alpha\beta\gamma\,(k_2 - k_1) = 0$. Если $k_2 = k_1$ в окрестности точки A на опорной поверхности, то эта окрестность сферическая [10], условию (1.2) удовлетворяет ось постоянного направления [3]. В противном случае $\alpha\beta\gamma = 0$. Разберем последовательно все вытекающие отсюда возможности в предположении, что условия перечисленных ниже случаев выполняются в некоторой окрестности точки A на опорной поверхности.

Пусть $\alpha = \beta = 0$. Тогда, согласно (2.3), $k_2 = k_1$, опорная поверхность — сфера, ось AL — общая нормаль соприкасающихся сферических поверхностей.

Пусть $\beta = \gamma = 0$ (случай $\alpha = \gamma = 0$ аналогичен). Из уравнений (2.1) — (2.3) следует, что $k_{g1} = k_{g2} = k_1 = 0$, опорная поверхность произвольная цилиндрическая, ось AL направлена вдоль ее образующей.

Пусть $\gamma = 0$, $\alpha\beta \not\equiv 0$. Согласно (2.2), находим, $k_1 = k_2 = 0$, опорная поверхность — плоскость.

В указанных случаях условию (1.2) можно удовлетворить выбором оси AL, которая поступательно перемещается в неподвижном пространстве, а геометрические характеристики опорной поверхности никак не связаны с параметрами катающегося по ней шара. Разберем последнюю возможность.

Пусть $\alpha = 0$, $\beta\gamma \not\equiv 0$ (случай $\beta = 0$, $\alpha\gamma \not\equiv 0$ аналогичен). Из уравнений (2.1), (2.2) и тождества (2.5) следует

(2.6) $$\beta = \cos f,\ \gamma = \sin f,\ f = f(v)$$

(2.7) $$k_2 = f',\ k_{g2} = 0 \quad (f' = df/dv)$$

Функция $f(v)$ в (2.6) не произвольна, она стеснена требованием кинематической осуществимости качения шара без скольжения. Например, когда шар катается по внутренней стороне сферической поверхности, очевидно, необходимо, чтобы $f' > -r^{-1}$.

Соотношения (2.7) означают, что семейство линий кривизны $u = \text{const}$ состоит из конгруентных кривых, которые являются геодезическими на опорной поверхности, а следовательно, плоскими линиями. Такая поверхность называется резной [11].

Из уравнения (2.3) с учетом (2.6) и (2.7) находим

(2.8) $$k_1 = \frac{(\rho^2 + r^2)(rf' + 1)k_{g1}\operatorname{ctg} f - r^2 f'}{(\rho^2 + r^2)rf' + \rho^2}$$

Кроме того, формула Лиувилля для полной кривизны [11]

$$k_1k_2 = \frac{\partial k_{g1}}{G\partial v} - \frac{\partial k_{g2}}{E\partial u} - (k_{g1})^2 - (k_{g2})^2$$

($ds^2 = (Edu)^2 + (Gdv)^2$ — линейный элемент поверхности) дает

(2.9) $$\frac{(\rho^2 + r^2)(rf' + 1)k_{g1}f'\operatorname{ctg} f - (rf')^2}{(\rho^2 + r^2)rf' + \rho^2} = \frac{\partial k_{g1}}{G\partial v} - (k_{g1})^2$$

где $G = G(v)$ в силу условия $k_{g2} = 0$.

Формулы (2.7) — (2.9) характеризуют локально геометрию опорной поверхности. В частности, решениям вида $k_{g1} = k_{g1}(v)$ уравнения (2.9) удовлетворяет некоторый класс поверхностей вращения. Действительно, в этом случае линии $v = \text{const}$ имеют постоянную кривизну $\sqrt{(k_1)^2 + (k_{g1})^2}$, т. е. являются окружностями и, кроме того, параллельны, поскольку ортогональные к ним линии $u = \text{const}$ геодезические на опорной поверхности.

Заметим еще, что случай

$$f = -\frac{\rho^2 v}{r(\rho^2 + r^2)} + \text{const},\quad k_{g1} = \frac{\rho^2}{r(\rho^2 + r^2)}\operatorname{tg} f$$

при котором правая часть (2.8) становится неопределенной, соответствует катанию шара по внутренней стороне сферы радиуса $r(\rho^2 + r^2)/\rho^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л.: Гостехиздат, 1944. 655 с.
2. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28—33.
3. *Чаплыгин С. А.* О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров.— Мат. сб., 1897, т. 20, вып. 1, с. 1—32; Собр. соч. Т. 1, М.— Л.: Гостехиздат, 1948. с. 26—56.
4. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.
5. *Бычков Ю. П.* О катании твердого тела по неподвижной поверхности.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 573—583.
6. *Бычков Ю. П.* О движении тела вращения, ограниченного сферой, на сферическом основании.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, с. 934—935.
7. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
8. *Космодемьянская Г. Н.* Задачи о катании шара по поверхности.— В кн.: *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970, с. 107—124.
9. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ, 1962. 237 с.
10. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 1, Ч. 2. М.— Л.: Гостехиздат, 1933. 235 с.
11. *Норден А. П.* Теория поверхностей. М.: Гостехиздат, 1956. 260 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.I.1983