Аналогичным образом доказывается вторая часть утверждения.

Из лемм 1, 2 следует, что для любого решения $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ системы (6) имеет место оценка

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} x_1(t)^2 \leqslant \frac{b_1^2}{(1+\sigma_1 r_1^{-1})} \min_{\lambda\in[0,\lambda_0]} \frac{[\sqrt{r_1\sigma_1}-\sqrt{(\sigma_1-\lambda)(1-\lambda)}]^2}{\lambda(b_1-\lambda)} \tag{10}$$

Сравнивая (8) и (10), придем к следующему утверждению.

Следствие 2. Если

$$2\sigma_1 - b_1 < (\sigma_1+1)(\sigma_1 r_1^{-1}+1) \max_{\lambda\in[0,\lambda_0]} \frac{\lambda(b_1-\lambda)}{[\sqrt{r_1\sigma_1}-\sqrt{(\sigma_1-\lambda)(1-\lambda)}]^2} \tag{11}$$

то система (6) глобально асимптотически устойчива, т. е. любое ее решение стремится при $t\to+\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Оценка (11) обобщает аналогичную оценку В. И. Юдовича [3]: $2\sigma_1 - b_1 < 0$, которая была получена при помощи функции Ляпунова.

Замечание 1. При $r_1\to 1$ правая часть неравенства (11) стремится к $+\infty$. Поэтому при фиксированных b_1 и σ_1 всегда найдется $r_1 > 1$, удовлетворяющее условию (11).

Замечание 2. Иногда представляет интерес рассматривать малые b_1 [4]. Выбрав в этом случае $\lambda = b_1/2$, из (11) получим следующее условие глобальной асимптотической устойчивости:

$$r_1 < 1 + \frac{(\sigma_1+1)}{\sqrt{2\sigma_1}} b_1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов Г. А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством.— Сиб. матем. ж., 1976, т. 15, № 1, с. 91—112.
2. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. *Белых В. Н.* Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем. Учебн. пособие. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1980. 98 с.
4. Странные аттракторы. Сб. статей. М.: Мир, 1981. 253 с.
5. *Ruelle D.* The Lorenz attractor and the problem of turbulence.— In: Lecture Notes in Math., No. 565. B.: Springer, 1976, p. 146—158.

Ленинград

Поступила в редакцию
2.VIII.1982

УДК 531.36

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ И НАГРУЗКАМИ

Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.

Рассматривается самосогласованное динамическое поведение одномерной системы с движущейся нагрузкой. На основании полученных ранее [1] из вариационного принципа Гамильтона естественных граничных условий для самосогласованной задачи динамики одномерных систем, когда закон движения границы не задан, показано, что движение нагрузки приводит к появлению дополнительных сил, пропорциональных скорости движения нагрузки. Найдены выражения через плотность функции Лагранжа для силы волнового давления, потока волновой энергии, импульса волны, скорости переноса энергии, работы сил, изменяющих параметры системы, сил распределенной отдачи, возникающих при распространении волн вдоль неоднородной системы. Обсуждаются условия излучения в рассматриваемом классе систем. Найдены критические скорости движения нагрузки вдоль балки Тимошенко.

1. Рассмотрим голономную систему с идеальными связями, состоящую из одномерной системы, вдоль которой по некоторому закону, согласованному с движением распределенной системы, перемещается сосредоточенная нагрузка.

Пусть x — декартова координата вдоль одномерной системы, t — время, $D = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ — некоторая прямоугольная область в плоскости x, t. Предположим, что закон движения нагрузки характеризуется некоторой дважды дифференцируемой на $[\alpha, \beta]$ функцией $x = \chi(t)$, такой, что кривая $K = \{(x, t):$

$x = \chi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ лежит в области D и разбивает ее на части

$$D_1 = \{(x, t)\colon\ a \leqslant x \leqslant \chi(t),\quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},\qquad D_2 = \{(x, t)\colon \chi(t) \leqslant x \leqslant b.\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

а закон движения распределенной системы описывается некоторой непрерывной в D вектор-функцией

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{cases}\mathbf{u}^1(x,\ t) = (u_1^1(x,\ t), \ldots, u_n^1(x,\ t)), & (x,\ t) \in D_1\\ \mathbf{u}^2(x,\ t) = (u_1^2(x,\ t), \ldots, u_n^2(x,\ t)), & (x,\ t) \in D_2\end{cases}$$

причем вектор-функции $\mathbf{u}^1(x,\ t)$ и $\mathbf{u}^2(x,\ t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в областях D_1 и D_2 соответственно.

Таким образом, кривая K — возможная линия разрыва производных вектор-функции $\mathbf{u}(x,\ t)$ в области D, и обратно, линией разрыва производных вектор-функции $\mathbf{u}(x,\ t)$ в области D может быть только линия K.

Пусть $L(t,\ x, \mathbf{u},\ \mathbf{u}_t,\ \mathbf{u}_x)$ — плотность функции Лагранжа распределенной системы, а $L^\circ(t,\ \chi,\ \chi^\cdot,\ \mathbf{u}^\circ,\ \mathbf{u}^{\cdot\circ})$ — функция Лагранжа нагрузки (L, L° — дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов); $\mathbf{u}^\circ(t) = \mathbf{u}(\chi(t),\ t)$. Тогда соотношения, задающие уравнения движения системы и условия на движущейся границе, записываются в виде [1]

$$L_u - \frac{\partial}{\partial t} L_\mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial x} L_w + \mathbf{q} = 0,\quad (x,t) \in \operatorname{Int} D_\nu,\quad \nu = 1, 2 \tag{1.1}$$

$$L_\chi{}^\circ - \frac{d}{dt} L_{\chi^\cdot}{}^\circ + q_0{}^\circ = [L - (\mathbf{w}, L_w - \chi^\cdot L_\mathbf{v})] \tag{1.2}$$

$$[\mathbf{u}] = 0 \tag{1.3}$$

$$\mathring{L}_{u^\circ} - \frac{d}{dt} \mathring{L}_{\mathbf{u}^{\cdot\circ}} + \mathbf{q}^\circ = [L_w - \chi^\cdot L_\mathbf{v}] \tag{1.4}$$

где положено для сокращения записи $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t$, $\mathbf{w} = \mathbf{u}_x$, $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение векторов, $[\cdot]$ — разность между двумя предельными значениями функции на двух сторонах кривой K. Здесь учтены также диссипативные эффекты, вызванные действием диссипативных сил $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^\circ$, $\mathbf{q}_0{}^\circ$.

Отметим, что применительно к ряду частных случаев вопрос о корректных условиях на движущихся границах рассматривался в [2—4].

Из соотношений (1.4), выражающих балансы обобщенных сил, действующих на нагрузку, видно, что на движущуюся нагрузку, в отличие от неподвижной, действуют пропорциональные скорости движения $\chi^\cdot$ инерционные силы — компоненты вектора $\chi^\cdot L_v$. В связи с тем, что в динамической теории одномерных упругих систем эти силы, как правило, не учитывались [5—7], представляет интерес оценить их величину. Например, для канатов шахтных подъемников, где скорость поперечных волн составляет 20—70 м/с, а скорость подъема $\chi^\cdot = 8—12$ м/с, отношение инерционной силы к перерезывающей равно 0,1—0,4. Ясно, что при расчете динамического поведения подобного рода систем учет этих сил необходим.

Выражения для инерционных сил могут быть получены не только из вариационных принципов. Убедимся в этом на примере абсолютно гладкой струны, вдоль которой скользит с постоянной скоростью нанизанная на нее бусинка массы m. Для нахождения перерезывающей силы, действующей на движущуюся бусинку, запишем уравнение поперечных колебаний струны в системе координат, связанной с бусинкой

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\rho(u_{t*} - cu_{x*})) = \frac{\partial R}{\partial x^*},\quad R = (N - c^2\rho)u_{x*} + c\rho u_{t*}$$

где x^* и t^* связаны с исходными координатами преобразованием Галилея $x^* = x - ct$, $t^* = t$. Здесь слева стоит скорость изменения плотности импульса, а справа — градиент перерезывающей силы R. Зная ее, можно составить уравнение поперечного движения бусинки. Переходя к исходным координатам, будем иметь

$$mu^{\cdot\cdot}(ct,\ t) = (Nu_x + c\rho u_t)\,|_{x=ct+0} - (Nu_x + c\rho u_t)|_{x=ct-0}$$

где $c\rho u_t$ — инерционная сила.

Интересно отметить, что в электродинамике при решении задач с движущимися границами пользуются формулами преобразования электрического E и магнитного H полей согласно специальной теории относительности [8], вследствие чего граничные условия получаются всегда в форме (1.4). Действительно, если ввести для плоских электромагнитных волн односкалярное описание, положив $H = -u_x/\mu$, $E = u_t$, и учесть, что $L = (\varepsilon E^2 - \mu H^2)/2$ (ε и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости), то из (1.4) получается, например, известное [9, 10] условие для полей на движущемся скачке параметров (ε и μ) среды: $[H - \chi^{\cdot}\varepsilon E] = 0$.

В отсутствие сторонних и диссипативных сил ($q_0^\circ = 0$) движение нагрузки происходит под действием сил волнового давления на каждой из сторон кривой K, определяемых согласно (1.2) выражениями

$$L - (\mathbf{w}, L_w) + \chi^{\cdot} (\mathbf{w}, L_v) |_{x=\chi(t)\pm 0}$$

Величина этих сил может быть значительной даже в случае неподвижной границы. Например, для круглого стержня, совершающего изгибные колебания, в закреплениях возникает напряжение $\sigma \approx 10^2 (d^2/\lambda^4) E u_0^2$ (d — диаметр стержня, λ — длина волны, E — модуль упругости, u_0 — амплитуда поперечных отклонений). В частности, при $u_0 = d$ и $\lambda = 10d$ напряжение $\sigma \approx 10^{-2} E$, т. е. оказывается сравнимо с предельно допустимыми для металлов.

Если нагрузка движется, то сила волнового давления может возрастать. Так, для струны ее величина может быть значительной даже при сколь угодно малой интенсивности падающих на границу волн [11].

2. Используя (1.1), можно убедиться, что в каждой из областей Int D_ν ($\nu = 1, 2$) справедливы следующие соотношения:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = -L_t + (\mathbf{v}, \mathbf{q}), \quad h = (\mathbf{v}, L_v) - L, \quad S = (\mathbf{v}, L_w) \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = L_x - (\mathbf{w}, \mathbf{q}), \quad p = -(\mathbf{w}, L_v), \quad T = L - (\mathbf{w}, L_w) \end{aligned}$$

где $h(x, t)$ — плотность функции Гамильтона распределенной системы, а $T(x, t)$, как следует из (1.2),— сила волнового давления в сечении x.

Для стационарной системы ($L_t = 0$) в отсутствие сторонних и диссипативных сил ($\mathbf{q} = 0$) первое из соотношений (2.1) выражает закон изменения энергии в элементе распределенной системы за счет ее потока через границы элемента. Следовательно, величину $S(x, t)$ надо рассматривать как поток волновой энергии. Аналогично, величина $p(x, t)$ — плотность импульса волны. Таким образом, соотношения (2.1) выражают локальные законы изменения энергии и импульса волны.

Заметим, что $V = S/h$ — скорость переноса волновой энергии (групповая скорость) [12]. Можно убедиться, что, например, в случае подпружиненной струны для квазигармонических волн среднее за период значение V равно $d\omega/dk$ (ω — частота, k — волновое число), что совпадает с известным приближенным выражением для групповой скорости [13].

Функции $h(x, t)$, $S(x, t)$, $p(x, t)$, $T(x, t)$ в области D имеют разрыв вдоль кривой K. Используя (1.2) и (1.4), можно убедиться, что соответствующие условия на скачке, являющиеся по существу законами изменения энергии и импульса нагрузки, имеют вид

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &dh^\circ/dt = -[S - \chi^{\cdot} h] - L_t^\circ + (\mathbf{u}^{\cdot\circ}, \mathbf{q}^\circ) + \chi^{\cdot} q_0^\circ \\ &dp^\circ/dt = -[T - \chi^{\cdot} p] + L_\chi^\circ + q_0^\circ \\ &h^\circ = \chi^{\cdot} L_{\chi^{\cdot}}^\circ + (\mathbf{u}^{\cdot\circ}, L_{u^{\cdot\circ}}) - L^\circ, \quad p^\circ = L_{\chi^{\cdot}}^\circ \end{aligned}$$

где h°, p° — функция Гамильтона и импульс нагрузки соответственно.

Для системы в целом справедливы следующие глобальные законы изменения энергии и импульса (угловые скобки означают интегрирование по x от a до b):

$$(2.3)\qquad \frac{dH}{dt} = -S |_{x=a}^{x=b} - \langle L_t \rangle - L_t^\circ + \langle (\mathbf{v}, \mathbf{q}) \rangle + (\mathbf{u}^{\cdot\circ}, \mathbf{q}^\circ) + \chi^{\cdot} q_0^\circ$$

$$(2.4)\qquad \frac{dP}{dt} = -T |_{x=a}^{x=b} + \langle L_x \rangle + L_\chi^\circ - \langle (\mathbf{w}, \mathbf{q}) \rangle + q_0^\circ$$

где $H = \langle h \rangle + h^\circ$, $P = \langle p \rangle + p^\circ$ — функция Гамильтона и импульс всей системы соответственно.

Из (2.3) видно, в частности, что увеличение энергии волн в случае неподвижных границ возможно лишь при условии положительной работы сил, изменяющих параметры системы, т. е., если $-(\langle L_t \rangle + L_t^\circ) > 0$. Изменение же импульса, как следует из (2.4), может происходить не только за счет давления T на границах $x = a$ и $x = b$, упругой силы L_χ°, а также диссипативных и сторонних сил, но и за счет сил отдачи $\langle L_x \rangle$, обусловленных распределенным отражением волн при их распространении вдоль неоднородной системы.

Для исследования условий излучения можно воспользоваться первым условием на скачке (2.2). Входящие сюда выражения $(S - \chi^{\cdot} h)\,|_{x=\chi(t)\pm 0}$ определяют потоки волновой энергии на каждой из сторон кривой K. Следовательно, критерий излучения в распределенную систему движущейся нагрузкой можно записать в форме

(2.5) $$|\,[S - \chi^{\cdot} h]\,| > 0$$

Пример 1. Рассмотрим бесконечную длинную линию, пронизываемую в сечении $x = \chi(t)$ заданным током I. Плотность функции Лагранжа для нее записывается в виде $L = (CV^2 - \Lambda J^2)/2$, где V и J — напряжение и ток в линии, а C и Λ — погонные емкость и индуктивность. Переходя к односкалярному описанию, положив $J = -\Lambda^{-1} u_x$, $V = u_t$ и используя (2.5), находим, что излучение имеет место, когда

$$|\,[S - \chi^{\cdot} h]\,| = |\,\Lambda^{-1} \chi^{\cdot -1} (1 - C\Lambda\chi^{\cdot 2})\,[u_t^2]/2\,| > 0$$

Отсюда следует известное [14, 15] условие на скорости движения источника, при которых начинается излучение Вавилова — Черенкова: $\chi^{\cdot} = \pm (C\Lambda)^{-1/2}$, где $(C\Lambda)^{-1/2}$ — скорость распространения электромагнитных волн в линии.

Пример 2. Для балки Тимошенко

$$L = (\rho F u_t^2 + \rho J \varphi_t^2 - EJ\varphi_x^2 - \varkappa GF (u_x - \varphi)^2 - N u_x^2)/2$$

Здесь $u(x, t)$ — поперечное отклонение серединной линии балки, $\varphi(x, t)$ — угол поворота поперечного сечения, ρ — удельная плотность, F — площадь поперечного сечения, J — момент инерции сечения, E и G — модули упругости, $\varkappa$ — коэффициент Тимошенко, N — натяжение.

Согласно (2.5), одна из критических скоростей балки (соответствующих границам области излучения) будет равна

$$\chi_1^{\cdot} = \pm ((N + \varkappa G\rho)/(\rho F))^{1/2}$$

Если дополнительно предположить, что нагрузка движется равномерно и решения слева и справа от нее гармонические, то определяются еще две критические скорости

$$\chi_2^{\cdot} = \pm (E/\rho)^{1/2},\ \chi_3^{\cdot} = \pm ((N/(\rho F)) + (2\varkappa G/(3\rho)))^{1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики с движущимися закреплениями и нагрузками.— В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1982, с. 75—80.
2. *Неронов Н. П.* О некоторых вопросах, связанных с определением напряжений в подъемных канатах.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 2, с. 59—74.
3. *Островский Л. А.* Некоторые общие соотношения для волн на движущейся границе раздела двух сред.— ЖЭТФ, 1970, т. 61, вып. 2, с. 551—561.
4. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины.— Докл. АН СССР, 1954, т. 95, № 5, с. 939—941.
5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.— М.: Наука, 1967. 444 с.
6. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины.— К.: Наук. думка, 1971. 224 с.
7. *Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. К.: Наук. думка, 1980, 231 с.
8. *Паули В.* Теория относительности.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 300 с.
9. *Островский Л. А., Степанов Н. С.* Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах (обзор).— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, № 4, с. 489—529.
10. *Островский Л. А.* Некоторые «парадоксы движущихся границ» в электродинамике.— Успехи физ. наук, 1975, т. 116, № 2, с. 315—326.
11. *Николаи Е. Л.* К вопросу о давлении вибраций.— Изв. Санкт-Петербург. политехн. ин-та, 1912, т. 18, вып. 1, с. 49—60.
12. *Стретт Дж. В.* (лорд Релей). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955, т. 1, 504 с., т. 2. 476 с.
13. *Горелик Г. С.* Колебания и волны. М.: Физматгиз, 1959. 572 с.
14. *Тамм И. Е.* Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы.— Успехи физ. наук, 1959, т. 68, вып. 3, с. 387—396.
15. *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1975. 415 с.

Горький

Поступила в редакцию 16.XII.1982