Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 531.36

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Леонов Г. А.

Для системы уравнений Лоренца получены условия глобальной асимптотической устойчивости, обобщающие известную теорему В. И. Юдовича.

Рассмотрим систему

$$\sigma^{\cdot} = \eta, \quad \eta^{\cdot} = -g(\eta, \sigma) + z^*Cf(\sigma) - \varphi(\sigma), \quad z^{\cdot} = Az + Bf(\sigma)\eta \tag{1}$$

где A — постоянная $(n \times n)$-матрица, собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части, B и C — постоянные $(n \times m)$-матрицы, $f(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, $\varphi(\sigma)$ и $g(\eta, \sigma)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Система (1) описывает работу синхронной машины и регулятора Буасса — Сарда [1, 2]. С помощью преобразования фазовых переменных, близкого к преобразованию В. И. Юдовича [3], систему Лоренца также можно записать в виде (1).

В дальнейшем предполагаем, что любое решение системы (1) определено на интервале $(0, +\infty)$, ее стационарное множество Λ состоит из изолированных точек и

$$g(\eta, \sigma)\eta \geqslant \mu_1\eta^2, \quad \forall\eta \in R^1, \quad \forall\sigma \in R^1$$

(μ_1 — некоторое положительное число).

Введем в рассмотрение матрицу $K(p) = C^*(A - pI)^{-1}B$, где p — комплексное число, I — единичная матрица, и некоторое положительное число μ.

Теорема. Пусть при всех $\omega \in R^1$ имеет место неравенство

$$\det[\mu_1\mu^{-1}I + \operatorname{Re} K(i\omega)] \neq 0 \tag{2}$$

Тогда любое ограниченное на $(0, +\infty)$ решение $x(t) = \| \sigma(t), \eta(t), z(t) \|$ системы (1), удовлетворяющее условию $\overline{\lim}_{t\to+\infty} | f(\sigma(t)) |^2 < \mu$, стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Доказательство. Неравенство (2) равносильно соотношению

$$\mu_1\mu^{-1} I + \operatorname{Re} K(i\omega) > 0, \qquad \forall\omega \in R^1$$

По теореме 1.2.7 и лемме 1.2.3 [2] отсюда вытекает существование $n \times n$-матрицы $H = H^* > 0$ и числа $\varepsilon > 0$, для которых выполнено неравенство

$$2z^*H(Az + B\xi) + z^*C\xi - \mu_1\mu^{-1} | \xi |^2 \leqslant -\varepsilon | z |^2, \quad \forall z \in R^n, \quad \forall\xi \in R^m \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$V(x) = z^*Hz + \frac{1}{2}\eta^2 + \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

Из неравенства (3) вытекает, что для решений $x(t)$ системы (1) имеет место оценка

$$V^{\cdot}(x(t)) \leqslant -\mu_1\eta(t)^2(1 - \mu^{-1} | f(\sigma(t)) |^2) - \varepsilon | z(t) |^2 \tag{4}$$

из которой следует, что для ограниченной траектории $x(t, x_0)$ системы (1) (здесь $x(0, x_0) = x_0$), удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} | f(\sigma(t, x_0)) |^2 < \mu \tag{5}$$

функция $V(x(t, x_0))$ не возрастает по t на некотором интервале $(\tau, +\infty)$. Отсюда и из ограниченности $V(x(t, x_0))$ вытекает, что существует конечный предел $\lim_{t\to+\infty} V(x(t, x_0)) = L$.

Траектория $x(t, x_0)$ ограничена на $(0, +\infty)$, поэтому множество Ω ее ω-предельных точек не пусто. Пусть $y \in \Omega$. Известно [2], что траектория $x(t, y) \in \Omega$, $\forall t \in R^1$. Поэтому $V(x(t, y)) = L$, $\forall t \in R^1$. Кроме того, из условия (5) следует, что $| f(\sigma(t, y)) |^2 < \mu$, $\forall t \in R^1$. Но тогда, используя (4), получим тождества $z(t, y) \equiv 0$, $\eta(t, y) \equiv 0$. Из (1) и $\eta(t, y) \equiv 0$ вытекает также равенство $\sigma(t, y) \equiv \mathrm{const}$. Таким образом, $\Omega \subset \Lambda$. Это включение и изолированность точек Λ и доказывают утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь систему Лоренца

$$\frac{dx_1}{dt_1} = -\sigma_1(x_1 - y_1), \quad \frac{dy_1}{dt_1} = -x_1z_1 + r_1x_1 - y_1, \quad \frac{dz_1}{dt_1} = x_1y_1 - b_1z_1 \tag{6}$$

где σ_1, r_1, b_1 — положительные числа, $r_1 > 1$. Заменой, близкой к замене В. И. Юдовича [3]

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\sigma_1}}x_1, \quad \eta = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}(y_1 - x_1), \quad z = \varepsilon^2\left(z_1 - \frac{x_1^2}{b_1}\right), \quad t = \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\varepsilon}t_1$$

$$\mu_1 = \varepsilon\frac{(\sigma_1 + 1)}{\sqrt{\sigma_1}}, \quad A = -\varepsilon\frac{b_1}{\sqrt{\sigma_1}}, \quad \varepsilon = (r_1 - 1)^{-1/2}, \quad \beta = \varepsilon\frac{(2\sigma_1 - b_1)}{\sqrt{\sigma_1}}$$

приведем систему (6) к системе (1) с $B = 2\beta A^{-1}$, $C = -1$, $g(\eta, \sigma) = \mu_1\eta$, $f(\sigma) = \sigma$, $\varphi(\sigma) = (1 - \beta A^{-1})\sigma^3 - \sigma$. Здесь $K(p) = 2\beta(p - A)^{-1}A^{-1}$. Поэтому неравенство (2) выполнено, если $\beta < \mu_1 A^2 (2\mu)^{-1}$. Эту оценку можно записать следующим образом:

$$2\sigma_1 - b_1 < \frac{(\sigma_1 + 1)b_1^2}{2\sigma_1(r_1 - 1)}\mu^{-1} \tag{7}$$

Поскольку система (6) диссипативна [3], из (7) и теоремы вытекает следующее

Следствие 1. Если решение $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ системы (6) удовлетворяет условию

$$(2\sigma_1 - b_1)\overline{\lim}_{t\to+\infty} x_1(t)^2 < b_1^2(\sigma_1 + 1) \tag{8}$$

то оно стремится при $t \to +\infty$ к некоторому положению равновесия.

Введем обозначения

$$\gamma = \sigma_1 r_1^{-1}, \quad \lambda_0 = \min(1, b_1, \sigma_1), \quad \lambda \in [0, \lambda_0]$$

$$\theta = 2[\sigma_1 - \sqrt{\gamma(\sigma_1 - \lambda)(1 - \lambda)}],$$

$$W(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2}[x_1^2 + \gamma(y_1^2 + z_1^2)] - \theta z_1$$

$$\Gamma = \frac{\theta^2(b_1 - 2\lambda)^2}{8\lambda\gamma(b_1 - \lambda)}, \quad \alpha = \frac{b_1^2[\sqrt{r_1\sigma_1} - \sqrt{(\sigma_1 - \lambda)(1 - \lambda)}]^2}{\lambda(b_1 - \lambda)(1 + \gamma)}$$

(Функции W аналогичного вида использовались для доказательства диссипативности системы Лоренца в работах [3—5].)

Лемма 1. Для любого решения $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ системы (6) имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} W(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \leqslant \Gamma \tag{9}$$

Доказательство. Видно, что

$$W^\cdot + 2\lambda W = -(\sigma_1 - \lambda)x_1^2 - \gamma(1 - \lambda)y_1^2 - \gamma(b_1 - \lambda)z_1^2 + [\sigma_1 + \gamma r_1 - \theta]x_1y_1 + \theta(b_1 - 2\lambda)z_1 \leqslant -\gamma(b_1 - \lambda)z_1^2 + \theta(b_1 - 2\lambda)z_1 \leqslant 2\lambda\Gamma$$

Поэтому $(W - \Gamma)^\cdot + 2\lambda(W - \Gamma) \leqslant 0$ и, следовательно

$$W(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) - \Gamma \leqslant [W(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) - \Gamma]e^{-2\lambda t}, \quad \forall t \geqslant 0$$

Последнее и означает, что выполнено неравенство (9).

Введем в рассмотрение множества

$$\Phi_1 = \{x_1, y_1, z_1 \mid W(x_1, y_1, z_1) \leqslant \Gamma, \ x_1 > \sqrt{\alpha}\}$$

$$\Phi_2 = \{x_1, y_1, z_1 \mid W(x_1, y_1, z_1) \leqslant \Gamma, \ x_1 < -\sqrt{\alpha}\}$$

Лемма 2. Если в точке t решение $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ системы (6) содержится в Φ_1, то $x_1^\cdot(t) < 0$, если оно содержится в Φ_2, то $x_1^\cdot(t) > 0$.

Доказательство. Рассматривая первую часть утверждения леммы и предполагая противное, из уравнения $x_1^\cdot = -\sigma_1(x_1 - y_1)$ получим, что $y_1(t) \geqslant x_1(t) > \sqrt{\alpha}$. Поэтому

$$W(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) > \frac{1}{2}\left[\alpha + \gamma\alpha + \gamma\left(z_1(t) - \frac{\theta}{\gamma}\right)^2 - \frac{\theta^2}{\gamma}\right] \geqslant \frac{1}{2}\left[\alpha(1 + \gamma) - \frac{\theta^2}{\gamma}\right] = \Gamma$$

Последнее противоречит тому, что рассматриваемое решение в точке t содержится в Φ_1.

Аналогичным образом доказывается вторая часть утверждения.

Из лемм 1, 2 следует, что для любого решения $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ системы (6) имеет место оценка

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} x_1(t)^2 \leqslant \frac{b_1^2}{(1+\sigma_1 r_1^{-1})} \min_{\lambda\in[0,\,\lambda_0]} \frac{[\sqrt{r_1\sigma_1}-\sqrt{(\sigma_1-\lambda)(1-\lambda)}]^2}{\lambda(b_1-\lambda)} \tag{10}$$

Сравнивая (8) и (10), придем к следующему утверждению.

Следствие 2. Если

$$2\sigma_1 - b_1 < (\sigma_1+1)(\sigma_1 r_1^{-1}+1) \max_{\lambda\in[0,\,\lambda_0]} \frac{\lambda(b_1-\lambda)}{[\sqrt{r_1\sigma_1}-\sqrt{(\sigma_1-\lambda)(1-\lambda)}]^2} \tag{11}$$

то система (6) глобально асимптотически устойчива, т. е. любое ее решение стремится при $t\to+\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Оценка (11) обобщает аналогичную оценку В. И. Юдовича [3]: $2\sigma_1 - b_1 < 0$, которая была получена при помощи функции Ляпунова.

Замечание 1. При $r_1 \to 1$ правая часть неравенства (11) стремится к $+\infty$. Поэтому при фиксированных b_1 и σ_1 всегда найдется $r_1 > 1$, удовлетворяющее условию (11).

Замечание 2. Иногда представляет интерес рассматривать малые b_1 [4]. Выбрав в этом случае $\lambda = b_1/2$, из (11) получим следующее условие глобальной асимптотической устойчивости:

$$r_1 < 1 + \frac{(\sigma_1+1)}{\sqrt{2\sigma_1}}\, b_1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов Г. А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством.— Сиб. матем. ж., 1976, т. 15, № 1, с. 91—112.
2. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. *Белых В. Н.* Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем. Учебн. пособие. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1980. 98 с.
4. Странные аттракторы. Сб. статей. М.: Мир, 1981. 253 с.
5. *Ruelle D.* The Lorenz attractor and the problem of turbulence.— In: Lecture Notes in Math., No. 565. B.: Springer, 1976, p. 146—158.

Ленинград

Поступила в редакцию 2.VIII.1982

УДК 531.36

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ И НАГРУЗКАМИ

Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.

Рассматривается самосогласованное динамическое поведение одномерной системы с движущейся нагрузкой. На основании полученных ранее [1] из вариационного принципа Гамильтона естественных граничных условий для самосогласованной задачи динамики одномерных систем, когда закон движения границы не задан, показано, что движение нагрузки приводит к появлению дополнительных сил, пропорциональных скорости движения нагрузки. Найдены выражения через плотность функции Лагранжа для силы волнового давления, потока волновой энергии, импульса волны, скорости переноса энергии, работы сил, изменяющих параметры системы, сил распределенной отдачи, возникающих при распространении волн вдоль неоднородной системы. Обсуждаются условия излучения в рассматриваемом классе систем. Найдены критические скорости движения нагрузки вдоль балки Тимошенко.

1. Рассмотрим голономную систему с идеальными связями, состоящую из одномерной системы, вдоль которой по некоторому закону, согласованному с движением распределенной системы, перемещается сосредоточенная нагрузка.

Пусть x — декартова координата вдоль одномерной системы, t — время, $D = \{(x,\ t) : a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ — некоторая прямоугольная область в плоскости $x,\ t$. Предположим, что закон движения нагрузки характеризуется некоторой дважды дифференцируемой на $[\alpha,\ \beta]$ функцией $x = \chi(t)$, такой, что кривая $K = \{(x,\ t)$: